

СЛЕПАЯ ОБРАБОТКА ВЕКТОРНЫХ СИГНАЛОВ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

© 2003 О.В. Горячкин

Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики, г. Самара

Рассматривается задача оценки импульсной характеристики системы со скалярным входом и векторным выходом по априори неизвестному входному сигналу. Формулируется и доказывается основная теорема слепой идентификации в полиномиальной интерпретации. В рамках известного метода слепой идентификации, использующего перекрёстные связи каналов, на основе полиномиального представления предлагается новый алгоритм, использующий аналитическое решение задачи слепой идентификации. Получены выражения для относительной погрешности алгоритма, проведено математическое моделирование.

Формулировка проблемы

Слепая обработка сигналов (СОС) это относительно новая технология цифровой обработки сигналов (ЦОС), получившая свое развитие в течение последних 10-15 лет. В общем виде задачу слепой обработки можно сформулировать как цифровую обработку неизвестных сигналов, прошедших линейный канал с неизвестными характеристиками на фоне аддитивных шумов.

Различают два основных типа задач слепой обработки сигналов: слепая идентификация канала (оценка неизвестной импульсной характеристики), слепое выравнивание (или коррекция) канала (непосредственная оценка информационного сигнала). В обоих случаях для обработки доступны только реализации входного сигнала приемного устройства.

Подобные задачи актуальны в различных областях прикладной информатики и ЦОС, в частности, данная задача возникает в системах цифровой связи, радиолокации, радионавигации, обработки изображений различного происхождения. Технологии слепой обработки сигналов находят сегодня широкие приложения не только в радиотехнике, но и в компьютерной медицине, геологии, дистанционном зондировании Земли, задачах распознавания речи.

Часто непрерывная модель стационарной системы может быть описана выражением:

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t-\tau)x(\tau)d\tau + \mathbf{v}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{y}(t)$ - наблюдаемый векторный сигнал со значениями в \mathbf{C}^m , $\mathbf{h}(\tau)$ - неизвестная импульсная характеристика m -мерного канала; $x(\tau)$ - неизвестный комплексный информационный сигнал со значениями в \mathbf{C} ; $\mathbf{v}(t)$ - аддитивная помеха (векторный случайный процесс со значениями в \mathbf{C}^m , как правило с независимыми компонентами). Системы, описываемые моделями вида (1) называют системами с одним входом и множественным выходом. Если в (1) $m = 1$, то мы имеем модель системы с одним входом и выходом.

Под идентифицируемостью системы вслепую понимается возможность восстановления импульсной характеристики системы с точностью до комплексного множителя только по выходным сигналам в отсутствие шумов. При этом различают задачи статистической и детерминированной идентификации, имея в виду модель информационной последовательности. В данной статье рассматривается случай детерминированной идентификации векторного канала.

Условия идентифицируемости векторного канала

Пусть идентифицируемый дискретный

канал описывается следующими выражениями:

$$y_l^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i^{(k)} x_{i+l}(z). \quad (2)$$

В этом выражении $y_l^{(k)}(z)$ - полином степени $(t-1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t отсчетов на выходе k -го канала, $k=1, \dots, M$, $l=0, \dots, N-1$ - номер блока выходных отсчетов; $L = \max\{L_1, \dots, L_M\}$ - максимальная длина векторного канала; $x_l(z)$ - полином степени $(t-1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t информационных отсчетов на входе канала.

Наша задача найти условия, которым должны удовлетворять детерминированная информационная последовательность и отсчеты векторного канала, при выполнении которых набор полиномов $\{y_l^{(1)}(z), \dots, y_l^{(M)}(z)\}$ кольца $C[z]$, однозначно характеризует коэффициенты канала $h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, \dots, h_0^{(M)}, \dots, h_{L-1}^{(M)}$ и коэффициенты информационной последовательности.

Рассмотрим случай детерминированной идентификации векторного канала для $M=2$ в полиномиальной интерпретации (2). Анализируя структуру преобразования (2) легко заметить, что если $N=L$, то справедливо следующее соотношение:

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(1)}(z) h_l^{(2)} - \sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(2)}(z) h_l^{(1)} = 0. \quad (3)$$

В этом уравнении $2L$ неизвестных $h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, h_0^{(2)}, \dots, h_{L-1}^{(2)}$. Выберем $2L$ различных значений формальной переменной z_1, \dots, z_{2L} . Тогда используя (3) мы можем записать $2L$ однородных линейных уравнений относительно $2L$ неизвестных коэффициентов канала.

В матричной форме, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L}) \mathbf{h} &= \\ &= \begin{pmatrix} y_0^{(1)}(z_1) & \dots & y_{L-1}^{(1)}(z_1) & -y_0^{(2)}(z_1) & \dots & -y_{L-1}^{(2)}(z_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0^{(1)}(z_{2L}) & \dots & y_{L-1}^{(1)}(z_{2L}) & -y_0^{(2)}(z_{2L}) & \dots & -y_{L-1}^{(2)}(z_{2L}) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} h_0^{(2)} \\ \vdots \\ h_{L-1}^{(2)} \\ h_0^{(1)} \\ \vdots \\ h_{L-1}^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Для того, чтобы система линейных уравнений (4) имела единственное нетривиальное решение необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы $\mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L})$ был равен $(2L-1)$. Используя формулы (2) матрицу системы уравнений (4) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L}) &= \begin{pmatrix} x_0(z_1) & \dots & x_{2L-2}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_0(z_{2L}) & \dots & x_{2L-2}(z_{2L}) \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} h_0^{(1)} & \dots & 0 & -h_0^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}^{(1)} & & h_0^{(1)} & -h_{L-1}^{(2)} & & -h_0^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{L-1}^{(1)} & 0 & \dots & -h_{L-1}^{(2)} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L}) \mathbf{H}_{1,2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, для идентифицируемости системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия: 1) ранг $(2L \times 2L - 1)$ матрицы $\mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L})$ равен $(2L-1)$, для любых различных z_1, \dots, z_{2L} ; 2) ранг $(2L-1 \times 2L)$ матрицы $\mathbf{H}_{1,2}$ равен $(2L-1)$.

Для того чтобы матрица $\mathbf{H}_{1,2}$ имела ранг $(2L-1)$ необходимо, чтобы нашелся не равный нулю минор порядка $(2L-1)$. Используя перестановку строк матрицу $\mathbf{H}_{1,2}$ для слу-

чая $L_2 \geq L_1$ можно представить в виде:

$$\mathbf{H}_{1,2} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \vdots \\ \text{Syl}(h_1(z), h_2(z))^t & & -h_0^{(2)} & & & h_0^{(1)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & -h_{L_2-1}^{(2)} & & -h_{L_2-1}^{(2)} & h_{L_2-1}^{(1)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & \dots & -h_{L_2-1}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Где \mathbf{T} - матрица перестановки, $\text{Syl}(h_1(z), h_2(z))$ это матрица Сильвестра, образованная коэффициентами полиномов $h_1(z)$ и $-h_2(z)$, которые соответствуют каналам $h_0^{(1)}, \dots, h_{L_1-1}^{(1)}$ и $h_0^{(2)}, \dots, h_{L_2-1}^{(2)}$. Поскольку $\det(\text{Syl}(h_1(z), h_2(z)))$ равен результату полиномов $h_1(z)$ и $h_2(z)$, то в соответствии с известным фактом теории результатов [1] $\det(\text{Syl}(h_1(z), h_2(z))) = 0$ только если полиномы $h_1(z)$ и $h_2(z)$ имеют общий корень. Тогда если длина $L_2 = L$, то главный минор матрицы (1.6) равен

$$\left(-h_{L-1}^{(2)}\right)^{L-L_1+1} \det(\text{Syl}(h_1(z), h_2(z))),$$

т.е. не равен нулю.

Первое условие содержит в себе еще два ограничения, которые становятся более очевидными, если представить матрицу $\mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L})$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L}) = & \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{t-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_{2L} & \dots & z_{2L}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2L-2} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{2L-1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{2L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_t & x_{t+1} & & x_{t+2L-2} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{V}_t^{2L}(z_1, \dots, z_{2L}) \mathbf{X}_H(2L-1). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{V}_t^{2L}(z_1, \dots, z_{2L})$ - матрица Вандермонда имеет ранг $2L-1$ если $t \geq 2L-1$, и $\mathbf{X}_H(2L-1)$ - ганкелева матрица, составленная из отсчетов информационной последовательности имеет полный ранг по столбцам. Данное свойство характеризуется т.н. линей-

ной сложностью информационной последовательности.

Линейная сложность детерминированной последовательности это наименьшее значение D такое, что $\mathbf{X}_H(D)$ имеет полный ранг по столбцам или существуют такие не равные нулю одновременно $\{\lambda_j\}$ для которых:

$$x_i = -\sum_{j=1}^D \lambda_j x_{i-j} \quad i = D, \dots, t+2L-2. \quad (8)$$

Линейная сложность характеризует степень предсказуемости детерминированной последовательности ограниченной длины. Для того чтобы матрица $\mathbf{X}_H(2L-1)$ имела полный ранг по столбцам, линейная сложность информационной последовательности должна быть больше $(2L-2)$.

Таким образом, мы определили необходимые и достаточные условия идентифицируемости векторного канала для случая $M = 2$. Сформулируем этот результат в виде следующей теоремы, обобщив его на случай $M > 2$.

Теорема. Для идентифицируемости детерминированного векторного канала необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

- 1) полиномы $h_1(z), \dots, h_M(z)$ не должны иметь общих корней;
- 2) линейная сложность информационной последовательности должна быть больше $(2L-2)$;
- 3) длина информационной последовательности должна быть больше $(4L-3)$ или длина вектора данных больше $(3L-2)$.

Доказательство. Случай $M = 2$ был нами доказан. Докажем теперь общий случай.

Уравнение (3) для любой пары, образованной i -м и j -м каналом имеет вид:

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(i)}(z) h_l^{(j)} - \sum_{l=0}^{L-1} y_l^{(j)}(z) h_l^{(i)} = 0, \quad (9)$$

где $i, j = 1, \dots, M$.

Среди этих уравнений нетривиальных и

несовпадающих $K = M(M - 1)/2$ для LM неизвестных. Из них мы всегда можем сформировать дополнительные, выбирая сечения z_1, \dots, z_s так что $sK \geq LM$. Запишем (9) в матричной форме, аналогично (4), пусть:

$$\mathbf{Y}^{(i)}(z_1, \dots, z_s) = \begin{pmatrix} y_0^{(i)}(z_1) & \dots & y_{L-1}^{(i)}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ y_0^{(i)}(z_s) & \dots & y_{L-1}^{(i)}(z_s) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, M \quad (10)$$

$$\mathbf{Y}_i(z_1, \dots, z_s) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{Y}^{(i+1)}(z_1, \dots, z_s) & -\mathbf{Y}^{(i)}(z_1, \dots, z_s) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{Y}^{(M)}(z_1, \dots, z_s) & 0 & \dots & -\mathbf{Y}^{(i)}(z_1, \dots, z_s) \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_s) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{M-1}(z_1, \dots, z_s) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Матрица $\mathbf{Y}^{(i)}(z_1, \dots, z_s)$ имеет размер $(s \times L)$, блочная матрица $\mathbf{Y}_i(z_1, \dots, z_s)$ имеет размер $((M - i)s \times LM)$ и $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$ соответственно $(Ks \times LM)$.

Определим вектор

$$\mathbf{h}^T = (h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, \dots, h_0^{(M)}, \dots, h_{L-1}^{(M)}),$$

тогда (4) можно записать в виде:

$$\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)\mathbf{h} = 0. \quad (13)$$

Для однозначной идентификации необходимо и достаточно, что бы для любых различных чисел z_1, \dots, z_s ранг матрицы $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$ был равен $(ML - 1)$. Пусть $\mathbf{H}^{(i)}$ - тёплицева матрица, и пусть:

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \mathbf{H}^{(i+1)} & -\mathbf{H}^{(i)} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{H}^{(M)} & 0 & \dots & -\mathbf{H}^{(i)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^{(i)} = \begin{pmatrix} h_0^{(i)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}^{(i)} & & h_0^{(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{L-1}^{(i)} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тогда

$$\mathbf{Y}_i(z_1, \dots, z_s) = \mathbf{X}_i \mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(z_1, \dots, z_s) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{X}(z_1, \dots, z_s) \end{pmatrix} \mathbf{H}_i, \quad (15)$$

$$\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s) = \mathbf{X}_\Sigma \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{X}_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{M-1} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Так как при выполнении 2-го и 3-го условий теоремы матрица информационной последовательности \mathbf{X}_Σ имеет ранг

$$\text{rank}(\mathbf{X}_\Sigma) = \min\{sK, (2L - 1)K\}.$$

Тогда в соответствии с неравенством Фробениуса и неравенством $sK \geq LM$ $\text{rank}(\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)) \geq \text{rank}(\mathbf{H})$. Очевидно, что $\text{rank}(\mathbf{H}) < ML$, поскольку легко проверить равенство $\mathbf{H}\mathbf{h} = 0$ где $\mathbf{h} \neq 0$.

Покажем, что при выполнении условия

1) $\text{rank}(\mathbf{H}) = (ML - 1)$. Введем новые переменные $\mathbf{v}^T = (v_0^{(1)}, \dots, v_{L-1}^{(1)}, \dots, v_0^{(K)}, \dots, v_{L-1}^{(K)})$, так что имеют место следующие уравнения:

$$\begin{cases} v_0^{(1)} = \hat{h}_0^{(1)}, \dots, v_{L-1}^{(1)} = \hat{h}_{L-1}^{(1)}, \\ v_0^{(3)} = \hat{h}_0^{(1)}, \dots, v_{L-1}^{(3)} = \hat{h}_{L-1}^{(1)}, \\ \dots \\ v_0^{(K-2)} = \hat{h}_0^{(M)}, \dots, v_{L-1}^{(K-2)} = \hat{h}_{L-1}^{(M)}, \\ v_0^{(K)} = \hat{h}_0^{(M)}, \dots, v_{L-1}^{(K)} = \hat{h}_{L-1}^{(M)}. \end{cases} \quad (17)$$

Тогда уравнение $\mathbf{H}\hat{\mathbf{h}} = 0$ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\mathbf{H}'\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{2,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{H}_{M,M-1} \\ \mathbf{I}_{2L} & \dots & \mathbf{I}_{2L} \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (18)$$

где \mathbf{I}_{2L} - единичная $2L \times 2L$ матрица. Условие $\text{rank}(\mathbf{H}) = (ML - 1)$ эквивалентно условию $\text{rank}(\mathbf{H}') = (K(2L) - 1)$. Проведя элементарные преобразования по аналогии с (6) легко убедиться в справедливости последнего утверждения, для чего необходимо и достаточно выполнение условия 1). Теорема доказана.

Данная теорема (впервые сформулированная в [2, 3]) играет ключевую роль в задачах слепой детерминированной идентификации векторных каналов. В данной работе мы приводим несколько модифицированное доказательство этой теоремы в необходимой нам полиномиальной интерпретации.

Алгоритм нулевого подпространства

Рассмотрим задачу построения алгоритма слепой идентификации векторного канала. Алгоритмы слепой идентификации, рассматриваемые в данном разделе, основаны на свойстве взаимной симметрии выходных сигналов каналов, на входе которых присутствует одна и та же информационная последовательность. Данное свойство было использовано нами выше в доказательстве теоремы при записи выражения (3).

В соответствии с этим свойством матричное уравнение (13) в отсутствие шума имеет единственное, с точностью до комплексного множителя, решение для любых различных чисел z_1, \dots, z_s . Другими словами нуль-пространство $K_S \times LM$ матрицы $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$ является линейной оболочкой единственного базисного вектора $\mathbf{h}^T = (h_0^{(1)}, \dots, h_{L-1}^{(1)}, \dots, h_0^{(M)}, \dots, h_{L-1}^{(M)})$ или, что эквивалентно, \mathbf{h} является собственным векто-

ром матрицы $\mathbf{Y}^*(z_1, \dots, z_s)\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$, соответствующим нулевому собственному числу.

Наличие шума заставляет нас искать приближенное решение, наилучшее с точки зрения некоторого критерия качества. Идентифицируемая система в этом случае описывается следующим выражением:

$$y_l^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i^{(k)} x_{i+l}(z) + v_l^{(k)}(z), \quad (19)$$

где $v_l^{(k)}(z)$ полином степени $(t - 1)$ над полем комплексных чисел, образованный блоком из t отсчетов на выходе k -го канала. Для небольших значений уровня шума весьма эффективным оказывается метод наименьших квадратов, в соответствии с которым [4]:

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \min_{\|\mathbf{h}\|_2=1} \|\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)\mathbf{h}\|_2^2, \quad (20)$$

где $\|\bullet\|_2^2$ - евклидова векторная норма.

Эквивалентно, оценка канала \mathbf{h} может быть получена из собственного вектора, связанного с наименьшим сингулярным значением матрицы $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_s)$ [5].

Метод слепой идентификации, описываемый выражением (20) в несколько иной форме хорошо известен в литературе как "метод взаимных отношений" [6, 7]. Метод был впервые предложен в [8], а также независимо рядом других авторов (см. библиографию в [10]).

В отличие от большинства известных статистических методов слепой идентификации [6, 7], метод взаимных отношений является весьма эффективным для небольших выборок при большом отношении сигнал-шум. В [8] методом моделирования показано, что данный метод дает оценку близкую к границе Рао-Крамера. Использование полиномиального представления позволит нам несколько упростить вычислительную структуру алгоритма взаимных отношений и получить аналитическое решение задачи слепой идентификации в данном случае. Для этого запишем (3) в виде:

$$\sum_{l=0}^{L-1} y_l(z, s_1) h_l(s_2) - \sum_{l=0}^{L-1} y_l(z, s_2) h_l(s_1) = 0, \quad (21)$$

$$y_l(z, s) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{t-1} y_{j+l}^i z^j s^i, \quad h_l(s) = \sum_{i=0}^{M-1} h_l^i s^i.$$

Выберем $2L-1$ различных значений формальной переменной z_1, \dots, z_{2L-1} . Тогда используя (21) мы можем записать $2L-1$ однородных линейных уравнений относительно L неизвестных полиномов $h_0(s), \dots, h_{L-1}(s)$. В матричной форме, получим:

$$\mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2) \mathbf{h}(s_1, s_2) = \begin{pmatrix} y_0(z_1, s_2) & \dots & y_{L-1}(z_1, s_2) & -y_0(z_1, s_1) & \dots & -y_{L-1}(z_1, s_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_0(z_{2L-1}, s_2) & \dots & y_{L-1}(z_{2L-1}, s_2) & -y_0(z_{2L-1}, s_1) & \dots & -y_{L-1}(z_{2L-1}, s_1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_0(s_1) \\ \vdots \\ h_{L-1}(s_1) \\ h_0(s_2) \\ \vdots \\ h_{L-1}(s_2) \end{pmatrix} = 0 \quad (22)$$

При выполнении условий теоремы матрица $\mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$ имеет ранг $2L-1$:

$$\mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2) = \begin{pmatrix} x_0(z_1) & \dots & x_{2L-2}(z_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_0(z_{2L-1}) & \dots & x_{2L-2}(z_{2L-1}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_0(s_2) & \dots & 0 & h_0(s_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1}(s_2) & & h_0(s_2) & h_{L-1}(s_1) & & h_0(s_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_{L-1}(s_2) & 0 & \dots & h_{L-1}(s_1) \end{pmatrix} = \mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L-1}) \mathbf{H}(s_1, s_2) \quad (23)$$

Ранее при доказательстве теоремы мы показали, что ранг $(2L-1 \times 2L-1)$ матрицы $\mathbf{X}(z_1, \dots, z_{2L-1})$ для любых различных z_1, \dots, z_{2L-1} равен $(2L-1)$. Легко заметить также по аналогии с (6), что ранг $(2L-1 \times 2L)$ матрицы $\mathbf{H}(s_1, s_2)$ также равен $(2L-1)$ если полиномы $h(z, s_1)$ и $h(z, s_2)$, где

$$h(z, s) = \sum_{l=0}^{M-1} h_l(z) s^l, \text{ не имеют общих корней}$$

для различных s_1 и s_2 . Это условие эквивалентно условию 1) теоремы об условиях идентифицируемости.

В отсутствии шума легко получить явное решение однородной системы уравнений (22). Так как, по условию теоремы, матрица $\mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$ имеет ранг $2L-1$, то хотя бы один из ее миноров порядка $2L-1$ $\mathbf{M}_l(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2)$ $l=1, \dots, 2L$ - номер столбца, отличен от нуля, тогда решение системы уравнений (22) с точностью до произвольного комплексного коэффициента будет иметь вид:

$$\begin{aligned} h_l(s_1) &= (-1)^l \mathbf{M}_l(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2), \\ h_l(s_2) &= (-1)^{L+l} \mathbf{M}_{L+l}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2), \\ l &= 0, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим также, что нам нужно вычислить только L миноров, т.к. из анализа структуры матрицы (22) следует, что:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{2L-l}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2) &= \\ &= (-1)^l \mathbf{M}_l(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_2, s_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, мы нашли значения неизвестных полиномов $h_0(s), \dots, h_{L-1}(s)$ в точках s_1 и s_2 . Если $M=2$ этого достаточно для оценки всех коэффициентов неизвестного векторного канала. Для того, чтобы найти решение системы для произвольного числа каналов, мы должны выполнить вычисления (24) в кольце $C[s_1, s_2]$. Поскольку решение системы (22) по формулам (24) не содержит операции деления, то мы получим решение с точностью до некоторого полинома $g(s_1, s_2) \in C[s_1, s_2]$. Поскольку полиномы $h_l(s_1)$ и $h_l(s_2)$ очевидно не имеют общих множителей, то неизвестный множитель $g(s_1, s_2)$ мы можем найти как наибольший общий делитель полиномов

$$\mathbf{M}_l(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2) \text{ и}$$

$$\mathbf{M}_{L+l}(z_1, \dots, z_{2L-1}, s_1, s_2),$$

используя, например алгоритм Евклида. Конечно, такой алгоритм не имеет практического значения из-за больших вычислительных затрат.

Альтернативный путь состоит в формировании системы линейных уравнений для M значений полиномов канала $h_l(s_1), \dots, h_l(s_M)$. Запишем неизвестные значения в виде вектора

$$\mathbf{h}(s_1, \dots, s_M) = (h_0(s_1), \dots, h_{L-1}(s_1), \dots, h_0(s_M), \dots, h_{L-1}(s_M))^T.$$

Тогда система линейных уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) \mathbf{h}(s_1, \dots, s_M) = \\ & = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_r, s_1, s_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{Y}_1(z_1, \dots, z_r, s_{M-1}, s_M) \end{pmatrix} \times \\ & \times \mathbf{h}(s_1, \dots, s_M) = 0 \end{aligned}, \quad (26)$$

где $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)$ $(M-1)r \times LM$ комплексная матрица ранга $(ML-1)$, r как и ранее, выбирается из условия $(M-1)r \geq ML-1$. Общее решение для коэффициентов канала может быть найдено далее по интерполяционной формуле Лагранжа.

Таким образом, в отсутствии шума алгоритм слепой идентификации канала сводится к вычислению базиса нуль-пространства матрицы $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)$. Условия теоремы обеспечивают единственность решения этой задачи, т.е. наличие единственного нулевого собственного числа и соответствующего ему единственного собственного вектора с точностью до комплексной константы, за счет строгого равенства

$$\text{rank}(\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)) = ML - 1.$$

Данный алгоритм далее будем называть алгоритмом нулевого подпространства (АНП).

Наличие аддитивного шума в матрице входных данных

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) = \\ & = \mathbf{Y}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) + \mathbf{V}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) \end{aligned}$$

создает условия, когда

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M))$$

может быть равен ML или может быть меньше $(LM-1)$. В первом случае нуль-пространство матрицы состоит только из нулевого вектора, а во втором содержит несколько базисных векторов. Поэтому задача слепой идентификации может вообще не иметь решения или решение задачи становится неоднозначным.

Как уже отмечалось выше, в этом случае мы можем использовать стратегию метода наименьших квадратов, т.е. в качестве решения задачи для случая

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)) = ML$$

взять собственный вектор, соответствующий минимальному по модулю собственному числу матрицы

$$\tilde{\mathbf{Y}}^*(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) \tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M).$$

В этом случае решение задачи всегда единственно и, как известно [9], минимизирует функционал

$$\left\| \tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M) \hat{\mathbf{h}}(s_1, \dots, s_M) \right\|_2^2$$

при ограничении нормы

$$\left\| \hat{\mathbf{h}}(s_1, \dots, s_M) \right\|_2^2 = 1.$$

Поскольку выбор числа уравнений и соответственно числа строк в матрице $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)$ в отличие от традиционного подхода [10] в нашей интерпретации произволен, то мы можем выбрать их число строго равным $(LM-1)$. Тогда

$$\text{rank}(\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_r, s_1, \dots, s_M)) \leq ML - 1$$

теперь уже за счет линейной независимости строк. При этом, поскольку

$$r = (LM-1)/(M-1)$$

целое только в частных случаях, то мы выбираем r как наименьшее целое, а r' так, что $(M-2)r + r' = LM-1$. Тогда:

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_1(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, s_2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\mathbf{Y}}_1(z_1, \dots, z_{r'}, s_{M-1}, s_M) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Теперь мы можем решать задачу слепой идентификации векторного канала при наличии шума используя алгоритмы точного решения однородной системы уравнений.

При этом, поскольку нуль-пространства матриц $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M)$ и

$$\tilde{\mathbf{Y}}^*(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M) \tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M)$$

совпадают, то решение, получаемое, например, по формулам (24) и решение вариационной задачи (20) совпадают с точностью до комплексного множителя, и являются нормальным псевдорешением однородной системы уравнений (26). Т.е. мы показали эквивалентность оценки АНП и оценки, полученной в рамках метода наименьших квадратов.

Несмотря на то, что формулы (24) дают явное решение, непосредственное их использование для нахождения численного решения однородной системы, задаваемой матрицей (27) нецелесообразно даже при сравнительно небольших размерах матрицы, поскольку требует вычисления $(LM - 1)$ определителей размера $(LM - 1)$. Поэтому более целесообразно использование алгоритмов, имеющих меньшие вычислительные затраты.

Одним из таких методов может быть несколько модифицированный метод Перселла [9]. В рамках данного подхода мы интерпретируем систему однородных уравнений с матрицей (26) как условия ортогональности вектора $\mathbf{h}(s_1, \dots, s_M)$ с $(LM - 1)$ линейно независимыми строками матрицы (26). При этом решение системы находится путем построения базисов подпространств унитарного линейного пространства C^{LM} убывающих размерностей:

$$C^{LM} = R_0 \supset R_1 \dots \supset R_k \supset \dots \supset R_{LM-1}, \quad (28)$$

где R_k - подпространство, состоящее из век-

торов, ортогональных к первым k строкам $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ матрицы $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M)$. Базис подпространства R_k строится из базиса подпространства R_{k-1} в виде следующих линейных комбинаций:

$$\mathbf{e}_i^k = \mathbf{e}_i^{k-1} - c_i^k \mathbf{e}_k^{k-1}, \quad i = k + 1, \dots, LM. \quad (29)$$

Коэффициенты c_i^k определяются из условия ортогональности строк матрицы $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M)$ и вектора решения, в виде:

$$c_i^k = \frac{(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_i^{k-1})}{(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_k^{k-1})}. \quad (30)$$

Для реализуемости процесса необходимо, чтобы скалярные произведения $(\mathbf{y}_k, \mathbf{e}_k^{k-1})$ были отличными от нуля. Если $k = 0$, то в качестве базиса берется естественный базис в C^{LM} : $\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_{LM}^0 = (0, \dots, 0, 1)$.

Подпространство R_{LM-1} является нуль-пространством матрицы

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M),$$

так как единственный базисный вектор этого подпространства ортогонален ко всем линейно независимым векторам $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{LM-1}$ и является численным решением системы однородных уравнений, заданных матрицей (27).

Таким образом, мы получили итерационную модификацию АНП, которая, конечно с точки зрения погрешности, эквивалентна АНП в аналитической форме, но требует меньших вычислительных затрат.

Теперь рассмотрим вопрос о выборе значений формальных переменных

$$z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M$$

при формировании системы уравнений (26). Ранее мы требовали, чтобы эти множества не содержали совпадающих значений. Если матрица $\tilde{\mathbf{Y}}(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M)$ содержит отсчеты аддитивного шума, то выбор значений формальных переменных будет влиять на обус-

ловленность матрицы и соответственно на погрешность алгоритма. Поэтому мы должны выбрать различные значения формальных переменных $z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M$ так, чтобы минимизировать в некотором унитарном пространстве переменных $z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M$ функционал погрешности алгоритма слепой идентификации.

Относительную погрешность слепой оценки можно оценить следующим неравенством:

$$\gamma^2 \leq 4(LM - 1) \frac{\alpha_1^2(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M) \alpha_2^2(s_1, \dots, s_M)}{q^2(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M)}, \quad (31)$$

где $\alpha_2^2(s_1, \dots, s_M)$ - число обусловленности невырожденной матрицы Вандермонда $\mathbf{V}_M^M(s_1, \dots, s_M)$, число обусловленности матрицы $\mathbf{Y}(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M)$ ранга $(LM - 1)$ по отношению к собственному вектору, соответствующему нулевому собственному числу, параметр $q^2(z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M)$ имеет смысл отношения сигнал-шум. Выбор значений формальных переменных

$$s_i = \exp(-j2\pi i/M), \quad i = 1, \dots, M, \quad \text{и}$$

$$z_i = \exp(-j2\pi i/r'), \quad i = 0, \dots, t - 1$$

при выполнении условия $t = r' = r$ обеспечивают минимальное значение относительной погрешности оценки канала, при $t = r' \neq r$ данный выбор обеспечивает решение близкое к оптимальному при одинаковой дисперсии белого гауссовского шума в подканалах. В целом, при наличии сосредоточенных помех, различия параметров аддитивного шума в разных подканалах, корреляции отсчетов шума, выбор сечений $z_1, \dots, z_{r'}, s_1, \dots, s_M$ должен проводиться минимизацией функционала в правой части (31).

На рис. 1 показаны результаты математического моделирования АНП при различных длинах канала в сравнении со стандартным алгоритмом взаимных отношений (ВО) [10]. Относительная погрешность оценки канала оценивалась по формуле:

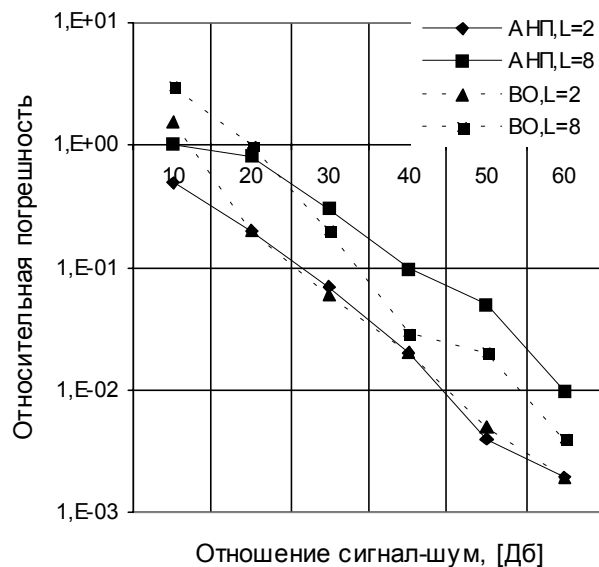


Рис.1. Относительная погрешность АНП, при $M=3$

$$\gamma^2 = \mathbf{M} \left\{ \frac{\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}\|_2^2}{\|\mathbf{h}\|_2^2} \right\}. \quad (32)$$

При моделировании в качестве входных отсчетов, отсчетов шума и отсчетов векторного канала дискретной модели использовались независимые реализации гауссовых случайных векторов в свою очередь с независимыми компонентами. При вычислении выборочного математического ожидания в формуле (32) при моделировании усреднялись как реализации шума, так и отсчеты информационной последовательности и канала.

Приемлемый уровень погрешности достигается при отношении сигнал-шум более 30Дб. При увеличении длины канала погрешность растет линейно, однако при увеличении числа каналов для больших отношений сигнал-шум длина канала практически не влияет на величину погрешности.

Заключение

Полиномиальная интерпретация метода взаимных отношений позволяет использовать для решения вариационной задачи метода минимальных квадратов алгоритмы решения системы однородных уравнений. Полученный в рамках данного подхода алгоритм АНП слепой идентификации векторного канала эквивалентен оценке, полученной в рамках метода наименьших квадратов, и допускает аналитическую и итерационную формы пред-

ставления решения. АНП при больших значениях сигнал-шум практически совпадает с классическим алгоритмом ВО, однако в отличие от АНП алгоритм ВО имеют более резкий рост погрешности при малых отношениях сигнал-шум.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.
2. Xu G., Liu H., Tong L., Kailath T. A least-squares approach to blind channel identification. – IEEE Trans. Signal Processing. 1995. Vol. SP43. №12.
3. Hua Y., Vax M. Strict identifiability of multiple FIR channels driven by an unknown arbitrary sequence // IEEE Trans. Signal Processing. 1996. Vol.44. №3.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
6. Горячкин О.В. Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи. М.: Радио и связь, 2003.
7. Горячкин О.В., Добрынин С.С. Слепая идентификация систем связи: обзор методов // Инфокоммуникационные технологии. 2003. №3.
8. Hua Y. Fast maximum likelihood for blind identification of blind identification of multiple FIR channels // IEEE Transactions on Signal Processing. Mar. 1996. Vol.44.
9. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2002.
10. Tong L., Perreau S. Blind Channel Estimation: From Subspace to Maximum Likelihood Methods // IEEE Proceedings. 1998. Vol.86. №10.

BLIND PROCESSING OF VECTORIAL SIGNALS IN POLYNOMIAL INTERPRETATION

© 2003 O.V. Goriachkin

Volga State Academy of Telecommunication and Informatics, Samara

In paper the problem of blind identification SIMO channels are discussed. The new proof of basis theorem of blind identification in polynomial interpretation is demonstrated. On the base of cross-correlation method the new algorithm are proposed. This algorithm gives the closed form solution of SIMO blind identification problem. The performances of noise stability of the algorithm are showed.