УДК 535.42

МЕЗООПТИКА И КОЛЬЦЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

© 2004 В.В. Котляр[1], А.А. Ковалев[2]

[1] Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара
[2] Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассмотрены интегральные преобразования, описывающие идеальные изображающие оптические системы с кольцевым импульсным откликом. В частности, рассмотрено интегральное преобразование, названное кольцевым преобразованием Радона (КПР), как среднее по всем окружностям фиксированного радиуса на плоскости. КПР может быть оптически выполнено Фурье-коррелятором с амплитудным фильтром, имеющим функцию комплексного пропускания, пропорциональную функции Бесселя нулевого порядка. Получена формула для обратного преобразования. Показано, что для однозначного восстановления функции двух переменных должны быть известны функции усреднения по всем окружностям, имеющим, как минимум, два разных радиуса. Приведено сравнение КПР и преобразования мезооптики, которое оптически может быть реализовано Фурье-коррелятором с аксиконом в пространственно-частотной плоскости. Показано, что обратное преобразование имеет такой же вид, как и прямое (с точностью до константы). Выполнено численное сравнение преобразования мезооптики и КПР, которые используются для восстановления преобразованных и искаженных изображений. Получена формула, связывающая дисперсии искажений выходных функций и восстановленной входной функции Фурье-коррелятора.

Введение

Аксикон [1] используют в оптике для создания узкого “бездифракционного” пучка [2, 3] или совместно со сферической линзой – для формирования узкого кольцевого распределения интенсивности света [4, 5]. Использовать аксикон для формирования изображений прямолинейных объектов для подсчета треков частиц в ядерных фотоэмульсиях было предложено в [6]. Раздел оптики, в котором изучаются изображающие оптические системы с кольцевым импульсным откликом, называется мезооптикой [7]. Базовая оптическая схема мезооптики – это Фурье-коррелятор, в пространственно-частотной плоскости которого расположен аксикон. Комплексные амплитуды света на входе и выходе Фурье-окррелятора с аксиконом связаны преобразованием мезооптики (ПМ), которое будет приведено ниже.

С другой стороны, известное преобразование Радона (ПР) широко применяется в обработке изображений, томографии, геодезии, медицине [8, 9, 10]. Преобразование Радона ставит в соответствие функции двух переменных средние значения этой функции на всевозможных прямых линиях, лежащих в плоскости. ПР не является сверткой и не может быть оптически выполнено с помощью Фурье-коррелятора, а выполняется с помощью сферической линзы и голограммы [11] или дифракционного оптического элемента [12, 13]. Известны формулы обращения для ПР [9], с помощью которых можно восстановить саму функцию по ее преобразованию Радона.

В [14] введено некоторое обобщение преобразования Радона – усреднение по сферам. Усреднение по сферам используется в радарах с синтезированной апертурой (SAR) и в аккустической навигации (SONAR – sound navigation and ranging). Для сферического преобразования Радона также известны формулы обращения [15, 16]. Связь между усреднением по сферам и обычным преобразованием Радона установлена в [17]. Для двумерного случая в [18, 19] получены формулы обращения усреднения по кривым, лежащим в плоскости, а в [20, 21] приведены теоремы о взаимно-однозначном соответствии между функцией двух переменных и всеми интегралами по окружностям, лежащими в плоскости. То есть в [20, 21] введено в рассмотрение кольцевое преобразование Радона (КПР). Заметим, что КПР можно определить разными способами, потому что усреднение по всем окружностям в плоскости является переопределенным, так как набор всех окружностей имеет размерность три, что больше размерности двумерного пространства. В [17] рассматривается кольцевое преобразование Радона как усреднение по всем окружностям, имеющим одну общую точку в центре координат, а в [21] КПР определено как среднее по окружностям разного радиуса, центры которых лежат на некоторой фиксированной окружности с центром в начале координат.

В данной работе рассматривается КПР как среднее по всем окружностям фиксированного радиуса на плоскости. В этом случае КПР можно представить как свертку с δ - функцией и оптически можно реализовать с помощью Фурье-коррелятора, в частотной плоскости которого расположен пространственный фильтр, пропускание которого пропорционально функции Бесселя нулевого порядка. В работе показано, что для однозначного восстановления функции двух переменных должны быть известны функции усреднения по всем окружностям, имеющим два разных радиуса. Другими словами, получена формула, с помощью которой можно восстановить функцию на входе Фурье-коррелятора, если известны функции на выходе Фурье-коррелятора при использовании двух пространственных фильтров, функции пропускания которых пропорциональны функции Бесселя нулевого порядка разных масштабов. В работе приведено сравнение преобразования мезооптики и КПР. Оба эти преобразования выполняются с помощью Фурье-коррелятора с кольцевым импульсным откликом. Отличие заключается в том, что используются разные пространственные фильтры: для ПМ – аксикон, для КПР – амплитудный фильтр, функция пропускания которого пропорциональна функции Бесселя нулевого порядка.

Кольцевое преобразование Радона

Преобразование Радона с усреднением по всем окружностям в плоскости является переопределенным, так как набор всех окружностей имеет размерность три, что больше размерности двумерного пространства

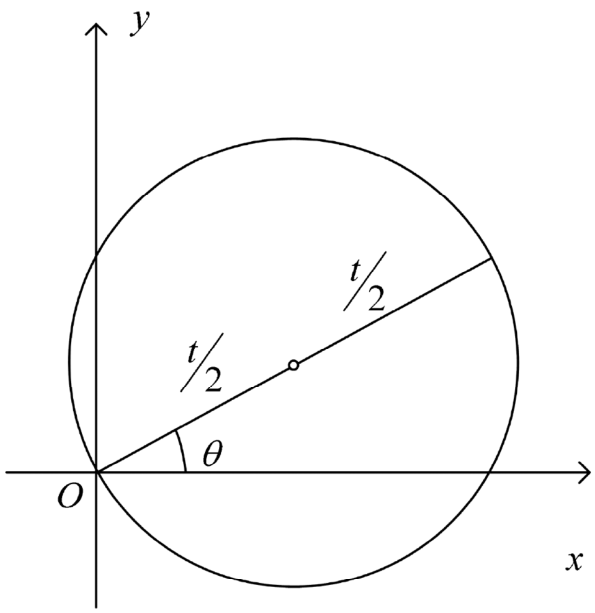


Рис. 1. Определение КПР согласно [17]

(плоскости). В [17] рассматривается определение КПР как усреднение по всем окружностям, имеющим одну общую точку:

$$\hat{f}(t,\theta)=\frac{t}{2}\int_{0}^{2\pi} f\left(t\cos(\phi-\theta),\phi\right)d\phi\,, \qquad (1)$$

где $f(r,\phi)$ - функция двух переменных в полярных (r,ϕ) координатах, t - диаметр окружности, проходящей через центр системы координат; центр самой окружности лежит на луче под углом θ к оси x и на расстоянии $t/2$ от центра системы координат (см. рис. 1).

В [21] дано другое определение КПР, согласно которому суммирование (усреднение) значений функции проводят по всем окружностям, центры которых лежат на окружности с радиусом t и центром в начале координат:

$$S_t\left(r,\theta\right)=r\times$$
$$\times\int_{0}^{2\pi} f\left(t\cos\theta+r\cos\varphi, t\sin\theta+r\sin\varphi\right)d\varphi\,, \qquad (2)$$

где r - радиус окружности, по которой проводится интегрирование и центр которой лежит на окружности с радиусом t на луче, составляющем угол θ с осью x (см. рис. 2).

В данной работе рассмотрено другое определение КПР, как усреднение по всем окружностям с фиксированным ра-

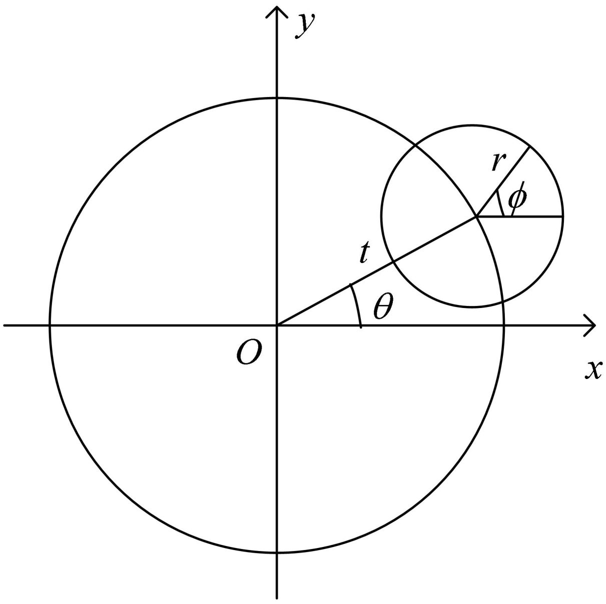


Рис. 2. Определение КПР согласно [21]

диусом γ :

$$R_\gamma(r,\theta)=\gamma\times$$

$$\times\int_0^{2\pi} f(\gamma\cos\varphi+r\cos\theta,\gamma\sin\varphi+r\sin\theta)\,d\varphi\,,\quad(3)$$

где (r,θ) - полярные координаты центра окружности с радиусом γ (см. рис. 3).

Уравнение (3) для КПР можно переписать в виде, похожем на обычное преобразование Радона с использованием обобщенной δ -функции Дирака:

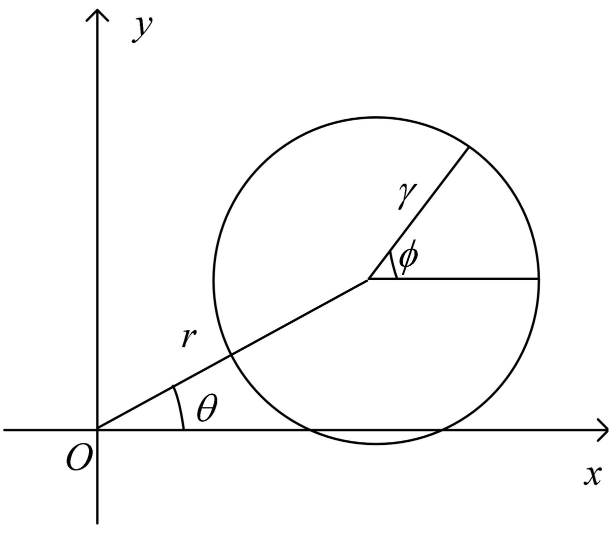


Рис. 3. Определение КПР, принятое в данной работе

$$R_\gamma(\xi,\eta)=\iint_{R^2} f(x,y)\times$$

$$\times\delta\left(\gamma-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)dxdy\,,\quad(4)$$

где (ξ,η) – декартовы координаты центра окружности радиуса γ . В правой части уравнения (4) имеется свертка двух функций, что позволяет представить КПР в виде обратного преобразования Фурье:

$$R_\gamma(\xi,\eta)=\frac{\gamma}{(2\pi)^2}\iint_{R^2} F(x,y)\times$$

$$\times J_0\left(\gamma\sqrt{x^2+y^2}\right)\exp\left[i(x\xi+y\eta)\right]dxdy\,,\quad(5)$$

где

$$F(x,y)=\iint_{R^2} f(\xi,\eta)\exp[-i(x\xi+y\eta)]d\xi d\eta\,,\quad(6)$$

$J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка первого рода. Из уравнения (5) видно, что КПР можно оптически реализовать с помощью Фурье-коррелятора с пространственным фильтром, функция пропускания которого равна (см. рис. 4):

$$H_\gamma(\xi,\eta)=2\pi\gamma\, J_0\left(\gamma\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right).\quad(7)$$

Из уравнения (5) для Фурье-образа КПР следует простое соотношение:

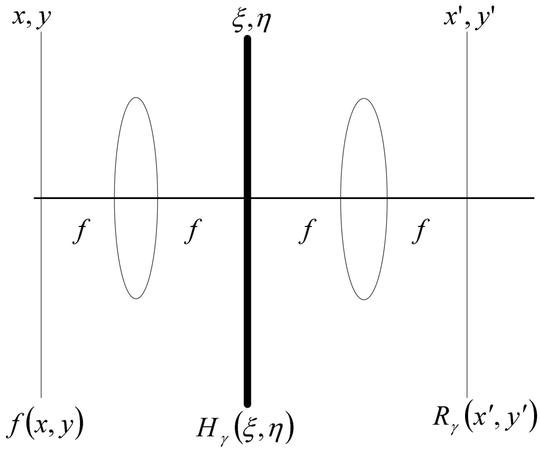


Рис. 4. Оптическая схема Фурье-коррелятора с пространственным фильтром (7) для выполнения КПР: f - фокусное расстояние сферических линз

$$\hat{R}_{\gamma}(\xi,\eta) = 2\pi\gamma \times \times F(\xi,\eta) J_0\left(\gamma\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right), \quad (8)$$

где

$$\hat{R}_{\gamma}(\xi,\eta) = \iint_{R^2} R_{\gamma}(x,y) \times \times \exp\left[-i(x\xi + y\eta)\right] dx\, dy. \quad (9)$$

На основе уравнения (8) можно получить формулу обращения КПР, применяя (8) дважды при разных значениях параметра $\gamma = \alpha$ и $\gamma = \beta$:

$$f(x,y) = = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{R^2} F(\xi,\eta) \exp[i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta, \quad (10)$$

где

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi} \times \times \left[\frac{\hat{R}_{\alpha}(\xi,\eta) J_0(\alpha\rho) + \hat{R}_{\beta}(\xi,\eta) J_0(\beta\rho)}{\alpha J_0^2(\alpha\rho) + \beta J_0^2(\beta\rho)}\right], \quad (11)$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

В знаменателе выражения (11) может быть нуль при условии, что $\alpha x = r_k$ и $\beta x = r_l$, где r_k и r_l - нули функции Бесселя: $J_0(r_k) = J_0(r_l) = 0$. С учетом асимптотической формулы для нулей функции Бесселя нулевого порядка $r_k \approx \left(k - 1/4\right)\pi$ получим приближенное условие для неравенства нулю знаменателя в уравнении (11):

$$\frac{\alpha}{\beta} \neq \frac{4k-1}{4l-1}; \qquad k,l = 1,2,3,... \quad (12)$$

Если на практике КПР регистрируется с ошибками или в присутствии аддитивного шума, то для повышения устойчивости восстановления функции $f(x,y)$ по $R_{\gamma}(\xi,\eta)$ следует использовать обобщение формулы обращения (11) на случай многих значений γ. Если γ - непрерывная величина из отрезка $[a,b]$, то вместо (11) можно получить следующую формулу обращения:

$$F(\xi,\eta) = \frac{\int_a^b \hat{R}_{\gamma}(\xi,\eta) J_0\left(\gamma\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) d\gamma}{2\pi \int_a^b J_0^2\left(\gamma\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) \gamma\, d\gamma}. \quad (13)$$

Заметим, что знаменатель в (13) отличен от нуля при любых ξ и η.

Оптически реализовать с помощью Фурье-коррелятора КПР для разных параметров γ_n, $n = \overline{1,N}$ можно с помощью пространственного фильтра с функцией пропускания:

$$H_N(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{N} C_n J_0\left(\gamma_n \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right), \quad (14)$$

где C_n - комплексные константы, подбором которых можно получить функцию (14) только фазовой: $|H_N(\xi,\eta)| = const$ [22].

Если функция на входе коррелятора $f(x,y)$ определена в круге радиуса $R: \sqrt{x^2+y^2} < R$, то при выборе $\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq 2R$ на выходе коррелятора КПР-образы для разных параметров γ_n будут пространственно разделены. При условии $\gamma > R$ КПР-образ функции $f(x,y)$ будет определен в кольце: $\gamma - R \leq \sqrt{\xi^2+\eta^2} \leq \gamma + R$.

Преобразование мезооптики

Преобразование мезооптики (ПМ) [7] выполняется с помощью Фурье-коррелятора (см. рис. 4), в котором в качестве пространственного фильтра используется аксикон с функцией пропускания:

$$H_{\gamma}(\xi,\eta) = \exp\left(-i\gamma\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right), \quad (15)$$

где γ - параметр аксикона, который связан с углом α при вершине конуса с показателем преломления n и с длиной волны света λ соотношением:

$$\gamma = \frac{2\pi(n-1)}{\lambda \operatorname{tg} \alpha/2}. \quad (16)$$

Связь между функцией $f(x,y)$ на входе и функцией $M_{\gamma}(\xi,\eta)$ на выходе Фурье-коррелятора с аксиконом будем называть ПМ [23]:

$$M_{\gamma}\left(\xi,\eta\right)=2\pi\gamma\times$$
$$\times\iint\limits_{R^2}\frac{f\left(x,y\right)}{\left[\gamma^2-\left(x-\xi\right)^2-\left(y-\eta\right)^2\right]^{3/2}}dxdy \quad (17)$$

Уравнение (17) получено в [23] на основе того, что обратное Фурье-преобразование от функции пропускания аксикона (15) имеет вид:

$$h\left(x,y\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\times$$
$$\times\iint\limits_{R^2}\exp\left[-i\gamma\sqrt{\xi^2+\eta^2}+i\left(x\xi+y\eta\right)\right]dx\,dy=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\gamma}{2\pi\left(\gamma^2-x^2-y^2\right)^{3/2}}, & \gamma>\sqrt{x^2+y^2},\\ \dfrac{i\,\gamma}{2\pi\left(x^2+y^2-\gamma^2\right)^{3/2}}, & \gamma<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases} \quad (18)$$

Из свертки (17) и из уравнения (18) следует простая связь между Фурье-образами входной $f(x,y)$ и выходной $M_\gamma(\xi,\eta)$ функциями:

$$\hat{M}_{\gamma}\left(\xi,\eta\right)=F\left(\xi,\eta\right)\exp\left(-i\gamma\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right), \quad (19)$$

где $F(\xi,\eta)$ - определена уравнением (6), а

$$\hat{M}_{\gamma}\left(\xi,\eta\right)=\iint\limits_{R^2}M_{\gamma}\left(x,y\right)\times$$
$$\times\exp\left[-i\left(x\xi+y\eta\right)\right]dxdy \quad . \quad (20)$$

Из уравнения (19) следует формула обращения ПМ:

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\iint\limits_{R^2}\hat{M}_{\gamma}\left(\xi,\eta\right)\ \exp\left(\mathrm{i}\gamma\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left[i\left(x\xi+y\eta\right)\right]d\xi\ d\eta \quad ,(21)$$

которая верна при любом параметре γ. Вместо уравнения (21) формулу обращения для ПМ можно записать в виде свертки:

$$f\left(x,y\right)=\frac{\gamma}{2\pi}\iint\limits_{R^2}\frac{M_{\gamma}\left(\xi,\eta\right)}{\left[\gamma^2\text{-}\left(\mathrm{x}\text{-}\xi\right)^2-\left(y-\eta\right)^2\right]^{3/2}}\,d\xi\,d\eta \ . \quad (22)$$

Сравнивая уравнения (17) и (22), можно заключить, что имеет место прямое и обратное ПМ, которое представляет собой свертку с функцией (18):

$$M_{\gamma}\left(\xi,\eta\right)=\left(2\pi\right)^2\iint\limits_{R^2}f\left(x,y\right)\,h\left(\xi\text{-}x,\eta\text{-}y\right)\,dx\,dy \quad ,(23)$$

$$f\left(x,y\right)=\iint\limits_{R^2}M_{\gamma}\left(\xi,\eta\right)\,h\left(x-\xi,y-\eta\right)\,d\xi\,d\eta \ . \quad (24)$$

Восстановление изображения на входе по изображению с шумом на выходе Фурье-коррелятора

Рассмотрим фурье-коррелятор с фильтром $H(\xi,\eta)$. Функции на входе $f(x,y)$ и выходе $g(x',y')$ коррелятора связаны следующим соотношением:

$$g=\Im^{-1}\left\{H\Im\left\{f\right\}\right\}, \quad (25)$$

где $\Im$ и $\Im^{-1}$ - прямое и обратное Фурье-преобразование.

Если существует точка (ξ,η), такая что $H(\xi,\eta)=0$, т.е. фильтр часть света не пропускает, то точное восстановление входной функции по ее образу невозможно. Однако, такое восстановление может быть выполнено в ряде случаев при использовании нескольких фильтров.

Пусть используется K фурье-корреляторов с фильтрами $H_1(\xi,\eta),...,H_K(\xi,\eta)$. Обозначим функции на выходе корреляторов через $g_1(x',y'),...,g_K(x',y')$. Выполняя преобразования Фурье для выходных функций, получим соотношения:

$$G_k=H_k\Im\{f\},\ k=\overline{1,K}\ , \quad (26)$$

где $G_1...G_K$ - фурье-образы выходных функций $g_1,...,g_K$.

Из (26) следует, что

$$G_kH_k^*=H_kH_k^*\Im\{f\},\ k=\overline{1,K}\ . \quad (27)$$

Тогда, суммируя уравнения в (27), получим, что восстановление входной функции можеть быть выполнено по следующей формуле:

$$f=\Im^{-1}\left\{\frac{G_1H_1^*+...+G_KH_K^*}{H_1H_1^*+...+H_KH_K^*}\right\}. \quad (28)$$

При этом необходимым условием является неравенство нулю знаменателя выражения (28). Для этого достаточно, чтобы все фильтры не имели общих нулей.

Пусть вместо выходных функций $g_1,\dots,g_K$ имеются искаженные функции $\hat{g}_1 = g_1 + n_1,\dots,\hat{g}_K = g_K + n_K$, где $n_1,\dots,n_K$ - различные реализации аддитивного шума. Тогда восстановленная входная функция будет также искажена:

$$\hat{f} = \Im^{-1}\left\{\frac{\hat{G}_1 H_1^* + \dots + \hat{G}_K H_K^*}{H_1 H_1^* + \dots + H_K H_K^*}\right\} =$$

$$= \Im^{-1}\left\{\frac{G_1 H_1^* + \dots + G_K H_K^*}{H_1 H_1^* + \dots + H_K H_K^*}\right\} +$$

$$+ \Im^{-1}\left\{\frac{N_1 H_1^* + \dots + N_K H_K^*}{H_1 H_1^* + \dots + H_K H_K^*}\right\} =$$

$$= f + \Im^{-1}\left\{\frac{N_1 H_1^* + \dots + N_K H_K^*}{H_1 H_1^* + \dots + H_K H_K^*}\right\} = f + \Delta f, \quad (29)$$

где $N_1,\dots,N_K$ - фурье-образы шумов $n_1,\dots,n_K$.

Пусть искажения выходных функций представляют аддитивный гауссовский шум, т.е. $n_1 \sim N(0,\sigma_1),\dots,n_K \sim N(0,\sigma_K)$. Тогда в соответствии с (29) дисперсия искажения восстановленной функции будет иметь следующий вид:

$$D\Delta f = \frac{1}{M^2}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{M-1}\frac{H_1 H_1^* \sigma_1^2 + \dots + H_K H_K^* \sigma_K^2}{\left(H_1 H_1^* + \dots + H_K H_K^*\right)^2}, \quad (30)$$

где $M \times M$ - число отсчетов изображения $f(x,y)$.

В выражении (30) предполагалось, что

$$\Im\{f\}(p,q) = $$
$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{M-1} f(m,n)\exp\left[-i\frac{2\pi}{M}(mp+nq)\right], \quad (31)$$

$$\Im^{-1}\{f\}(p,q) =$$
$$= \frac{1}{M^2}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{M-1} f(m,n)\exp\left[+i\frac{2\pi}{M}(mp+nq)\right]. \quad (32)$$

Т.е. дисперсии входных и выходных стационарных сигналов при выполнении преобразования Фурье связаны следующими соотношениями:

$$D\Im\{f\}(p,q) = M^2 Df, \quad (33)$$

$$D\Im^{-1}\{f\}(p,q) = \frac{1}{M^2} Df. \quad (34)$$

Если искажающие шумы $n_1,\dots,n_K$ обладают одинаковой дисперсией, т.е. $\sigma_1 = \dots = \sigma_K = \sigma$, то выражение (30) примет следующий вид:

$$D\Delta f = \frac{1}{M^2}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{M-1}\frac{H_1 H_1^* \sigma_1^2 + \dots + H_K H_K^* \sigma_K^2}{\left(H_1 H_1^* + \dots + H_K H_K^*\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{M^2}\sigma^2 \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{M-1}\frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\left|H_k(m,n)\right|^2}. \quad (35)$$

Из выражения (35) следуют выводы:

– для реализуемых фильтров (т.е. $0 \le H(m,n) \le 1$) искажение восстановленной функции будет минимальным, когда $H(m,n)H^*(m,n) \equiv 1$, т.е. фильтры должны быть фазовыми, при этом выбор фазового фильтра не влияет на величину ошибки восстановления;

– при добавлении любого фильтра к набору уже используемых дисперсия искажения убывает;

– дисперсия искажения восстановленной функции прямо пропорциональна дисперсии искажений функций, получаемых на выходе Фурье-коррелятора.

Численные результаты

Моделирование всех рассмотренных преобразований осуществлялось с помощью вычисления двух дискретных преобразований Фурье (прямого и обратного) и умножения на функцию пропускания фильтра:

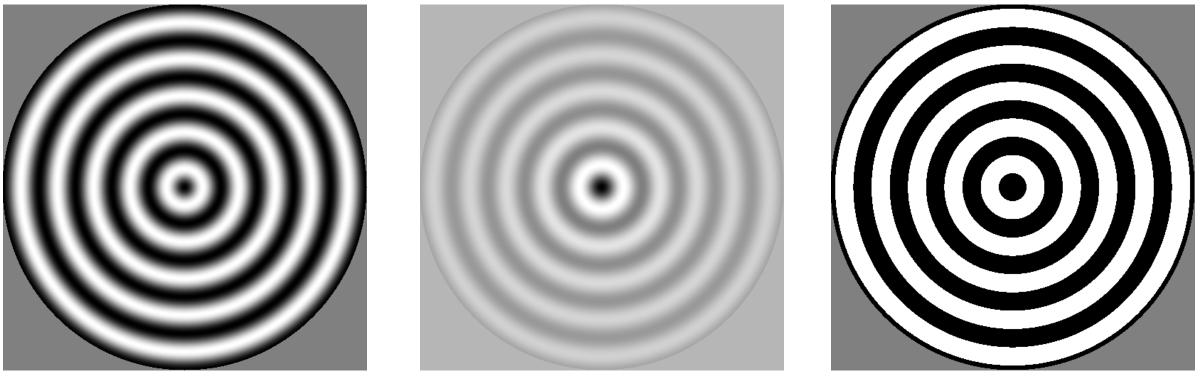
$$F(x',y') = \Im^{-1}\left[H \cdot \Im[f(x,y)]\right]. \quad (36)$$

В дискретном варианте преобразование Фурье вычисляется в виде двойной суммы (31), (32), а функция пропускания имела следующий вид (рис. 5):

– для кольцевого преобразования Радона:

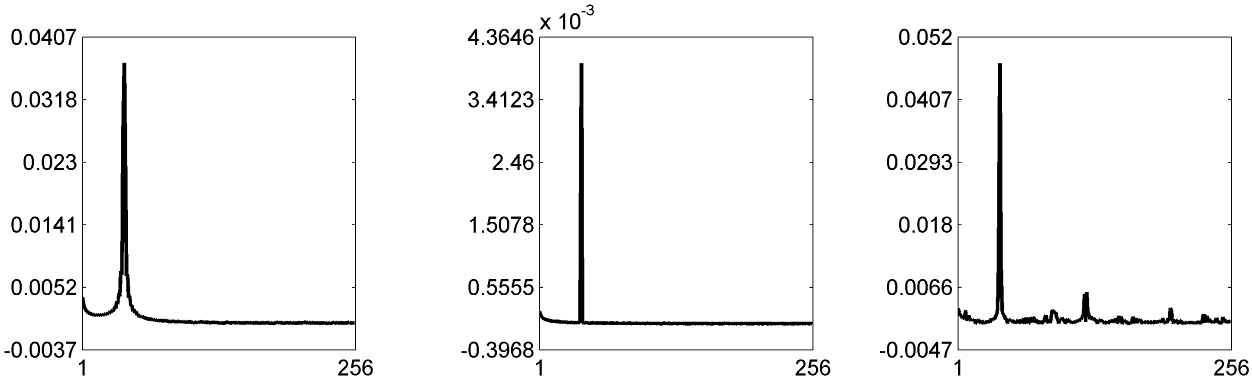
$$H_{mn} = J_0\left[\nu\gamma\sqrt{\left(m - N/2\right)^2 + \left(n - N/2\right)^2}\right]; \quad (37)$$

– для мезооптического преобразования:



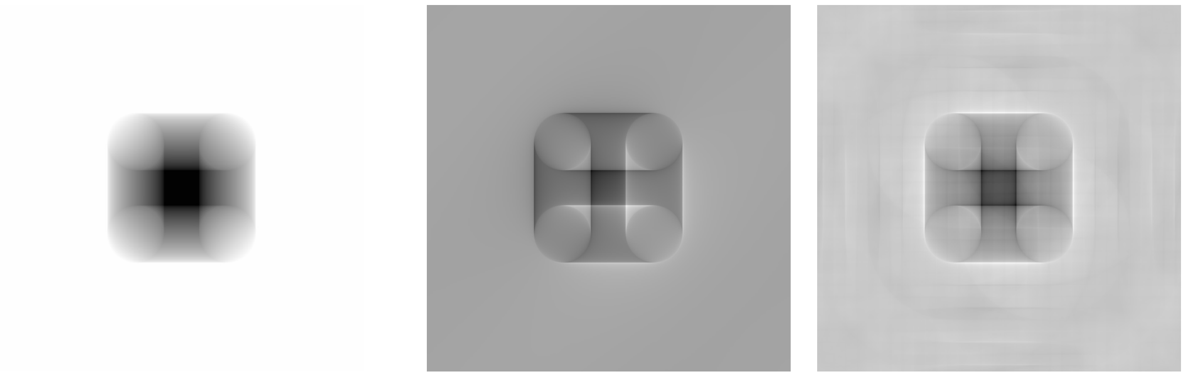
(a) (b) (c)

Рис. 5. Функции пропускания фильтров при $\gamma = 10$: реальная часть аксикона (a), модуль функции Бесселя (b), бинарная функция Бесселя (c)



(a) (b) (c)

Рис. 6. Модули Фурье-образов пространственных фильтров при $\gamma = 40$ для: аксикона (a), функции Бесселя (b), фазовой функции Бесселя (c)



(a) (b) (c)

Рис. 7. Результаты преобразований при $\gamma = 40$ (модуль амплитуды на выходе Фурье-коррелятора): КПР (a), МП (b), фазовое КПР (c)

$$H_{mn} = \exp\left[-i\nu\gamma\sqrt{\left(m-\frac{N}{2}\right)^2 + \left(n-\frac{N}{2}\right)^2}\right]; \quad (38)$$

– для фазового (бинарного) кольцевого преобразования Радона:

$$H_{mn} = \operatorname{sgn} J_0\left[\nu\gamma\sqrt{\left(m-\frac{N}{2}\right)^2 + \left(n-\frac{N}{2}\right)^2}\right]; \quad (39)$$

где ν - разрешение в частотной плоскости.

На рис. 6 показан импульсный отклик каждого преобразования.

Исследования проводились на тестовом изображении (512x512) прямоугольника размером 128x128 отсчетов. На выходе Фурье-коррелатора были получены следующие изображения (рис. 7).

При отсутствии шумов исходное изображение легко восстановить, применяя формулу для обратного распространения света, следующую из (36):

$$f(x,y) = \Im^{-1}\left[\frac{1}{H}\cdot\Im\left[F(x',y')\right]\right]. \qquad (40)$$

Проведенные эксперименты показали, что средний квадрат ошибки в этом случае имеет порядок 10^{-6}.

Далее была исследована возможность восстановления при наличии искажений функций на выходе Фурье-коррелятора. Для искажения использовался аддитивный белый шум с СКО 0.05 и 0.10 (5% и 10%).

При восстановлении исходной функции последовательно использовалось от 1 до 7 изображений, полученных на выходе Фурье-коррелятора. Профили квадрата модуля амплитуды для восстанавливаемого прямоугольника показаны на рис. 8, 9 и 10.

Из рис. 8 - 10 можно сделать следующие выводы.

При увеличении числа выходных изображений ошибка восстановления уменьшается обратно пропорционально их числу, как следует из уравнения (35). Графики зависимостей среднего квадрата ошибки восстановления от количества используемых выходных изображений приведены на рис. 11.

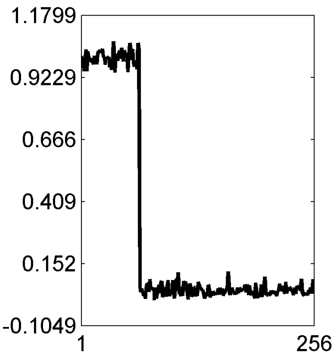
При использовании амплитудных фильтров ошибка восстановления на два порядка больше.

Кроме того, эксперименты показали, что дисперсия искажения восстановленной функции прямо пропорциональна дисперсии искажений функций, на выходе Фурье-коррелятора (см. рис. 11), что соответствует уравнению (35).

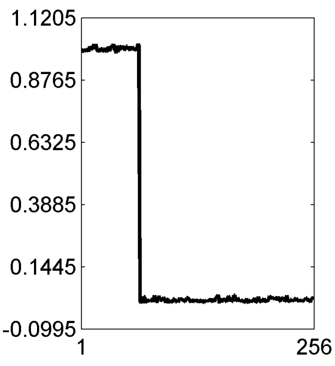
Заключение

В работе получены следующие результаты.

Рассмотрено кольцевое преобразование Радона как среднее по всем окружностям фиксированного радиуса на плоскости.

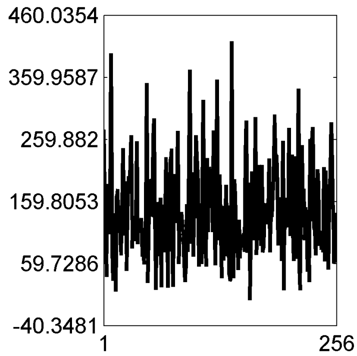


(a) $\gamma = 10$

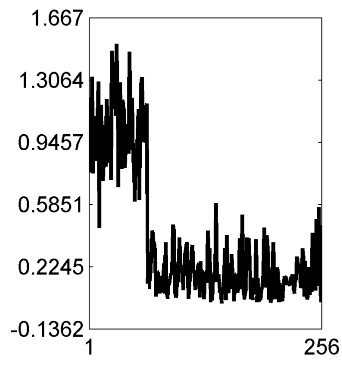


(b) $\gamma = 10,15,20,25,30,35,40$

Рис. 8. Профили интенсивности для восстанавливаемого прямоугольника (по данным ПМ)

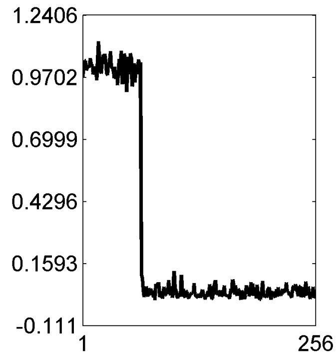


(a) $\gamma = 10$

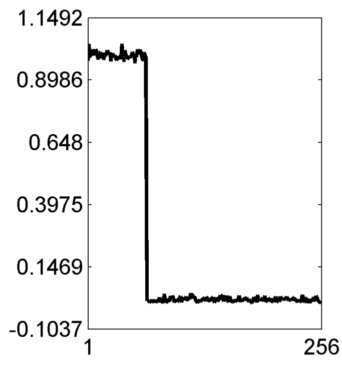


(b) $\gamma = 10,15,20,25,30,35,40$

Рис. 9. Профили интенсивности для восстанавливаемого прямоугольника (по данным КПР)



(a) $\gamma = 10$



(b) $\gamma = 10,15,20,25,30,35,40$

Рис. 10. Профили интенсивности для восстанавливаемого прямоугольника (по данным бинарного (фазового) КПР

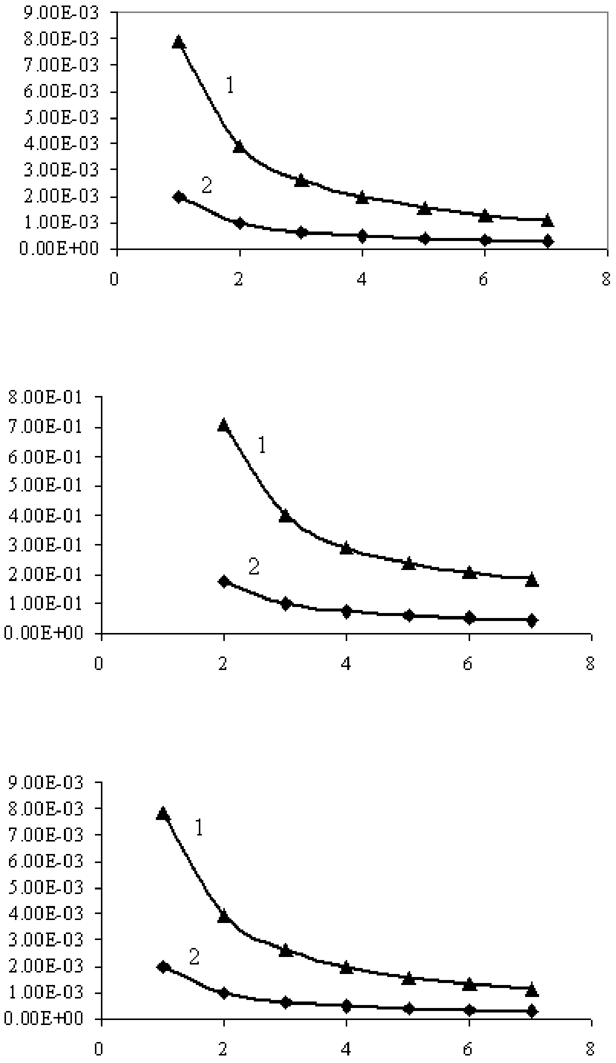


Рис. 11. Зависимости среднего кавдрата ошибки восстановления от количества используемых выходных изображений:
а – для ПМ; б – для КПР;
с – для бинарного (фазового) КПР
кривая1 – для дисперсии шума 10%;
кривая 2 – для дисперсии шума 5%

Показано, что для однозначного восстановления функции двух переменных должны быть известны функции усреднения по окружностям, имеющим, как минимум, два разных радиуса.

Для преобразования мезооптики показано, что прямое и обратное преобразования отличаются только константой.

Получена формула, связывающая дисперсии искажений выходных функций и восстановленной входной функции Фурье-коррелятора.

Численное моделирование показало, что ошибка восстановления изображения на входе Фурье-коррелятора по данным изображениям с шумом на выходе с использованием амплитудного фильтра (КПР) на два порядка больше, чем с использованием фазовых фильтров (ПМ).

Численное моделирование также показало, что ошибка восстановления для любых типов пространственных фильтров пропорциональна дисперсии шума на выходе Фурье-коррелятора и обратно пропорциональна числу используемых для восстановления фильтров, это также следует из уравнения (35).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке международного гранта CRDF REC-SA-O14-02 и президентского гранта РФ НШ-1007.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mc Leod J.U.* The axicon: a new type optical element // J. Opt.Coc. Am. 1954. V.44, №8.
2. *Tremblay R., D’Astours Y., Roy G., Bleansherd M.* Laser plasma-optically pumped by focusity with axicons a CO_2 – TEA laser beam in a high-pressure gas // Opt. Commun. 1979. V.28. №2.
3. *Michaltsova I.A., Nalivaiko V.I., Soldatenkov L.S.* Kinoform axicon // Optik. 1984. V. 67. №3.
4. *Belenger P. Rioux M.* Ring Pattern of a lens-axicon doublet illuminated by a Gaussian beam // Appl. Opt. 1978. V. 17. №7.
5. *Fedotovsky A., Lehovec H.* Optical filter design for annular imaging // Appl. Opt. 1974. V. 13. №12.
6. *Астахов А.Я., Комов Г.М., Сидоров В.И., Скрыль И.И., Сороко Л.М.* Конструкция Фурье-микроскопа для ядерной имульсии // Сообщение ОИЯИ. 1983. S
7. *Soroko L.M.* Mesooptics, Foundations and Application, World Scientifics, Singapore, 1996.
8. *Radon J.* Ueber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte laengs gewisser Mannigfaltigkeiten, Ber. Verh. Sachs. Aned. Wiss., V. 69. 1917.
9. *Deans S.R.* The Radon Transform and some of its Applications. New York, Willey Interscience, 1982.
10 *Rann A.G., Katsevich A.I.* The Radon Transform and Local Tomography, CRC

Press, Boca Raton, 1996.
11. *Ambs P., Lee S.H., Tain Q., Fainmann Y.* Optical implementation of the Hough transform by matrix of holograms // Appl. Opt. 1986. V. 25, № 22.
12. *Woodford P., Casasent D.* High-accuracy and fast new format optical Hough-transform // Opt. Mem. and Neur. Net. 1997. V. 1.
13. *Сойфер В.А., Котляр В.В., Скиданов Р.В.* Оптическое выполнение преобразования Хоу-Радона // Компьютерная оптика, 1997. Вып. 17.
14. *John F.* Plane wave and Spherical Means, New York, Willey and Sons, 1955.
15. *Fawcett J.A.* Inversion of N-dimensional spherical averages // SIAM J. Appl. Math. 1985. v. 45, p. 336 – 341.
16. *Anderson L.A.* On the determination of a function from spherical averages // SIAM J. Math. Anal. 1988. V. 19.S
17. *Yagle A.E.* Inversion of spherical means using inversion and Radon transforms // Inverse Problems. 1992. V. 8.
18. *Cormack A.M.* The Radon transform on a family of curves in the plane (I) // Proc. Am. Math. Soc. 1981. V. 83.
19. *Cormack A.M.* The Radon transform on a family of curves in the plane (II) // Proc. Am. Math. Soc. 1982. V. 86.
20. *Zalcman L.* Offbeat integral Geometry // Amer. Math. Monthly. 1980. V. 17.
21. *Quinto E.I.* Radon Transforms on curves in the plane // Lecture Notes in Appl. Math. 1994. V. 30.
22. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* Calculation of phase formers of non-diffracting images and a set of concentric rings // Optik. 1996. 102(2).
23. *Котляр В.В., Ковалев А.А.,* Уравнение для изображающей оптической системы с аксиконом // Автометрия. 2004. Т.40, №3.
24. *Chow Y.S., Teiher H.* Probability Theory, New York, Springer-Vorlag, 1978.

MESOOPTICS AND CIRCULAR RADON TRANSFORM

© 2004 V.V. Kotlyar [1], A.A. Kovalev [2]

[1] Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Sciences
[2] Samara State Aerospace University

We consider integral transforms that can describe ideal imaging optical systems with circular impulse response. The integral transform, referred to as the Circular Radon transform (CRT), is considered as an average taken along all circumferences of fixed radius on the plane. The CRT can be optically realized using a Fourier correlator with amplitude filter, with its transmittance being proportional to the Bessel function of zero order. The inversion formula for the CRT is given. It is shown that for the function of two variables to be reconstruction uniquely the averaging functions along all circumferences with at least two different radii need to be known. Also, a mesooptics transform is considered that can be optically realized using a Fourier correlator with axicon in the spatial-frequency plane. The inverse and direct mesooptics transforms are shown to be of the same form (up to a constant). Numerical comparison of the mesooptics transform and CRT has been drawn, both of which are used for reconstruction of transformed and distorted images. The relation between the distortion dispersions of the output functions and the Fourier correlator reconstructed input function is derived.