*УДК 621.372.542*

# АЛГОРИТМЫ СПЛАЙН – АППРОКСИМАЦИИ ДВУМЕРНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

© 2004 П.К. Ланге

Самарский государственный технический университет

Рассмотрена задача построения цифровых фильтров с параболической сплайн – аппроксимацией двумерных дискретизированных сигналов. Определены погрешности аппроксимации такими фильтрами двумерного Гауссового пика.

В настоящее время в практике аналитических измерений все более широко применяются комбинированные аналитические приборы (газовый хроматограф + масс-спектрометр, газовый хроматограф + ИК-Фурье спектрометр, жидкостный хроматограф + УФ спектрометр и т.д.). В состав таких приборов, кроме хроматографа, входит и спектроанализатор, определяющий спектр в дискретных точках хроматограммы.

Аналогичным образом организован и аналитический прибор, состоящий из дифференциального термического анализатора и спектроанализатора.

Выходной сигнал такого комбинированного прибора является двумерным, определенным относительно двух независимых переменных - например, времени и оптической длины волны. Спектрограмма, полученная с помощью комбинированного анализатора, является функцией двух переменных, определена в трехмерном пространстве и представляет собой совокупность двумерных аналитических пиков (рис.1).

В случае, когда комбинированный анализатор представляет собой хроматограф + УФ спектрометр, сечение такой спектрограммы рядом плоскостей, параллельных плоскости xOz, т.е плоскости рисунка, представляет собой ряд хроматограмм, снятых при разных длинах оптического спектра.

Аналогично этому сечение рядом плоскостей, перпендикулярных плоскости рисунка, представляет собой ряд оптических спектров, снятых в ряде точек хроматограммы, то есть в разные моменты времени.

При преобразовании и обработке как одномерных, так и двумерных аналитических сигналов с целью их сжатия и определения информационных параметров актуальными являются задачи аппроксимации дискретных аналитических данных.

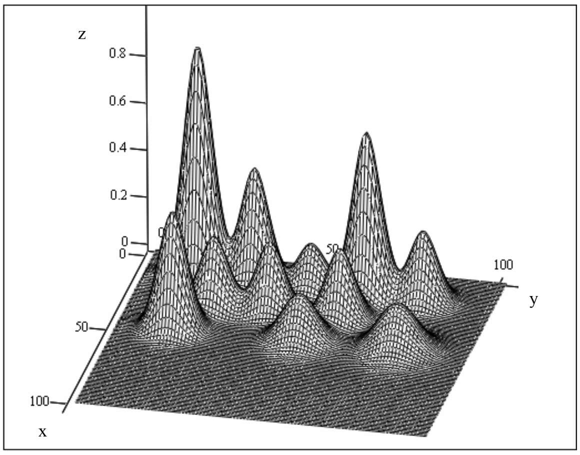


**Рис. 1.** Двумерная спектрограмма: ось x – время, ось y – длина волны спектра, z – значение аналитического сигнала

Рассмотрим аппроксимацию двумерных аналитических данных двумерными сплайнами на основе методов цифровой фильтрации.

В общем случае двумерный параболический сплайн на участке дискретизации ($x_n$, $y_n$, $x_{n+1}$, $y_{n+1}$) определяется двумерной параболой

$$f_n(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{22}y^2 + 2a_{24}y + 2a_{12}xy + a_{44} \quad (1)$$

Задача определения коэффициентов $a_{ij}$ в выражении (1) существенно упрощается, если в качестве аппроксимирующей функции применить выражение, все члены которого зависят только от какой – либо одной переменной.

В этом смысле рассмотрим возможность использования “усеченной” двумерной параболы (1), положив $a_{12} = 0$. Такая парабола описывается выражением

$$f_n(x,y) = \left(a_2x^2 + a_1x + a_0\right) + \left(b_2y^2 + b_1y + b_0\right) = f_a(x) + f_b(y) \tag{2}$$

Первая и вторая производные параболической функции (2) определяются выражениями

$$\begin{aligned} &\frac{df(x,y)}{dx} = 2a_2[n_1]x + a_1[n_1]; \\ &\frac{d^2f(x,y)}{dx^2} = 2a_2[n_1]; \\ &\frac{df(x,y)}{dy} = 2b_2[n_2]y + b_1[n_2]; \\ &\frac{d^2f(x,y)}{dy^2} = 2b_2[n_2]; \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $n_1$ определяет дискретизацию по параметру $x$, а $n_2$ - по параметру $y$.

При $x = 0$, $y = 0$ (на границах интервалов дискретизации) эти выражения принимают вид

$$\begin{aligned} &\left.\frac{df(x,y)}{dx}\right|_{x=0} = a_1[n_1]; \quad \left.\frac{d^2f(x,y)}{dx^2}\right|_{x=0} = 2a_2[n_1]; \\ &\left.\frac{df(x,y)}{dy}\right|_{y=0} = b_1[n_2]; \quad \left.\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}\right|_{y=0} = 2b_2[n_2]; \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть дискретные интервалы измеряются в относительных единицах:

$x_D = x[n_1+1] - x[n_1] = 1$, $y_D = y[n_2+1] - y[n_2] = 1$.

Тогда выполняются равенства

$$a_0[n_1+1] = f(x,y)\big|_{x=1}; \quad a_1[n_1+1] = \left.\frac{df(x,y)}{dx}\right|_{x=1};$$

$$b_0[n_2+1] = f(x,y)\big|_{y=1}; \quad b_1[n_2+1] = \left.\frac{df(x,y)}{dy}\right|_{y=1};$$

В связи с тем, что на границах дискретных интервалов параболическая сплайн - функция не должна иметь разрывов по нулевой и первой производным, из (3) и (4) с учетом последнего соотношения получим выражения

$$\begin{aligned} &a_0[n_1+1] = a_2[n_1] + a_1[n_1] + a_0[n_1]; \\ &a_1[n_1+1] = 2a_2[n_1] + a_1[n_1]; \\ &b_0[n_2+1] = b_2[n_2] + b_1[n_2] + b_0[n_2]; \\ &b_1[n_2+1] = 2b_2[n_2] + b_1[n_2]; \end{aligned} \tag{5}$$

Применив к системе (5) z – преобразование [1], получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_2[z_1] + a_1[z_1] + (1-z_1)a_0[z_1] = 0; \\ &2a_2[z_1] + (1-z_1)a_1[z_1] = 0; \\ &b_2[z_2] + b_1[z_2] + (1-z_2)b_0[z_2] = 0; \\ &2b_2[z_2] + (1-z_2)b_1[z_2] = 0; \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим возможность определения коэффициентов аппроксимирующих функций с использованием методов цифровой фильтрации.

Пусть передаточная функция цифрового фильтра, формирующего младшие коэффициенты $a_0[n_1]$, $b_0[n_2]$ двумерной параболы (2) на каждом участке дискретизации определяется выражением

$$F[n_1,n_2] = F_a[n_1] + F_b[n_2], \tag{7}$$

состоящим из суммы функций

$$F_a[n_1] = a_0[n_1] = \sum_{i=-m}^{m} A_i x[n_1+i],$$

$$F_b[n_2] = b_0[n_2] = \sum_{j=-m}^{m} B_j y[n_2+j],$$

Эти функции определены на нечетном числе ($2m$+1) дискретных значений сигнала.

Такой фильтр является разделимым [2], что в значительной степени упрощает его проектирование и позволяет для анализа фильтра привлечь методы проектирования одномерных цифровых фильтров.

Для оценки частотных свойств фильтра необходимо выполнить z – преобразование выражения (7).

Используя дискретное z – преобразование (7), получаем:

$$a_0[z_1] = F_a[z_1], \; b_0[z_2] = F_b[z_2].$$

Подставляя это уравнение в систему (6),

определяем систему

$$a_2[z_1]+a_1[z_1]=(z_1-1)F_a[z_1] \ ;$$
$$b_2[z_2]+b_1[z_2]=(z_2-1)F_b[z_2];$$
$$2a_2[z_1]+(1-z_1)a_1[z_1]=0 \ ;$$
$$2b_2[z_2]+(1-z_2)b_1[z_2]=0 \ ;$$

Коэффициенты $a$ , $b$ определяются решением этой системы:

$$a_1[z_1]=2\frac{z_1-1}{z_1+1} \ F_a[z_1] \ ; \ b_1=2\frac{z_2-1}{z_2+1} \ F_b[z_2] \ ;$$

$$a_2[z_2]=\frac{(z_1-1)^2}{z_1+1} \ F_a[z_1] \ ; \ b_2[z_2]=\frac{(z_2-1)^2}{z_2+1} \ F_b[z_2]. \tag{8}$$

Необходимо выбирать такую функцию $F[z]$, чтобы она без остатка делилась на двучлен $(z+1)$, иначе в противном случае появится фазовая погрешность фильтра [2].

Оценим качество аппроксимации гармонического сигнала (двумерной синусоиды) аппроксимирующим сплайн-фильтром [2]

$$f(x,y)=(\sin\omega x)\cdot(\sin\omega y). \tag{9}$$

В связи с тем, что аппроксимирующие фильтры позволяют определить значение сигнала для произвольного момента времени внутри интервалов дискретизации, выходной сигнал такого фильтра можно считать квазинепрерывным, и для определения его эффективности использовать методы оценки погрешности аппроксимации непрерывных функций.

При малой погрешности аппроксимации гармонического сигнала, что обычно имеет место на практике, выходной сигнал такого фильтра можно также считать близким к синусоидальному:

$$z(x,y)\approx A_X(\omega)\sin[\omega x-\varphi_X(\omega)]\times \times A_Y(\omega)\sin[\omega y-\varphi_Y(y)] \ , \tag{10}$$

где $A$, $\varphi$ - значения амплитудно – частотной характеристики (АЧХ) и фазо – частотной характеристики (ФЧХ) фильтра на частоте $\omega$.

Тогда значение средне - квадратичной погрешности аппроксимации определяется выражением

$$\Delta_a=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T\left[(\sin\omega x)(\sin\omega y)-z(x,y)\right]^2 dxdy, \tag{11}$$

где $T$ – период сигнала.

Используя замену переменных интегрирования в (11) с учетом соотношения

$$\omega=\frac{2\pi}{T},$$

окончательно получаем:

$$\Delta_a(\omega)=\frac{1}{4}-A_X^2(\omega)A_Y^2(\omega)(\cos\varphi_X)(\cos\varphi_Y)+\frac{1}{4} \ ; \tag{12}$$

Отсюда видно, что минимальное значение погрешности $\Delta_a$ достигается при минимальных значениях ФЧХ $(\varphi(\omega)\approx 0)$, а также при минимальном отличии АЧХ от единицы. При нулевых фазовых погрешностях выражение для средне-квадратичной погрешности аппроксимации принимает вид

$$\Delta_a(\omega)=\frac{\left[1-A_X(\omega)A_Y(\omega)\right]^2}{4} \ . \tag{13}$$

В связи с тем, что выходной сигнал цифрового фильтра представляет собой в данном случае дискретные значения гармонического сигнала (9), то выражение (13) может быть применено и для оценки средне-квадратичной погрешности аппроксимации гармонического сигнала

$$f[n_1,n_2]=(\sin\varpi\, n_1)\cdot(\sin\varpi\, n_2) \ . \tag{14}$$

где $\varpi=2\pi/N$ - относительная угловая частота, $N$ - число дискретных участков на периоде функции $f[n_1,n_2]$.

Будем искать такую функцию цифрового фильтра $F[z]$, чтобы его фазовая погрешность была бы равна нулю:

$$\varphi(\varpi)=0,$$

что выполняется при симметрии их весовых функций (рис. 2).

Такой фильтр описывается выражениями

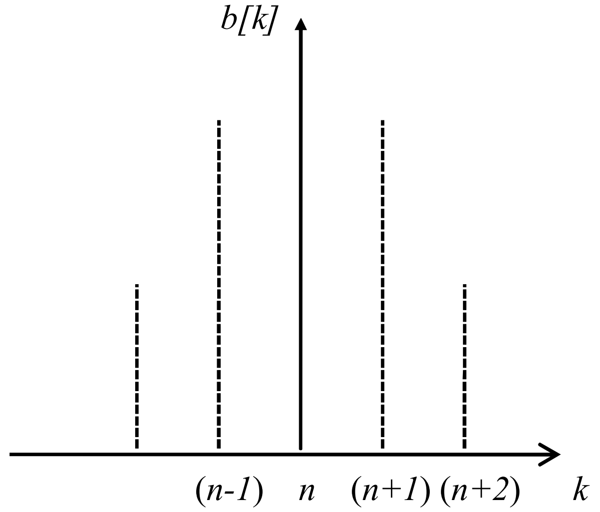


**Рис. 2.** Симметричная весовая функция цифрового фильтра

$$a_0[n_1]=A_0x[n_1]+A_1x[n_1+1]+\ldots+A_1x[n_1-1]+A_2x[n_1-2]+\ldots=$$
$$=A_0x[n_1]+\sum_{i=1}^{m}A_i\left(x[n_1+i]+x[n_1-i]\right)$$
$$b_0[n_2]=B_0y[n_2]+B_1y[n_2+1]+\ldots+B_1y[n_2-1]+B_2y[n_2-2]+\ldots=$$
$$=B_0y[n_2]+\sum_{i=1}^{m}B_i\left(y[n_2+i]+y[n_2-i]\right) \qquad (15)$$

Z - преобразование этого выражения имеет вид

$$a_0[z_1]=x[z_1]\left[A_0+\sum_{i=1}^{m}A_i\left(z_1^i+z_1^{-i}\right)\right];$$
$$b_0[z_2]=y[z_2]\left[B_0+\sum_{i=1}^{m}B_i\left(z_2^i+z_2^{-i}\right)\right]; \qquad (16)$$

Дискретная частотная характеристика такого фильтра определяется выражением

$$K_a[z_1]=\frac{a_0[z_1]}{x[z_1]}=A_0+\sum_{i=1}^{m}A_i\left(z_1^i+z_1^{-i}\right);$$
$$K_b[z_2]=\frac{b_0[z_2]}{y[z_2]}=B_0+\sum_{i=1}^{m}B_i\left(z_2^i+z_2^{-i}\right); \qquad (17)$$

Качество аппроксимации в дискретных точках можно оценить по частотной и фазовой характеристикам цифрового фильтра, получаемых из функций (17) при подстановке в него соотношения [2]

$$z=e^{j\varpi_1}\cdot e^{j\varpi_2},$$

которое для разделимого фильтра делится на соотношения

$$z_1=e^{j\varpi_1};\quad z_2=e^{j\varpi_2}.$$

Выражение для частотной характеристики такого фильтра имеет вид

$$K_A(j\varpi_1)=A_0+\sum_{i=1}^{m}A_i\left(e^{j\varpi_1 i}+e^{-j\varpi_1 i}\right)=$$
$$=A_0+2\sum_{i=1}^{m}A_i\cos\varpi_1 i \qquad (18)$$

$$K_B(j\varpi_2)=B_0+\sum_{i=1}^{m}B_i\left(e^{j\varpi_2 i}+e^{-j\varpi_2 i}\right)=$$
$$=B_0+2\sum_{i=1}^{m}B_i\cos\varpi_2 i \qquad (19)$$

Следовательно, при выбранной весовой функции (рис. 2) АЧХ фильтра определяются выражениями (18) и (19).

С целью определения коэффициентов двумерной сплайн – аппроксимации разложим АЧХ (18) и (19) в степенной ряд в окрестности точек $\varpi_1=0$; $\varpi_2=0$.

Эти разложения имеют вид

$$K_A(\varpi_1)\approx K_A(0)+K_A^{1}(0)\varpi_1+K_A^{11}(0)\varpi_1^2/2+\ldots;$$
$$K_B(\varpi_2)\approx K_B(0)+K_B^{1}(0)\varpi_2+K_B^{11}(0)\varpi_2^2/2+\ldots \qquad (20)$$

где $K(0)$, $K^1(0)$, $K^{11}(0)$ - значения функций $K(\varpi)$ и ее производных в точке $\varpi\approx 0$.

Следовательно, минимальное значение средне-квадратичной погрешности $\Delta_a$, определяемой выражением (13) для выбранной симметричной функции (15) фильтра, будет достигаться при выполнении соотношений

$$K_A(0)=1;\quad K_B(0)=1;$$
$$K_A^{1}(0)=0;\ K_B^{1}(0)=0;$$
$$K_A^{11}(0)=0;\ K_B^{11}(0)=0; \qquad (21)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Выражения (21) позволяют определить систему уравнений относительно искомых коэффициентов аппроксимирующего цифрового фильтра.

В частности, из (18) и (19) с учетом (21) получаем:

$$K_A(0) = A_0 + 2\sum_{i=0}^{m} A_i = 1;$$

$$K_A^{1}(0) = -2\sum_{i=1}^{m} iA_i \sin\varpi_1 i\Big|_{\varpi_1=0} \approx -2\sum_{i=1}^{m} iA_i\,\varpi_1 i = 0;$$

$$K_A^{11}(0) = -2\sum_{i=1}^{m} i^2 A_i \cos\varpi_1 i\Big|_{\varpi_1=0} \approx$$

$$\approx -2\sum_{i=1}^{m} i^2 A_i + \sum_{i=1}^{m} A_i i^4\,\varpi_1^{\,2} = 0;$$

(22)

$$K_B(0) = B_0 + 2\sum_{i=0}^{m} B_i = 1;$$

$$K_B^{1}(0) = -2\sum_{i=1}^{m} iB_i \sin\varpi_2\Big|_{\varpi_2=0} \approx -2\sum_{i=1}^{m} iB_i\,\varpi_2 i = 0;$$

$$K_B^{11}(0) = -2\sum_{i=1}^{m} i^2 B_i \cos\varpi_2 i\Big|_{\varpi_2=0} \approx$$

$$\approx -2\sum_{i=1}^{m} i^2 B_i + \sum_{i=1}^{m} B_i i^4\,\varpi_2^{\,2} = 0;$$

(23)

На основании (22) и (23) составим систему уравнений относительно искомых коэффициентов $A_i$, $B_i$:

$$\begin{array}{ll} A_0 + 2\sum_{i=1}^{m} A_i = 1; & B_0 + 2\sum_{i=1}^{m} B_i = 1; \\ \sum_{i=1}^{m} i^2 A_i = 0; & \sum_{i=1}^{m} i^2 B_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{m} i^4 A_i = 0; & \sum_{i=1}^{m} i^4 B_i = 0; \\ \dots\dots\dots\dots & \end{array} \tag{24}$$

Решение системы (24) определяет коэффициенты двумерной сплайн – аппроксимации дискретных значений сигнала.

Двумерный пятиточечный параболический сплайн – фильтр, например, определяется выражениями

$$\begin{aligned} a_0[n_1] &= A_2x[n_1-2] + A_1x[n_1-1] + A_0x[n_1] + A_1x[n_1+1] + A_2x[n_1+2]; \\ b_0[n_2] &= B_2y[n_2-2] + B_1y[n_2-1] + B_0y[n_2] + B_1y[n_2+1] + B_2y[n_2+2]. \end{aligned} \tag{25}$$

Z – преобразование этих функций имеет вид

$$\begin{aligned} a_0[z_1] &= \left(A_2z_1^{\,2} + A_1z_1 + A_0 + A_1z_1^{-1} + A_2z_1^{-2}\right)\ x[z_1]; \\ b_0[z_2] &= \left(B_2z_2^{\,2} + B_1z_2 + B_0 + B_1z_2^{-1} + B_2z_2^{-2}\right)\ y[z_2]; \end{aligned} \tag{26}$$

Из (24) для фильтра с нечетным числом членов получаем:

$$\begin{aligned} A_0 + 2A_1 + 2A_2 &= 1\ ; \\ B_0 + 2B_1 + 2B_2 &= 1\ ; \\ A_1 + 4A_2 &= 0\ ; \\ B_1 + 4B_2 &= 0\ ; \end{aligned} \tag{27}$$

Третье соотношение для определения коэффициентов $A$, $B$ определяется из условия делимости выражений (8) на двучлены ($z_1$+1), ($z_2$+1).

Это условие позволяет определить два недостающих уравнения:

$$\begin{aligned} A_0 - 2A_1 + 2A_2 &= 0; \\ B_0 - 2B_1 + 2B_2 &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Решение системы (27) и (28) позволяет определить коэффициенты $A_i$, $B_i$ :

$$A_0 = B_0 = {}^{10}\!/_{16}\ ; \quad A_1 = B_1 = {}^{4}\!/_{16}\ ; \quad A_2 = B_2 = -{}^{1}\!/_{16}\ .$$

Таким образом, функции, определяющие младшие коэффициенты пятиточечного параболического двумерного сплайн – фильтра, имеют вид

$$\begin{aligned} a_0[n_1] &= {}^{1}\!/_{16}\left(-x[n_1-2] + 4x[n_1-1] + 10x[n_1] + 4x[n_1+1] - x[n_1+2]\right); \\ b_0[n_2] &= {}^{1}\!/_{16}\left(-y[n_2-2] + 4y[n_2-1] + 10y[n_2] + 4y[n_2+1] - y[n_2+2]\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Выражения для коэффициентов $a_1[n_1]$, $a_2[n_1]$, $b_1[n_2]$ и $b_2[n_2]$ определяются из (8):

$$\begin{aligned} a_1[n_1] &= {}^{1}\!/_{8}\left(x[n_1-2] - 6x[n_1-1] + 6x[n_1+1] - x[n_1+2]\right); \\ b_1[n_2] &= {}^{1}\!/_{8}\left(y[n_2-2] - 6y[n_2-1] + 6y[n_2+1] - y[n_2+2]\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2[n_1] &= {}^{1}\!/_{16}\big(-x[n_1-2] + 7x[n_1-1] - 6x_1[n_1] - \\ &\quad -6x[n_1+1] + 7x[n_1+2] - x[n_1+3]\big); \\ b_2[n_2] &= {}^{1}\!/_{16}\big(-y[n_2-2] + 7y[n_2-1] - 6y_1[n_2] - \\ &\quad -6y[n_2+1] + 7y[n_2+2] - y[n_2+3]\big). \end{aligned} \tag{30}$$

На практике свойства цифровых фильтров удобно иллюстрировать их амплитудно -

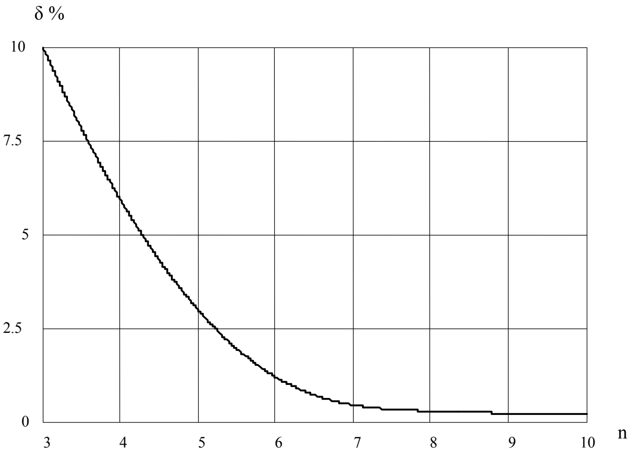


**Рис. 3.** Зависимость максимального значения погрешности аппроксимации двумерного гармонического сигнала от числа интервалов дискретизации на периоде сигнала

частотными характеристиками, переходными функциями, а также аппроксимациями измерительных сигналов конкретной формы.

Частотная характеристика разработанного параболического пятиточечного сплайн -фильтра в зависимости от относительных частот гармонического сигнала

$$\bar{f}_1 = 1/N_1\,;\quad \bar{f}_2 = 1/N_2\,;$$

где $N_1$ , $N_2$ - число дискретных отсчетов на периодах аппроксимируемых сигналов $x$ , $y$ позволяет определить зависимость максимального значения погрешности аппроксимации фильтром двумерного гармонического сигнала от числа интервалов дискретизации на периоде сигнала (рис. 3).

Рассмотрим пример аппроксимации реального аналитического сигнала разработанным выше сплайн - фильтром.

Такой двумерный сигнал (рис. 1), представляет собой совокупность двумерных Гауссианов, каждый из которых описывается

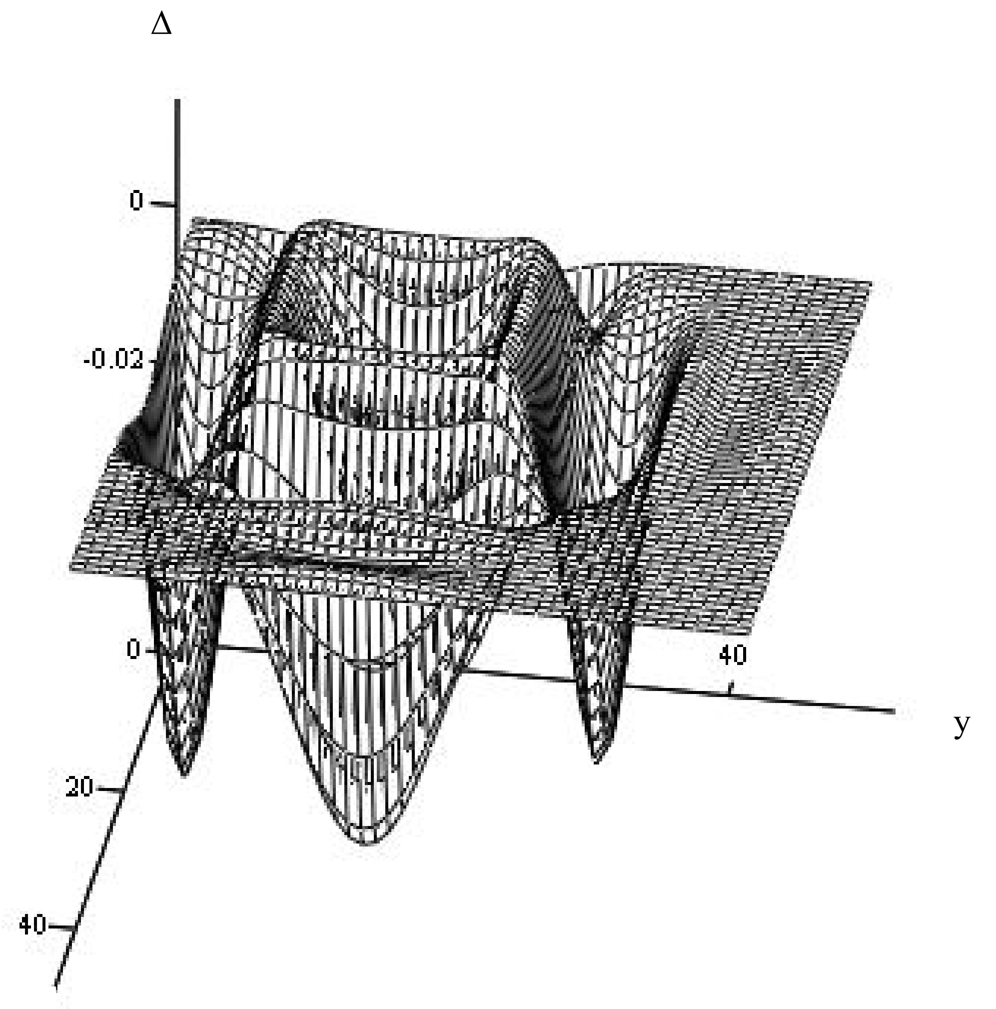


**Рис. 5.** Поверхность, изображающая погрешности аппроксимации двумерного Гауссиана параболическим сплайном

выражением

$$f(x,y)=\exp\left[\frac{(x-X_0)^2}{2\sigma_X^2}+\frac{(y-Y_0)^2}{2\sigma_Y^2}\right], \quad (31)$$

где $X_0$, $Y_0$ – координаты вершины Гауссиана,
$\sigma_X$, $\sigma_Y$ – параметры ширины Гауссиана по осям X , Y.

Аппроксимация функции (31) двумерным параболическим пятиточечным сплайном, описываемым выражениями (29) и (30) на 8 дискретных участках по осям X, Y позволяют определить погрешность ее аппроксимации.

Абсолютная погрешность $\Delta$ аппроксимации Гауссиана параболическим сплайном представлена поверхностью, изображенной на рис. 4. Анализ этой погрешности показывает, что ее максимальное значение не превышает 4%.

Таким образом, разработанный двумерный параболический пятиточечный сплайн-фильтр может быть с успехом использован для аппроксимации реального двумерного аналитического сигнала на ограниченном числе интервалов дискретизации, что позволяет осуществить сжатие измерительной информации, и характеризуется удовлетворительной для практических нужд погрешностью аппроксимации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963.
2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов, М.: Мир, 1978

# ALGORITHMS FOR SPLINE-APPROXIMATION OF TWO DIMENSIONAL ANALYTICAL SAMPLING DATA


P.K. Lange

Samara State Technical University

The task of construction of digital filters with parabolic spline - approximation of two dimensional analytical sampling data is considered. The errors of approximation of two dimensional Gaussian Peak by such filters are determined.