

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МОД ГАУССА-ЭРМИТА В НЕПАРАКСИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ СВОБОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

© 2004 С.Н. Хонина<sup>1</sup>, М.А. Дроздов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

<sup>2</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет

Методом численного моделирования исследуется распространение одномерных пучков Гаусса-Эрмита, являющихся решением параксиального волнового уравнения, в непараксиальной области. Моделирование проводится с использованием интеграла Кирхгофа, преобразования Френеля и аналитического представления. Для численного расчета интегралов с заданной погрешностью использовался метод трапеций. При расчетах отслеживались два основных критерия: погрешность и вычислительные затраты.

### Введение

Модой называется световое поле, демонстрирующее инвариантность при распространении в соответствующей среде. Среди мод свободного пространства можно назвать плоские волны и функции Бесселя. Гауссовы функции (Гаусса-Лагерра и Гаусса-Эрмита) являются модами оптического волокна с квадратичной зависимостью показателя преломления [1]. Однако, гауссовы моды условно можно считать и модами свободного пространства, т.к. в этом случае они распространяются сохраняя свою структуру с точностью до масштаба. В [2, 3] пучки Гаусса-Лагерра и Гаусса-Эрмита описаны для параксиального приближения, что соответствует переходу от волнового уравнения Гельмгольца к параболическому уравнению распространения.

Для описания распространения лазерных пучков в свободном пространстве часто применяются различные приближения, которые вступают в силу при выполнении тех или иных условий на соотношение геометрических параметров системы (параксиальность, дальняя зона). Однако, границы применимости различных приближений определены лишь примерно (“близко” к оси, “гораздо” больше и т.д.).

Исследованию применимости параксиального приближения в различных случаях посвящены, в частности, работы [4-8]. В [4, 5] исследуется точность приближения Френеля в ближней зоне сравнением результатов

прямого численного интегрирования для интеграла Кирхгофа и преобразования Френеля (одномерный случай). Показано, что в случае, когда произведение волнового числа на расстояние между точками входной и выходной плоскостей “гораздо больше” единицы, а также отношение фокуса к диаметру апертуры более 12, результаты для модуля амплитуды отличаются не более чем на 2%.

В [6] рассматривается метод, позволяющий корректировать результаты, полученные в рамках аппроксимации Френеля. При такой аппроксимации относительная ошибка для распределения интенсивности в фокальной зоне составляет величину обратную квадрату фокусного расстояния. Использование корректирующих функций позволяет повысить точность и число значащих цифр.

В [7] аналитически рассматривается дифракция сферической и плоской волны на круглом отверстии и обсуждается существенное различие получаемых результатов в зонах дифракции Френеля и Фраунгофера.

В [8] сравниваются результаты параксиального и непараксиального подходов при описании распределения Гауссова пучка в дальней зоне, которые сильно зависят от значения фокусного расстояния. Результаты практически совпадают в случае отсутствия обрезающей пучок диафрагмы.

В [9] представлены результаты численного моделирования распространения одномерного светового поля (прямоугольного и

Гауссова распределений) в свободном пространстве, показывающие различия при использовании различных приближений: с использованием различных приближений: с использованием углового спектра, через разложение по сферическим волнам, преобразование Френеля и преобразование Фурье. Также получены выражения для шага интегрирования в зависимости от размеров входной и выходной области, расстояния распространения и длины волны для различных приближений. В [9] было отмечено, что для распределений, имеющих гладкий характер (в частности, гауссовый пучок), возможность применения параксиальной приближений наступает раньше.

В данной работе методом численного моделирования исследуется распространение одномерных пучков Гаусса-Эрмита (ГЭ), являющихся решением параксиального волнового уравнения, в непараксиальной области. Моделирование проводилось с использованием интеграла Кирхгофа, преобразования Френеля и аналитического представления. Для численного расчета интегралов с заданной погрешностью использовался метод трапеций. При расчетах отслеживались два основных критерия: погрешность и вычислительные затраты.

**Интегральные преобразования, описывающие распространение световых полей в свободном пространстве**

Наиболее точным выражением, описывающим распространение скалярного светового поля в свободном пространстве (одномерный случай), является следующее [10]:

$$F(u, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikz\sqrt{1-\alpha^2}) \exp[ik\alpha(u-x)] d\alpha \right\} dx, \quad \alpha^2 < 1. \quad (1)$$

Выражение (1) представляет распространение световых волн с использованием углового спектра или разложения по базису плоских волн. Оно хорошо описывает распространение светового поля в скалярном случае практически на всем пути, кроме области, близкой к экрану. Однако, использование выражения (1) при расчете методом трапеций остается слишком ресурсозатрат-

ным для современных компьютеров даже в одномерном случае [9]. Возможно применение алгоритмов быстрого преобразования Фурье, но в этом случае затруднительно оценить погрешность расчетов.

Поэтому часто прибегают к описанию распространения светового поля с использованием разложения по сферическим волнам, которое в одномерном случае имеет следующий вид [11]:

$$F(u, z) = \frac{ikz}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{H_1^{(1)}(kR)}{R} dx, \quad (2)$$

где  $H_1^{(1)}(x)$  - функция Ханкеля,  $R = \sqrt{(x-u)^2 + z^2}$ .

Можно показать [11], что при  $kR \rightarrow \infty$  выражение (2) сводится к следующему:

$$F(u, z) = z \sqrt{-\frac{ik}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\exp(ikR)}{R\sqrt{R}} dx. \quad (3)$$

Выражение (3) называется интегралом Кирхгофа. В [9] показано, что различия между результатами, полученными на основе выражения (1) и использование интеграла Кирхгофа, составляют порядка 0,5% даже в области, близкой к экрану (5-10 длин волн).

Для расстояний  $z \gg x$  (параксиальная область) выражение (3) сводится к преобразованию Френеля:

$$F(u, z) = \sqrt{-\frac{ik}{2\pi z}} \exp(ikz) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x-u)^2\right] dx, \quad (x-u) \ll z. \quad (4)$$

В зоне дифракции Фраунгофера (дальней зоне) для описания распространения световых полей целесообразно использовать преобразованием Фурье:

$$F(u, z) = \sqrt{\frac{k}{z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i\frac{k}{z}xu\right) dx, \quad (5)$$

которое легко реализуется с помощью алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье.

Далее в работе сравниваются результаты численного расчета распространения в свободном пространстве лазерных пучков ГЭ на основе использования выражений (3) и (4).

### Метод вычислений и критерии оценки результатов

В данной работе для вычисления описанных выше интегралов использовался метод трапеций. Данный метод был выбран из следующих соображений. Квадратурная формула трапеций (как и прямоугольников) дает погрешность порядка  $\sim P_2 h^2$ , где  $P_2$  – максимум модуля второй производной от подынтегральной функции на отрезке интегрирования [12]. При вычисления интегралов от быстро-осциллирующих функций:

$$I = \int_a^b f(x) \exp(i\omega x) dx. \quad (6)$$

$P_2 \sim \omega^2$  и малая погрешность обеспечивается только в случае  $\omega h \ll 1$ . Заметим, что в случае (6) квадратурная формула Симпсона теряет свои преимущества, т.к. для нее погрешность  $\sim P_4 h^4$  и, учитывая  $P_4 \sim \omega^4$ , получается такое же ограничение на шаг интегрирования.

Применение метода трапеций предполагает расчеты с очень малым шагом и чтобы увеличить этот шаг часто применяют метод Филона [12, 13]. Однако, т.к. в данной работе основная цель – определить границы применимости различных приближений оператора распространения в свободном пространстве, что позволяет рассматривать лишь одномерный случай, вычислительные затраты сравнительно невелики даже для метода трапеций.

Расчеты всех интегралов проводились с заданной точностью. Т.е., для получения требуемой точности сравнивались значения интеграла, полученные при шаге интегрирования  $h$  и при шаге интегрирования  $h/2$ . Ошибка вычислялась по формуле:

$$\delta = \left( \sum_u [I_h(u) - I_{h/2}(u)]^2 \cdot \left\{ \sum_u [I_{h/2}(u)]^2 \right\}^{-1} \right)^{1/2} \cdot 100\%, \quad (7)$$

где  $I_h(u)$  и  $I_{h/2}(u)$  – значения интеграла при расчете с шагом интегрирования  $h$  и  $h/2$ , соответственно.

Если значение выражения (7) для данных интегралов не превышала определенно порога, точность считалась достигнутой,

иначе шаг интегрирования уменьшался вдвое.

В данной работе проводились сравнения различных приближений для определения границ их применимости при различных условиях распространения. В качестве критериев сравнения были выбраны среднеквадратичное отклонение и время вычисления при различных приближениях.

Среднеквадратичное отклонение вычислялось по формуле:

$$\varepsilon = \left\{ \sum_u [|F_1(u, z)|^2 - |F_2(u, z)|^2]^2 \cdot \left[ \sum_u |F_1(u, z)|^4 \right]^{-1} \right\}^{1/2} \cdot 100\%, \quad (8)$$

где  $F_1(u, z)$  и  $F_2(u, z)$  – комплексные распределения светового поля на расстоянии  $z$ , полученные с использованием различных выражений.

Также для определения полноты охвата областью  $D_z$  выходной функции  $F(u, z)$  вычислялся энергетический параметр  $\mu$ :

$$\mu = \int_{D_z} |F(u, z)|^2 du \cdot \left( \int_D |f(x)|^2 dx \right)^{-1}, \quad (9)$$

где  $f(x)$  – значения входной функции,  $F(u, z)$  – значения численного интегрирования,  $D, D_z$  – области определения во входной и выходной плоскостях, соответственно.

### Распространение модовых пучков Гаусса-Эрмита в непараксиальной области свободного пространства

Известно [14], что моды ГЭ

$$\Psi_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right), \quad (10)$$

где  $\sigma$  – гауссовый параметр,  $H_n(x)$  – полином Эрмита, являются частными решениями параксиального волнового уравнения:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) E(x, z) = 0, \quad (11)$$

где  $k=2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны излучения.

Распространение мод ГЭ в параксиаль-

ной области свободного пространства описывается следующей формулой [14]:

$$\Psi_n(x, z) = \exp[i(n+1)\eta(z)] \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2(z)}\right) \exp\left(-\frac{ikx^2}{2R(z)}\right) H_n\left(\frac{x}{\sigma(z)}\right), \quad (12)$$

где  $\eta(z) = \arctg(z/z_0)$ ,  $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$ ,

$$\sigma(z) = \sigma\sqrt{1 + z^2/z_0^2}, \quad z_0 = k\sigma^2/2.$$

Также для описания поведения полей в этой области можно воспользоваться преобразованием Френеля (4). Этот способ вычислительно гораздо более трудоемкий, чем выражение (12), однако он позволяет рассчитать распространение любого поля, в том числе моды ГЭ, обрезанной входной апертурой.

Условие параксиальности часто записывается следующим образом (1D случай):

$$x - u \ll z, \quad (13)$$

где  $x$  и  $u$  – координаты входной и рассматриваемой плоскостей, соответственно. Условие (13) вступает в силу на “больших” расстояниях от входной плоскости и “близко” к оси (слова “больших” и “близко” взяты в кавычки специально, чтобы подчеркнуть, что четкого определения границ зоны параксиальности не имеется). Т.о. в понятии параксиальности учитываются два аспекта: насколько далеко расположена рассматриваемая плоскость от входной плоскости и как сильно расходится пучок при распространении.

Для гауссовых пучков, как и для любых параксиальных пучков, распространяющихся в свободном пространстве, справедливо следующее выражение для среднего радиуса пучка:

$$R^2(z) = \gamma^2 z^2 + R_0^2. \quad (14)$$

Из (14) следует, что при  $z=0$  параксиальный пучок имеет минимальный средний радиус  $R_0$  (рис. 1), а при  $z \gg R_0/\gamma$  радиус растет линейно  $R(z) \sim \gamma z$  с коэффициентом расходимости  $\gamma$ .

Используя (12) для мод ГЭ можно записать:

$$\sigma^2(z) = \left(\frac{2}{k\sigma}\right)^2 z^2 + \sigma^2, \quad (15)$$

следовательно, коэффициент расходимости  $\gamma$  будет равен

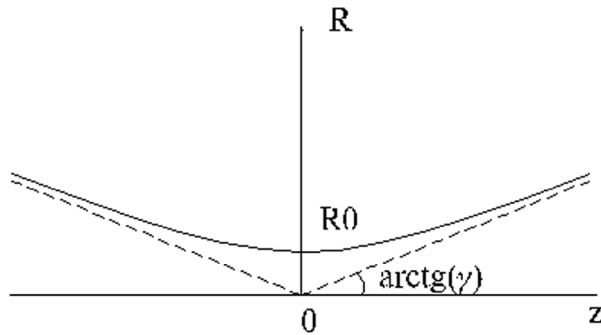


Рис. 1. Расходимость параксиальных пучков

$$\gamma = \frac{\lambda}{\pi\sigma}. \quad (16)$$

Условию параксиальности удовлетворяют пучки с небольшим углом расходимости (несколько градусов):

$$\theta = \arctg(\gamma). \quad (17)$$

Еще одним критерием параксиальности может служить отношение расстояния между входной и рассматриваемой плоскостями к размеру входного пучка  $z/\sigma$ .

Для исследования распространения мод ГЭ в непараксиальной области использовалось выражение (3), которое можно считать интегралом Кирхгофа в одномерном случае.

Вычисления интегралов Кирхгофа и Френеля в данной работе проводились с требованием одинаковой точности, обеспечивающей ошибку вычисления (7) не более 0,01%. Длина волны  $\lambda$  во всех расчетах полагалась равной 0,63 мкм.

### Сравнение результатов, полученных с помощью интеграла Кирхгофа и преобразования Френеля

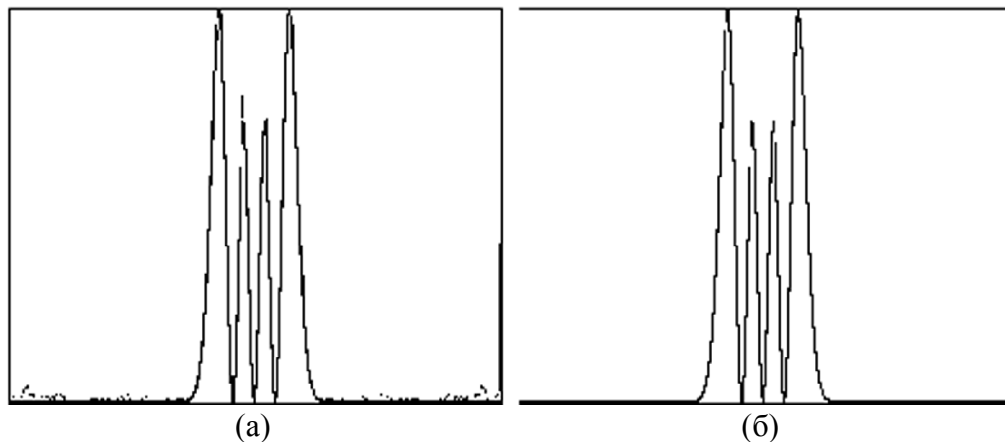
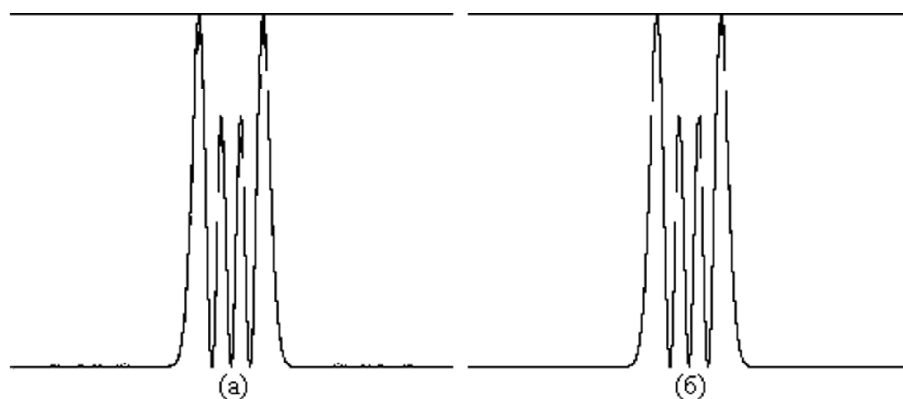
В данном разделе приведены результаты моделирования распространения мод ГЭ (10) с использованием интеграла Кирхгофа (3) и преобразования Френеля (4). Как видно из результатов, приведенных в табл. 1, для слаборасходящихся пучков ( $\theta < 1^\circ$ ) основной характеристикой параксиальной зоны является отношение расстояния к входному размеру пучка  $z/\sigma$ . После некоторого значения  $g_{1\%} = z/\sigma$  (различного для разных  $\sigma$ ) расхождение в результатах, получаемых с помощью интеграла Кирхгофа и преобразования Фре-

**Таблица 1.** Сравнение результатов, полученных с помощью интеграла Кирхгофа и преобразования Френеля, для моды ГЭ третьего порядка

	$\sigma = 100\lambda, \theta \approx 0,2^\circ$		$\sigma = 20\lambda, \theta \approx 1^\circ$	
	$\varepsilon, \%$	$z/\sigma$	$\varepsilon, \%$	$z/\sigma$
$z=5\lambda$	–	0,05	7,45	0,25
$z=10\lambda$	–	0,1	2,813	0,5
$z=20\lambda$	–	0,2	1,62	1
$z=50\lambda$	–	0,5	0,676	2,5
$z=100\lambda$	6,748	1	0,365	5
$z=200\lambda$	3,128	2	0,173	10
$z=500\lambda$	1,532	5	0,051	25
$z=1000\lambda$	0,956	10	0,049	50
$z=2000\lambda$	0,4085	20	0,043	100
$z=5000\lambda$	0,129	50	0,041	250
$z=10000\lambda$	0,08	100	0,046	500
$z=100000\lambda$	0,072	1000	0,031	5000

неля, заведомо не превышает 1%. Интересно, что для меньших значений  $ss$  это соотношение меньше (для  $\sigma = 100\lambda$   $g_{1\%}=10$ , а для  $\sigma = 20\lambda$   $g_{1\%}=2$ ) т.е. параксиальное приближе-

ние вступает в силу раньше. На рис. 2 и 3 видно, что отклонение менее 3% не заметно визуально, т.к. графики, полученные с помощью интеграла Кирхгофа и преобразования

**Рис. 2.** Графики распределения интенсивности 3-й моды ГЭ при использовании интеграла Кирхгофа (жирная линия) и преобразования Френеля (тонкая линия) для  $\sigma = 100\lambda$  на расстоянии (а)  $z=100\lambda$  и (б)  $z=500\lambda$ **Рис. 3.** Графики распределения интенсивности 3-й моды ГЭ при использовании интеграла Кирхгофа (жирная линия) и преобразования Френеля (тонкая линия) для  $\sigma = 20\lambda$  на расстоянии (а)  $z=5\lambda$  и (б)  $z=10\lambda$ .

**Таблица 2.** Среднеквадратичное отклонение ее для результатов, полученных с помощью интеграла Кирхгофа и выражения (12), для моды ГЭ второго порядка

	$\sigma = 20\lambda, \theta \approx 1^\circ$	$\sigma = 5\lambda, \theta \approx 3,8^\circ$	$\sigma = \lambda, \theta \approx 18^\circ$
$z=5\lambda$	0,156	1,963	14,862
$z=10\lambda$	0,164	0,827	18,462
$z=20\lambda$	0,143	0,803	20,05
$z=50\lambda$	0,14	0,686	20,525
$z=100\lambda$	0,103	0,481	20,593
$z=200\lambda$	0,115	0,288	21,228
$z=500\lambda$	0,058	0,112	21,242
$z=1000\lambda$	0,062	0,078	25,528
$z=2000\lambda$	0,056	0,075	25,532
$z=5000\lambda$	0,049	0,069	–
$z=10000\lambda$	0,013	0,043	–
$z=100000\lambda$	0,008	0,022	–

Френеля сливаются.

При численном расчете интегралов (3) и (4) с фиксированным шагом (одинаковое число отсчетов) интеграл Кирхгофа требует в 1,5 раза больше времени, чем преобразование Френеля. Однако, при вычислении этих интегралов с заданным значением точности численного интегрирования  $\delta$ , требуется несколько больше времени для выполнения преобразования Френеля, чем для интеграла Кирхгофа, т.к. для получения той же точности в первом случае необходимо большее количество отсчетов. И хотя время вычисления обоих интегралов уменьшается с увеличением расстояния от входной плоскости, на малых расстояниях интеграл Кирхгофа вычисляется почти в два раза быстрее преобразования Френеля. Т.о., выполнение преобразования Френеля напрямую, без применения алгоритмов быстрого преобразования Фурье, с вычислительной точки зрения не выгодно. В этом случае имеет смысл использовать более точный интеграл Кирхгофа.

### **Сравнение результатов, полученных с помощью интеграла Кирхгофа и аналитического решения параксиального волнового уравнения**

В некоторых случаях известны аналитические выражения, описывающие распрост-

ранение световых пучков. Для мод ГЭ это выражение (12), которое можно использовать вместо преобразования Френеля, т.к. это решение было выведено для параксиального волнового уравнения (11).

В данном разделе приведены результаты моделирования распространения мод ГЭ (10) с использованием интеграла Кирхгофа (3) и выражения (12), которое позволяет формально получать результаты сколь угодно близко к входной плоскости. Нужно отметить, что выражение (12) является более точным, чем преобразование Френеля, что подтверждается данными, приведенными в Табл. 2 (сравни табл. 1 и табл. 2 для  $\sigma = 20\lambda$ ).

Также из табл. 2 видно, что чем больше расходимость пучка, тем позже вступает в силу зона параксиальности. Если же пучки имеют сильную расходимость ( $\theta \approx 18^\circ$ , см. также рис. 4), то их вообще нельзя считать параксиальными.

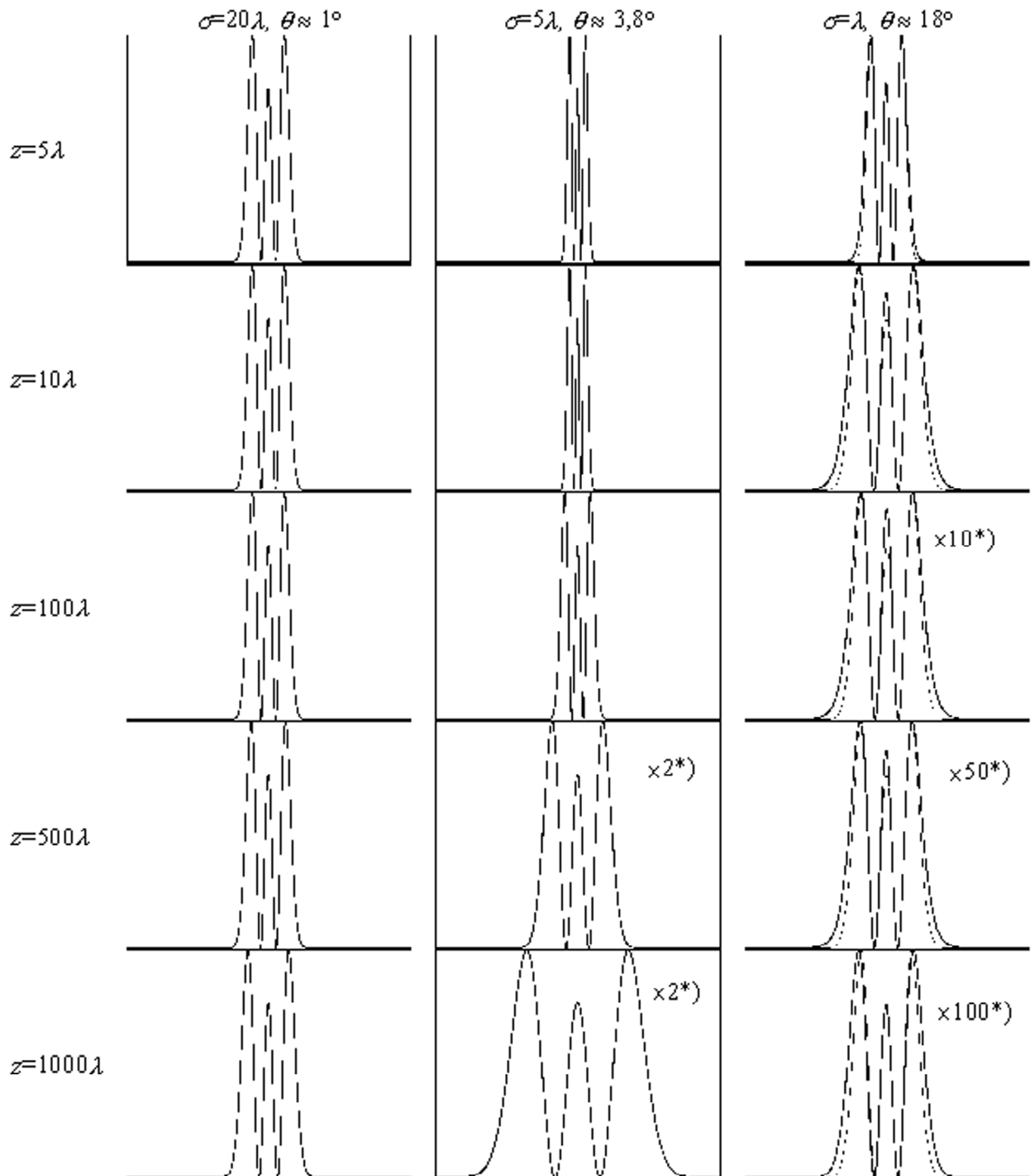
### **Заключение**

По результатам вычислительных экспериментов, проведенных в данной работе для моделирования распространения пучков Гаусса-Эрмита в непараксиальной зоне дифракции, можно сделать следующие выводы.

Для слаборасходящихся пучков ( $\theta < 1^\circ$ ) основной характеристикой параксиальной зоны является отношение расстояния к входному размеру пучка  $z/\sigma$ . После некоторого значения  $z/\sigma$  (различного для разных  $\sigma$ ) рас-

хождение в результатах, получаемых с помощью интеграла Кирхгофа и преобразования Френеля, заведомо не превышает 1%. Интересно, что для меньших значений  $\sigma$  параксиальное приближение вступает в силу раньше. При более сильно расходящихся пучках

такой зависимости не наблюдается. Как правило, чем больше расходимость пучка, тем позже вступает в силу зона параксиальности. Если же пучки имеют сильную расходимость ( $\theta \approx 18^\circ$ ), то их вообще нельзя считать параксиальными.



**Рис. 4.** Графики распределения интенсивности 2-й моды ГЭ при использовании интеграла Кирхгофа (жирная линия) и параксиального аналитического выражения (тонкая линия) для разных размеров во входной плоскости и на различных расстояниях;

\*) означает, что рисунок приведен с масштабным уменьшением

При численном расчете интегралов с фиксированным шагом (одинаковое число отсчетов) интеграл Кирхгофа требует в 1,5 раза больше времени, чем преобразование Френеля. Однако, при вычислении этих интегралов с заданным значением точности численного интегрирования, расчет интеграла Кирхгофа становится менее ресурсозатратным (на малых расстояниях интеграл Кирхгофа вычисляется почти в два раза быстрее преобразования Френеля).

#### Благодарность.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRNE), а также гранта президента Российской Федерации МД-209.2003.01.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adams M.J.* An introduction to optical waveguides. J.Wiley & Sons, Chichester, 1981.
2. *Marcuse D.* Light transmission optics, Van Nostrand Reinhold, New York, 1982.
3. *Haus H.A.* Waves and Fields in Optoelectronics, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1984.
4. *Southwell W.H.* Validity of the Fresnel approximation in the near field // *JOSA* **71**(1). 1981.
5. *Schultheisz C.R.* Numerical solution of the Huygens-Fresnel-Kirchhoff diffraction of spherical waves by a circular aperture // *JOSA A* **11**(2). 1994.
6. *Alonso M. A., Asatryan A.A., Forbes G. W.* Beyond the Fresnel approximation for focused waves // *JOSA A* **16**(8), 1999.
7. *Wang P., Xu Y., Wang W., Wang Z.* Analytic expression for Fresnel diffraction // *JOSA A*, **15**(3). 1998.
8. *Duan K., Lu B.* Nonparaxial analysis of far-field properties of Gaussian beams diffracted at a circular aperture // *Optics Express* **11**(13). 2003.
9. *Дроздов М.А., Хонина С.Н.* Исследование границ применимости параксиального приближения для описания распространения лазерного света в свободном пространстве // *Естествознание, экономика, менеджмент*. 2003.
10. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухорюков А.Л.* Теория волн. М.: Наука, 1979.
11. *Зверев В.А.* Радиооптика, М.: Сов. радио. 1975.
12. *The computer in optical research. Methods and applications.* Ed. By B.R. Frieden. Springer-Verlag. Berlin. 1980.
13. *Filon. L. N. G.* On a quadrature formula for trigonometric integrals // *Proc Roy. Soc. Eden.*, 1928.
14. *Ярив А.* Квантовая электроника. М.: Сов. радио, 1980.

#### INVESTIGATIONS OF GAUSS-HERMITE MODES PROPAGATION IN NONPARAXIAL FREE SPACE

© 2004 S.N. Khonina<sup>1</sup>, M.A. Drozdov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Sciences, Samara  
<sup>2</sup> Samara State Aerospace University

We investigate propagation of 1D Gauss-Hermite modes in nonparaxial region while the modes satisfy paraxial wave equation. Kirchhoff integral, Fresnel transformation, and an analytical expression are used for computer simulation. The integrals are calculated using the trapeze method with a predefined accuracy. The resulting divergence and computing time consuming criteria were used.