

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА УПРУГОГО СПУТНИКА ПРИ НАЧАЛЬНОМ УСПОКОЕНИИ

© 2005 С.Е. Сомов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматриваются проблемы параметрического синтеза дискретных алгоритмов широтно-импульсного управления реактивными двигателями упругого космического аппарата при его начальном успокоении. Представляются результаты исследования динамики спутника связи *Sesat* с крупногабаритными панелями солнечных батарей в этом режиме.

### **Введение**

Колебания конструкции крупногабаритных космических аппаратов (КА) могут оказывать существенное влияние на их движение, особенно в режиме успокоения. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ) управления реактивными двигателями (РД) имеет много преимуществ и находит практическое применение на многих КА [1,2]. В работе рассматривается задача параметрического синтеза законов управления РД при пространственном движении упругого КА в режиме успокоения (РУ).

Спутник связи SESAT (*Siberia Europe SATellite*) с крупногабаритными упругими панелями солнечных батарей (СБ), рис. 1,

разработан НПО ПМ им. акад. М.Ф. Решетнева по контракту с Европейской организацией Eutelsat и выведен на геостационарную орбиту в апреле 2000 г. При полете этого спутника, а также КА серии Экспресс-АМ, также созданном НПО ПМ, экспериментально установлена квазимонотонная амплитудная зависимость декремента колебаний панелей СБ. Поэтому задача синтеза системы управления ориентацией (СУО) в режиме успокоения КА данного класса с малым декрементом колебаний крупногабаритных панелей СБ является актуальной.

### **Движение деформируемой конструкции КА**

Выбор модели деформируемого КА тесно связан со способом дискретизации его конструкции. Для получения приближенных моделей движения упругих КА предпочтителен метод Релея-Ритца-Галеркина. Практически в задачах построения моделей КА нежесткой конструкции применяется метод конечных элементов (МКЭ), представляющий собой локализованный метод предполагаемых форм колебаний. Обладая несомненными достоинствами и развитым программным обеспечением (системы NASTRAN, ASKA, SAP-IV и др.), МКЭ порождает модели высокой размерности, достигающей нескольких тысяч степеней свободы для сложных разветвленных конструкций КА. Особенность применяемого подхода заключается в представлении упругих колебаний элементов конструкции в виде конечного числа тонов. Расчет форм этих

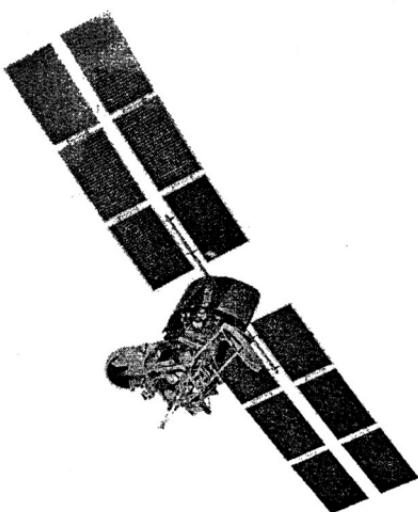


Рис. 1. Спутник связи *Sesat*

колебаний выполняется на основе МКЭ с так называемой конденсацией (редукцией) по тонам колебаний, далее вычисляются матрицы коэффициентов взаимовлияния движений всех подконструкций КА как абсолютно твердых тел, включая корпус КА, так и деформируемых тел. Например, расчетная схема одного крыла панелей СБ КА Sesat представляется конечно-элементной моделью, состоящей из 129 узловых точек, из которых 33 являются сосредоточенными массами, и 205 балок с 5 различными геометрическими и 2 различными физическими свойствами [1].

Расчет собственных форм и собственных парциальных частот упругих колебаний каждой панели СБ КА Sesat выполнен при учете  $n^q = 10$  низших тонов в стандартной нормировке (рис. 2). Модель динамики углового движения КА с упругими панелями подвижными СБ, жестко связанными между собой, составленная при предположениях

- положение центра масс (ЦМ) С всей механической системы незначительно отличается от своего номинального положения – полюса О при выводе нелинейных уравнений пространственного движения системы;
- перемещение панелей СБ происходит точно в соответствии с командной скоростью в виде кусочно-постоянной функции времени, что обусловлено применением шагового редукторного привода (РШП) с самоторможением,

имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\gamma) & \mathbf{D}^q \\ (\mathbf{D}^q)^T & \mathbf{I}_{2n^q} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}^0 \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}^q \\ \mathbf{F}^q \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} + \mathbf{M}_o^{do} + \mathbf{M}_o^p + \mathbf{M}_o \\ (-\mathbf{D} + \mathbf{R}(\gamma)) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{W} \mathbf{q} - (\mathbf{D}_3^q(\gamma))^T \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$  – вектор угловой скорости КА в связанной с КА системе координат (ССК)  $Oxyz$ , тензор инерции  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\gamma) = \mathbf{J}^0 + 2\mathbf{J}^p(\gamma)$  при произвольном

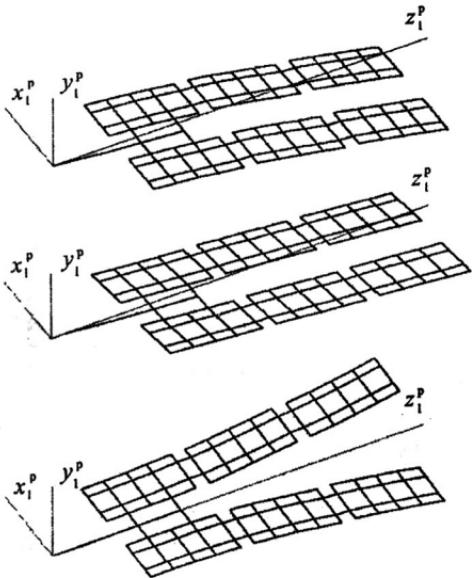


Рис. 2. Формы колебаний первой панели СБ с тремя низшими парциальными частотами

положении панелей СБ, определяемом углом  $\gamma$ , причем тензор инерции каждой панели СБ

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^p(\gamma) &= \\ &= \begin{bmatrix} J_x^p C_\gamma + J_y^p S_\gamma & J_{xy}^p C_\gamma S_\gamma & 0 \\ J_{xy}^p C_\gamma S_\gamma & J_x^p S_\gamma^2 + J_y^p C_\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_z^p \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$J_{xy}^p = J_x^p - J_y^p; \quad C_\gamma = \cos \gamma; \quad S_\gamma = \sin \gamma;$$

прямоугольная матрица  $\mathbf{D}^q(\gamma)$  инерционного взаимовлияния движений панелей СБ и корпуса КА представляется матрицей-строкой  $\mathbf{D}^q = \mathbf{D}^q(\gamma) = [D_1^q(\gamma), D_2^q(\gamma)]$ , причем структура матриц  $D_1^q$  и  $D_2^q$  инерционного влияния упругих панелей СБ такова:

- матрица  $D_k^q = \{D_{k1}^q, D_{k2}^q, D_{k3}^q\}$  представляется столбцом, составленным из строк;
- $D_{kj}^q$  – строки матриц влияния,

$j = 1, 2, 3$  – номер строки;  $k = 1, 2$  – номер панели;

$\mathbf{G} = \mathbf{J}(\gamma) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{D}^q(\gamma) \dot{\mathbf{q}}$  – вектор кинетического момента упругого КА  $\mathbf{M}_o^p$  – вектор момен-

та инерционно-гироскопических сил, обусловленный подвижностью панелей СБ

$$\mathbf{M}_o^p = \{J_{xy}^{pd}(S_{2y}\omega_x - C_{2y}\omega_y) - 2J_z^p\omega_y\} \ddot{\gamma}; - \\ -(J_{xy}^{pd}(C_{2y}\omega_x - S_{2y}\omega_y) + 2J_z^p\omega_y) \dot{\gamma}; - 2J_z^p \ddot{\gamma}\};$$

вектор обобщенных координат упругих колебаний панелей СБ  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$ , где  $q_k \in \mathbb{R}^{n''}$ ,  $k=1,2$  – вектор обобщенных координат упругих колебаний  $k$ -ой панели СБ; вектор-столбец обобщенных сил, соответствующих колебаниям панелей СБ  $\mathbf{F}^q = \{F_1^q, F_2^q\}$ , где вектор  $F_k^q = (-(\delta/\pi)\Omega_k + R_k)\dot{q}_k - \Omega_k^2 q_k - (\mathbf{D}_3^q)^T \ddot{\gamma}$ , диагональная матрица  $\Omega_k = \text{diag}\{\Omega_{ks}\}$  составлена из парциальных частот  $\Omega_{ks}$ ,  $s=1:n''$  и  $\delta$  – логарифмический декремент колебаний панелей СБ, матрица собственного демпфирования  $\mathbf{D} = (\delta/\pi)\Omega$ , при чем матрицы  $\Omega = \text{diag}\{\Omega_1, \Omega_2\}$ ,  $\mathbf{W} = \Omega^2$ ,  $\mathbf{D}_3^q = \{D_{13}^q, D_{23}^q\}$ , а  $R(\omega, \gamma) = \text{diag}\{R_1, R_2\}$  – кососимметрична матрица гироскопической связи движения корпуса КА и колебаний панелей СБ;  $\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_o^g + \mathbf{M}_o^s$  – суммарный вектор возмущающих моментов относительно полюса О, где  $\mathbf{M}_o^g$  – вектор гравитационного момента и  $\mathbf{M}_o^s$  – вектор момента возмущающих сил солнечного давления;  $\mathbf{M}_o^{do}$  – вектор моментов двигательной установки ориентации (ДУО).

Ориентация ССК  $Oxyz$  относительно орбитальной системы координат (ОСК)  $Ox^o y^o z^o$  определяется кватернионом  $\Lambda^o$  в соответствии с уравнением

$$\dot{\Lambda}^o = \frac{1}{2}(\Lambda^o \circ \omega - \dot{\psi}_o \circ \Lambda^o), \quad (2)$$

где вектор-столбец  $\dot{\psi}_o = \{0, 0, \dot{\psi}_o\}$  представляют вектор угловой скорости  $\dot{\psi}_o$  орбитального движения КА в проекциях на оси ОСК и  $\psi_o(t)$  – истинная аномалия. Орбита КА считается известной, при этом вектор возмущающих моментов  $\mathbf{M}_o$  представляется анали-

тической зависимостью только от кватерниона  $\Lambda^o$  ориентации КА в ОСК.

### Модели компонентов системы ориентации

Приборный состав СУО КА в РУ состоит из ДУО на основе шести термокатализических РД с ШИМ тяги, блока трех одноосных датчиков угловой скорости (ДУС), РШП и датчика углового положения (ДУП) двух панелей СБ относительно корпуса КА, а также БЦВМ, реализующей алгоритмы цифрового управления.

Модуляционная характеристика ШИМ нормированной команды включения тяги  $P^n(t, \tau_k^d) \in \{0, 1\}$ ,  $k \in N_0 \equiv [0, 1, 2, \dots]$  каждого управляющего реактивного двигателя (РД), представляющая собой зависимость длительности  $\tau^d(t_k) = \tau_k^d$  команды для  $t \in [t_k, t_k + \tau_k^d]$

$$P^n(t, \tau_k^d) = \begin{cases} 1 & t_k \leq t < t_k + \tau_k^d \\ 0 & t_k + \tau_k^d \leq t < t_{k+1} \end{cases}, \quad (3)$$

от поступающего в моменты времени  $t_k = k T_u$  с периодом управления  $T_u$  командного входного сигнала  $\tau_k$ , описывается соотношением

$$\tau_k^d = \varphi^n(\tau_m, \tau^m, T_u, \tau_k) = \\ = \begin{cases} 0 & \tau_k < \tau_m; \\ \tau_k & \tau_m \leq \tau_k < \tau^m; \\ \tau^m & \tau^m \leq \tau_k < T_u; \\ T_u & \tau_k > T_u, \end{cases} \quad (4)$$

где предусмотрен горизонтальный участок с целью частичной компенсации физического запаздывания  $T_{zu}^d$  при включении/отключении РД по команде  $\tau_k$  для значений  $\tau^m \leq \tau_k < T_u$ . Соотношения (3) и (4) в совокупности составляют модель ШИМ нормированного управляющего сигнала  $P^n(t, \tau_k^d)$  включения РД для  $t \in \{t_k, t_k + \tau_k^d\} \subset [t_k, t_{k+1}] \equiv T_k$  при поступлении командного входного сигнала  $\tau_k$ . Дина-

мические процессы нарастания и спада нормированной тяги  $P_d^n(t)$  каждого РД с учетом временного (транспортного) запаздывания  $T_{zu}^d$  моделируются дифференциальным уравнением  $T^d \dot{P}_d^n + P_d^n = P^n(t - T_{zu}^d, t_k^d)$  с начальным условием  $P_d^n(t_0) = 0$ , где постоянная времени  $T^d$  принимает два положительных значения:  $T_+^d$  либо  $T_-^d$  согласно соотношению:  $\text{if } P^n = 1 \text{ then } T^d = T_+^d \text{ else } T^d = T_-^d$ . Для последовательности командных импульсов  $P^n(t, t_k^d)$  с длительностями  $t_k^d$  на полуинтервалах времени  $t \in [t_k, t_{k+1})$  начальные условия для этого уравнения в моменты времени  $t = t_k + T_{zu}^d$  и  $t = t_k + T_{zu}^d + t_k^d$  получаются припасовыванием по непрерывности решения  $P_d^n(t)$ . Каждому j-му РД  $D_j$ ,  $j = 1 : 6$ , со-поставляется вектор текущей реактивной тяги  $P_j(t) = P^m P_{d,j}^n(t) \cdot p_j$  с фиксированным ортом  $p_j$  и началом в точке  $O_j^d$ , где  $P^m$  – одинаковое для всех РД значение текущей максимальной тяги. Расположение точки  $O_j^d$  относительно полюса О координируется радиусом-вектором  $r_j$ . Управляющие моменты ДУО относительно осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  ССК создаются парами РД  $(D_1, D_2), (D_3, D_4)$  и  $(D_5, D_6)$  соответственно, причем РД с нечетным номером в i-ой паре создает управляющий момент положительного знака относительно соответствующей i-ой оси,  $i = x, y, z$ . Логика формирования команд  $\tau_{jk}$  включения каждого j-го РД в составе ДУО учитывает знак командного сигнала  $v_{ik}^d$  по соответствующему каналу управления  $i = x, y, z$  и описывается таким алгоритмом для значений индекса  $k \in N_0$ :

$$\tau_{ik} = |v_{ik}^d|; \quad s_{ik} = \text{Sign} v_{ik}^d; \quad i = x, y, z;$$

$\text{if } s_{ik} > 0 \text{ then } (\tau_{ik} = \tau_{xk} \& \tau_{2k} = 0)$   
 $\text{else } (\tau_{ik} = 0 \& \tau_{2k} = \tau_{xk})$  ;  
 $\text{if } s_{yk} > 0 \text{ then } (\tau_{3k} = \tau_{yk} \& \tau_{4k} = 0)$   
 $\text{else } (\tau_{3k} = 0 \& \tau_{4k} = \tau_{yk})$  ; (5)  
 $\text{if } s_{zk} > 0 \text{ then } (\tau_{5k} = \tau_{zk} \& \tau_{6k} = 0)$   
 $\text{else } (\tau_{5k} = 0 \& \tau_{6k} = \tau_{zk})$

Вектор управляющего момента  $M_o^{do}$ , формируемого ДУО относительно полюса О, в проекциях на оси ССК вычисляется по формуле

$$M_o^{do} = \{M_{ox}^{do}, M_{oy}^{do}, M_{oz}^{do}\} = \sum_{j=1}^6 r_j^d \times P_j. \quad (6)$$

Введем обозначения  $M_i^m$  для максимальных значений модулей моментов ДУО по каналам управления и необходимых далее стандартных функций:

ограничения

$$y = \text{Sat}(a, x) = \begin{cases} x & |x| \leq a \\ a \cdot \text{Sign} x & |x| > a; \end{cases}$$

$$y = \text{Sats}(a, k, x) = \begin{cases} k x & |x| \leq a/k \\ a \cdot \text{Sign} x & |x| > a/k; \end{cases}$$

релейной гистерезисной функции общего вида

$$y(t) = \text{Relh}(a, b, \lambda, x(t)) = \begin{cases} \text{Sign} x(t) & |x| > \lambda b \\ 0 & |x| < b; \end{cases}$$

$$\text{Relh}(a, b, \lambda, x(t_0)) = a \in \{-1, 0, 1\};$$

функции “генерации” импульсов длительностью  $\tau \leq T_u$ , начиная с момента времени  $t_k$ :

$$y(t) = \text{Puls}(t_k, \tau, x_k) = \\ = \begin{cases} x_k & t_k \leq t < t_k + \tau \\ 0 & t_k + \tau \leq t < t_{k+1} \end{cases};$$

функции фиксации сигнала на периоде  $T_u$ :  $Zh(T_u, x_k) = \text{Puls}(t_k, T_u, x_k)$ ; функции квантования по уровню

$$y = \text{Qntr}(a, x) = aE[(x/a) + 0,5 \cdot \text{Sign} x],$$

где  $a$  – шаг дискретизации и  $E[\cdot]$  – символ целой части числа  $[\cdot]$ . Далее используются

стандартные обозначения для значений скалярного дискретного сигнала  $y(t_k) = y_k$  и  $y(t_s) = y_s$ , соответственно в моменты времени  $t_k = k \cdot T_u$  и кратные им моменты времени  $t_s = s \cdot T_q$  с периодом измерения  $T_q$ , при чем кратность  $n_q = T_u / T_q$  – целое положительное число, где целые числа  $k, s \in N_0 \equiv [0, 1, 2, \dots]$ .

Модель блока ДУС – измерителя проекций вектора абсолютной угловой скорости корпуса КА  $\omega(t) = \{\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)\}$  на оси ССК представляет совокупность трех однотипных каналов измерения  $\omega_i(t)$ ,  $i = x, y, z$ . Математическое описание процесса измерения проекции угловой скорости  $\omega(t)$  дается соотношениями

$$T^\omega \dot{\omega}^s(t) + \omega^s(t) = \omega(t);$$

$$\omega^s(t) = Sats(b^\omega, k^\omega, \omega^s(t) + \omega^b);$$

$$\omega_s^\sigma = \omega^s(t_s) + \omega_s^n; \quad \omega_s^d = Qntr(d^\omega, \omega_s^\sigma), \quad (7)$$

где  $T_q$  – период квантования измеряемого сигнала по времени;  $T^\omega$  – постоянная времени, интегрально характеризующая физическую инерционность процесса измерения угловой скорости;  $b^\omega$  и

$$k^\omega \in [0,9; 1,1], \quad k^\omega = \text{const} -$$

уровень ограничения сигнала по модулю и нормированный коэффициент усиления нелинейной статической характеристики;  $\omega^b$  – медленно изменяющийся “дрейф нуля” статической характеристики;  $\omega^n$  – дискретный шум измерения, который считается гауссовским стохастическим дискретным процессом с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma^\omega$ ;  $d^\omega$  – шаг квантования выходного сигнала;  $\omega_s^d$  – дискретный выходной сигнал.

Модель контура управления положением панелей СБ с ДУП и РШП принимается в виде совокупности дискретной подсистемы

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^c &= \gamma_k^c - Qntr(d^\gamma, \gamma_k); \\ \dot{\gamma}_k^d &= Qntr(d^\gamma, Satp(b_p^\gamma, k_p^\gamma Relhp(a^\gamma, b_p^\gamma, \lambda_\gamma, \varepsilon_k^c))); \\ \dot{\gamma}_k^d &= D^\gamma(T^\gamma, \dot{\gamma}_k^d, \dot{\gamma}_{k-1}^d) \equiv (\dot{\gamma}_k^d - \dot{\gamma}_{k-1}^d)/T^\gamma; \\ \dot{\gamma}_{-1}^d &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

и кусочно-непрерывной части

$$\dot{\gamma}(t) = Puls(t_k, T^\gamma, \dot{\gamma}_k^d); \quad \dot{\gamma}(t) = Zh(T_u, \dot{\gamma}_k^d), \quad (9)$$

с начальными условиями  $\gamma(t_0) = \gamma_0$  и  $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ . Здесь  $\gamma_k^c$  является дискретным командным сигналом и в дополнении к стандартным использованы функции

$$Satp(a, x) = \begin{cases} Sat(a, x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases};$$

$$\begin{aligned} Relhp(a, b, \lambda, x) &= \\ &= \begin{cases} Relh(a, b, \lambda, x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

### Задача параметрического синтеза

После отделения КА от разгонного блока и раскрытия панелей СБ в момент времени  $t = t_0$  вектор угловой скорости принимает некоторое значение  $\omega(t_0) \in S_\omega$  из ограниченной выпуклой области  $S_\omega$ . Пусть заданы постоянные командные значения  $\omega_i^c$  проекций вектора угловой скорости КА на оси ССК, которые должны достигаться с заданной точностью

$$|\omega_i(t) - \omega_i^c| \leq \delta_\omega \quad \exists t \geq t_0 + T_r$$

для некоторой приемлемой длительности  $T_r$ . Особенности выполнения этого режима для КА типа Sesat заключаются в одновременном развороте упругих панелей СБ относительно корпуса КА на угол  $3\pi/2$ . При этом тензор инерции  $J$  КА изменяется и проявляется вектор  $M_o^p$  момента инерционно-гироскопических сил.

Оператор осреднения с одинаковыми весами только  $n_q$  последних измерений  $y$ ,

сигнала с получением оценки  $\bar{y}_k$ , оптимальной по методу наименьших квадратов, называемый обычно алгоритмом осреднения координат (АОК), имеет описание

$$\bar{y}_k = \text{MS}(y_s) \equiv \left( \sum_{s=k-n_q+1}^k y_s \right) / n_q; \quad n_q = T_u / T_q;$$

$$k = E[s/n_q], \quad k, s \in N_0.$$

АОК используется для многократной дискретной фильтрации измерений угловых скоростей  $\omega_i(t)$ ,  $i = x, y, z$  корпуса КА – выходных дискретных сигналов  $\omega_{is}^d$  ДУС по каналам управления. С помощью оператора такого осреднения измерений модель процессов дискретной фильтрации выходных сигналов ДУС представляются в виде

$$\bar{\omega}_{ik}^d = \text{MS}(\omega_{is}^d), \quad i = x, y, z. \quad (10)$$

Для КА Sesat было принято  $T_q = 1$  с и  $T_u = 4$  с, поэтому здесь кратность периодов  $n_q = 4$ .

Алгоритмы формирования дискретных командных сигналов  $v_{ik}$  в моменты времени  $t_k$  на включение РД в парах ДУО по соответствующим каналам принимаются в виде

$$v_{ik} = v_{ik}^d = k_i^\omega (\omega_i^c - \bar{\omega}_{ik}), \quad i = x, y, z. \quad (11)$$

Здесь  $k_i^\omega$  – коэффициенты усиления по каналам, которые формируются по соотношениям

$$k_i^\omega = k_p \cdot c_i^\omega; \quad k_p = P_f^m / P^m, \quad (12)$$

где  $k_p$  – настраиваемый параметр для компенсации вариации тяги РД;  $c_i^\omega$  – значения коэффициентов усиления при минимальном уровне  $P_f^m$  тяги РД.

Задача состоит в расчете значений коэффициентов усиления  $k_i^\omega = k_p c_i^\omega$ , исходя из 2-х важнейших условиях – асимптотической устойчивости и точности СУО при завершении РУ. Используемый подход основан на аналитическом синтезе упрощенных моделей каналов управления и численном анализе пространственного движения упругого КА.

## Динамические свойства упругой конструкции

Линеаризованная относительно положения покоя в инерциальной системе координат непрерывная модель свободного (без внешних возмущающих моментов) управляемого движения КА в РУ при фиксированном положении СБ имеет вид

$$A_1 \{ \dot{\omega}, \ddot{\omega}, \dot{q}, \ddot{q} \} = B_1 \{ \omega, \dot{q}, q \} + \{ M, 0, 0 \}, \quad (13)$$

$$\text{где } A_1 = \begin{bmatrix} A^o & 0 \\ 0 & I_{2n^4} \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^o \end{bmatrix};$$

$$B^o = \begin{bmatrix} -D & -W \\ I_{2n^4} & 0 \end{bmatrix}$$

и вектор  $M = M_0^{ad} = \{M_x, M_y, M_z\}$ . Для расчета передаточных функций КА, как объекта управления, система (13) приводится к стандартной форме линейной управляемой системы  $\dot{x} = Ax + Bu; \quad y = Cx$ , где в данном случае  $x = \{ \omega, \dot{q}, q \}$ ,  $u = M$  и матрицы  $A = A_1^{-1} B_1$ ;  $B = A_1^{-1} \{ I_3, 0 \}$ ;  $C = [I_3, 0]$ . Для построения логарифмических частотных характеристик (ЛЧХ) непрерывной системы от входа  $u_i$  к выходу  $y_i$ ,  $i = x, y, z$  использованы специализированные алгоритмы, основанные на QR-алгоритме Уилкинсона с приведением к верхней форме Хессенберга и алгоритмом Розенброка. Парциальные частоты колебаний панелей СБ КА Sesat таковы:

$$\Omega_{kz} = [0,7067; 0,8208; 1,221; 3,218; 4,619; 9,038; 9,453; 9,6; 12,67; 19,52] \text{ p/c, } k = 1,2.$$

Собственные (резонансные) частоты  $\omega_k$  упругих колебаний конструкции КА совпадают с модулями мнимых частей полюсов передаточных функций объекта по каналам управления. Антирезонансные частоты определяются как модули мнимых частей нулей этих передаточных функций и различаются по каналам управления.

## Линеаризация объекта с ШИМ управления

Линеаризация непрерывного объекта (13) при управлении  $u(t, t_k, v_k) = M(t, t_k, v_k)$  с “идеальным” ШИМ командного векторного

сигнала  $v_k = \{v_{ik}\}$ , представленного в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t, t_k, v_k); \quad (14)$$

$$u_i(t, t_k, v_{ik}) = \begin{cases} M_i^m \operatorname{Sign} v_{ik} & t_k \leq t \leq t_k + \tau_{ik} \\ 0 & t_k + \tau_{ik} \leq t < t_{k+1} \end{cases};$$

$$M_i^m = \text{const} > 0; \tau_{ik} = \operatorname{Sat}(T_u, |v_{ik}|),$$

когда фронты импульсов управления  $u_i(t, t_k, v_{ik})$  считаются прямоугольными, параметры модуляционной характеристики ШИМ (4) принимают значения  $\tau_m = 0$ ,  $\tau^m = T_u$  и запаздывание  $T_{zu}^d = 0$ , основывается на матричной формуле Коши [3]. При условиях

$$\tau_k \ll T_u; \quad T_u \ll 2\pi/|\lambda_s|, \quad (15)$$

где  $\lambda_s$  – собственные значения матрицы  $A$  непрерывно-дискретного объекта (14), приближенная дискретная модель движения этого объекта такова:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d v_k;$$

$$A_d = \exp(T_u A); \quad B_d = A_d B \operatorname{diag}\{M_i^m\}. \quad (16)$$

Данной модели можно придать форму эквивалентной дискретной системы с постоянным значением эквивалентного управления на основном цикле дискретности. Действительно, в обозначениях  $B_d^e = B_d T_u$  и  $u_k^e = v_k / T_u$  линеаризованная дискретная модель объекта управления (16) представляется в виде  $x_{k+1} = A_d x_k + B_d^e u_k^e$  с эквивалентным управлением  $u_k^e$ , постоянным на всем полуинтервале времени  $T_k$ . Условие (15) для упругой модели движения КА обычно выполняется лишь приближенно и для числа тонов колебаний панелей СБ  $n^q \leq 2$ , т.к. собственные частоты более высоких тонов превышают значение  $\omega_{k3} \approx 1.22 \text{ p/c}$  и период таких колебаний уже соизмерим с периодом управления  $T_u = 4 \text{ с.}$

### Параметрический синтез упрощенных моделей

Выполнен расчет ЛЧХ и исследованы динамические свойства линейного дискрет-

ного объекта управления (16). Анализ полученных результатов свидетельствует о существенном изменении ЛЧХ по каналам рыскания и крена в зависимости от положения панелей СБ для всех тонов, и незначительную зависимость ЛЧХ упругого КА по каналу тангажа от положения панелей СБ для первых двух тонов их упругих колебаний.

Дискретная одноканальная модель движения КА, как твердого тела, с линеаризованной ШИМ управляющего момента представляется в виде

$$x_{k+1} = x_k + b_d v_k = x_k + b_d^e u_k^e, \quad (17)$$

где  $b_d = M^m / J$ ;  $b_d^e = b_d T_u$ ;  $u_k^e = v_k / T_u$  и индекс канала опущен. Простейшая нелинейная модель замкнутого канала управления КА без учета запаздывания в РД, инерционности и дискретности обработки измерений ДУС, а также всех нелинейностей системы, кроме идеальной ШИМ в (14), с командой  $\omega_k^c = 0$  и переменной  $x_k = \omega_k$  представляется в виде  $x_{k+1} = x_k - b_d \operatorname{Sat}(T_u, k^\omega x_k)$ . Несложно установить условия устойчивости положения равновесия  $x_k = 0$  этой модели. Выберем функцию Ляпунова  $V(x_k) = x_k^2/2$  и вычислим ее первую разность в силу этого разностного уравнения:

$$\Delta V(x_k) = v_{k+1} - v_k = -(b_d/2) \cdot \operatorname{Sat}(T_u, k^\omega x_k) \times x_k (2 - k^\omega b_d \cdot \operatorname{Sat}(T_u, k^\omega x_k)/(k^\omega x_k))$$

Очевидно, что  $\operatorname{Sat}(T_u, k^\omega x_k)/(k^\omega x_k) \leq 1$ ,  $\operatorname{Sat}(T_u, k^\omega x_k)x_k > 0$  при  $k^\omega > 0$  и  $x_k \neq 0$ , а также  $V(0) = \Delta V(0) = 0$ . При условии  $0 < k^\omega b_d < 2$  выполнены все условия асимптотической устойчивости положения равновесия  $x_k = 0$  в методе функций Ляпунова, что приводит к условию устойчивости замкнутого контура по коэффициенту усиления  $k^\omega$ :

$$0 < k^\omega < \bar{k}^\omega \equiv 2/b_d = 2J/M^m. \quad \text{Простейшая линеаризованная дискретная модель (17) при законе управления (11) и рассогласовании}$$

$$\mathbf{e}_k = \omega_k^c - \mathbf{x}_k$$

принимает вид

$$\mathbf{e}_{k+1} = (1 - b_d k^\omega) \mathbf{e}_k.$$

Условие ее асимптотической устойчивости  $|1 - b_d k^\omega| < 1$  полностью совпадает с условием асимптотической устойчивости для нелинейной непрерывно-дискретной модели.

Ограничения значений коэффициентов  $k_i^\omega$  снизу определяются требуемой точностью  $\delta_\omega$  стабилизации КА при завершении РУ и минимально реализуемой длительностью  $\tau_m$  включения РД. Оценка нижнего значения коэффициентов такова:  $k_i^\omega \geq \tau_m / \delta_\omega$ . В результате приходим к следующим диапазонам допустимого выбора коэффициентов  $c_i^\omega$  по каналам управления в рамках простейшей модели КА, как твердого тела:  $\tau_m / \delta_\omega < c_i^\omega < \bar{k}_i^\omega$ ,  $i = x, y, z$ , которые не зависят от конкретного значения тяги РД.

Линеаризованная модель пространственного движения КА в РУ с учетом только первого тона ( $n^q = 1$ ) упругих колебаний каждой панели СБ, инерционности блока ДУС и запаздывания в управлении РД ДУО описывается векторно-матричными соотношениями

$$\mathbf{A}_2 \{\dot{\omega}^s, \ddot{\omega}, \ddot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}\} = \mathbf{B}_2 \{\omega^s, \omega, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}\} + \{0, \mathbf{M}_k^c(t), 0, 0\};$$

$$\mathbf{u}_k(t) = \begin{cases} \mathbf{v}_{k-1} & t \in [t_k, t_k + T_{zu}^d] \\ \mathbf{v}_k & t \in [t_k + T_{zu}^d, t_{k+1}] \end{cases};$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{k}^\omega (\mathbf{r}_k - \chi \bar{\mathbf{w}}_k^s), \quad (18)$$

$$\text{где } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_\omega^* & \mathbf{T}_\omega^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}^s \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{T}_\omega^* = \mathbf{I}_3 / T^\omega; \quad \mathbf{M}_k^c(t) = \{\mathbf{M}_{ik}^c(t)\} = \{\mathbf{u}_{ik}(t) \mathbf{M}_i^m\} / T_\omega;$$

$$\mathbf{u}_{ik}(t) = \{\mathbf{u}_{ik}(t)\}; \quad \mathbf{k}^\omega = \text{diag}\{\mathbf{k}_i^\omega\}; \quad \chi = \text{diag}\{\chi_i\};$$

$$\mathbf{r}_k = \{\mathbf{w}_{ik}^c\}; \quad \bar{\mathbf{w}}_k^s = \{\bar{\mathbf{w}}_{ik}^s\} = \mathbf{MS}(\bar{\mathbf{w}}_s^s); \quad \bar{\mathbf{w}}_{ik}^s = \mathbf{MS}(\mathbf{w}_{is}^s)$$

и матрица  $\chi$  является индикатором замыкания системы. Соответствующая матрица  $\mathbf{A}_d$  эквивалентной однократной дискретной системы с периодом  $T_u$  рассчитывается по известной методике [3]. При значении  $\chi = \mathbf{I}_3$ , эта матрица используется для спектрального анализа устойчивости и качества замкнутой системы, а при значениях  $\chi_i = 0$  и  $\chi_j = 1, j \neq i$  с помощью ее получается модель разомкнутой дискретной системы для частотного анализа устойчивости и качества управления в РУ по  $j$ -му каналу.

Расчеты по модели (18) показали, что для КА Sesat влияние упругости панелей СБ наиболее существенно в канале тангажа. Для этого канала при различных значениях коэффициентов  $c_z^\omega$  в табл. 1 приводятся значения запасов устойчивости по амплитуде  $\Delta Lm$  и фазе  $\Delta\phi$ , а на рис. 3 представлены дискретные ЛЧХ при декременте  $\delta = 0.01$  упругих колебаний панелей СБ для их номинального положения, т.е. при  $\gamma = 0$ .

### Параметрический синтез полной модели

С помощью разработанного в среде Matlab программного обеспечения [1] были выполнены численные исследования динамики КА Sesat в РУ и завершающий параметрический синтез законов управления основного контура для полной нелинейной непрерывно-дискретной модели (1) – (12). При этом время разгона привода вращения панелей СБ до номинальной скорости  $\gamma^c = 8,04 \text{ угл.мин/}$

Таблица 1. Значения запасов устойчивости по амплитуде и фазе

Тангаж	$\delta = 0.03$		$\delta = 0.01$	
	$c_z^\omega, c^2 / \text{угл.мин}$	$\Delta Lm, \text{dB}$	$\Delta\phi^\circ$	$\Delta Lm, \text{dB}$
0.2075	20,5199	87,0383	10,8568	87,0383
0.415	14,4993	84,0747	4,8362	84,0747

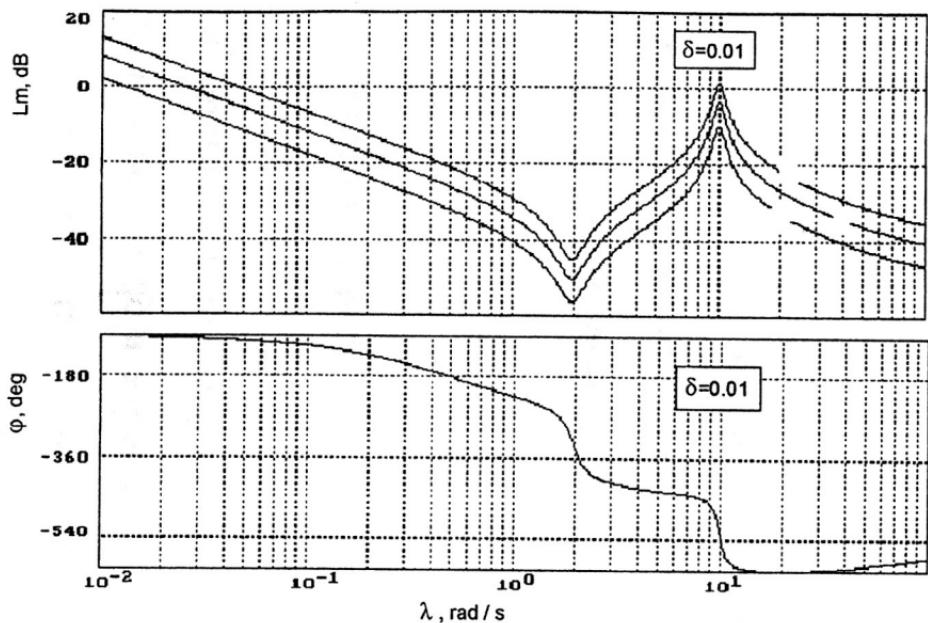


Рис. 3. ЛЧХ по каналу тангажа: а –  $c_z^\omega = 0,2075$ ; б –  $c_z^\omega = 0,415$ ; в –  $c_z^\omega = 0,7475$

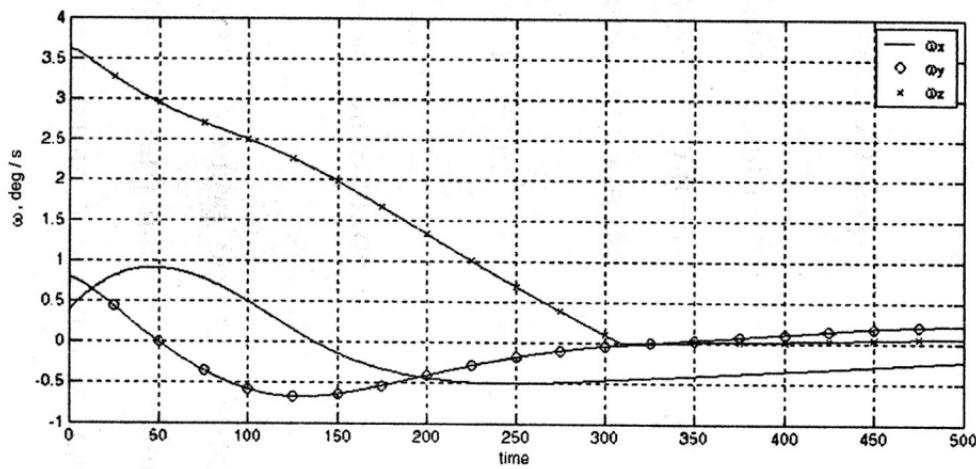


Рис. 4. Угловые скорости корпуса КА в РУ

с составляло  $T^* = 0,0625$  с, значения командных скоростей  $\omega_x^c = \omega_z^c = 0$  °/с;  $\omega_y^c = 0,2$  °/с и анализировались различные типовые варианты начальных условий движения как для корпуса КА, так и для координат тонов колебаний панелей СБ. Например, при задании начальных условий по координатам тонов в виде

$q_1(0) = \{q_{11}, q_{12}, q_{13}\} = \{0,2, 0,3, -0,2\}$ ;  $\dot{q}_1(0) = \{0, 0, 0\}$  – для первой СБ,  
 $q_2(0) = \{q_{21}, q_{22}, q_{23}\} = \{-0,2, 0,3, 0,1\}$ ;  $\dot{q}_2(0) = \{0, 0, 0\}$  – для второй СБ,  
некоторые численные результаты, характеризующие движение корпуса КА в РУ представлены на рис. 4 и рис. 5, а переходные процессы по тонам колебаний в начале РУ – на рис. 6. В результате были выбраны параметры дис-

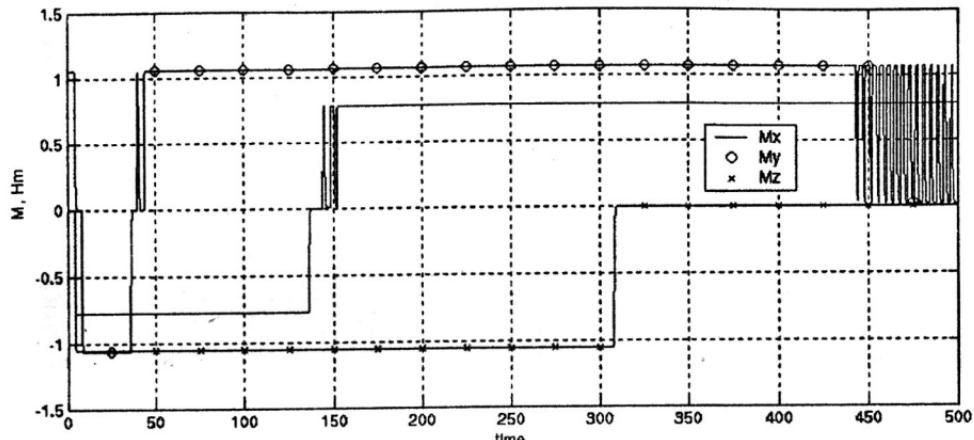


Рис. 5. Управляющие моменты ДУО в РУ

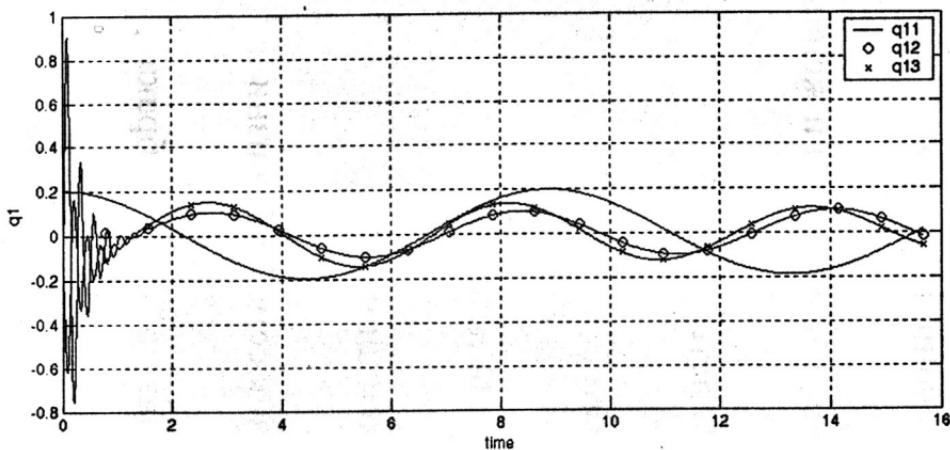


Рис. 6. Колебания первой панели СБ по первым трем тонам, первые 16 сек

крайних законов управления, которые гарантируют устойчивое движение КА Sesat в РУ с приемлемым временем его завершения при декременте колебаний панелей СБ  $\delta = 0,005$ , что значительно меньше значения, принятого при проектировании этого спутника.

### Заключение

Представлена модель пространственного движения КА в РУ с ДУО на основе РД с широтно-импульсным управлением и одновременным разворотом упругих панелей СБ при цифровом управлении. Решена задача параметрического синтеза дискретных алгоритмов

управления КА в РУ при малом декременте колебаний крупногабаритных панелей СБ, приведены некоторые результаты анализа динамики КА связи Sesat с в этом режиме. Созданные методики и программное обеспечение используются в исследовании начальных режимов управления спутниками связи нового поколения – с крупногабаритными панелями СБ и трансформируемыми антеннами зонтичного типа, по заказу НПО ПМ.

Работа поддержана РФФИ (проект 04-01-96501) и Президиумом РАН (Программа фундаментальных исследований № 19 “Управление механическими системами”).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутырин С.А., Самов С.Е. Моделирование движения деформируемой конструкции спутника *Sesat* // Сб. трудов II Всероссийской научной конференции "Проектирование научных и инженерных приложений в среде Matlab". Т. 2. М.: ИПУ РАН, 2004.
2. Somov Ye.I., Butyrin S.A., Anshakov G.P. et al. Dynamics and flight support of a vehicle Ikar control system at orbiting Globalstar satellites // Control Engineering Practice. 2003. V. 11. No. 5.
3. Самов Е.И. Робастная стабилизация упругих космических аппаратов при неполном дискретном измерении и запаздывании в управлении // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 2.

## NONLINEAR DYNAMICS OF A FLEXIBLE SATELLITE AT INITIAL DAMPING

© 2005 S.Ye. Somov

Samara State Aerospace University

Problems for parametric synthesis of discrete algorithms by the reaction engines' width-impulse control of a flexible spacecraft at its initial damping mode, are considered. Results on dynamic research of the communication satellite *Sesat* with large-scale solar array panels at this mode, are presented.