УДК 62-50

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО И СУБОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ МЕТОДОМ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ЭКСТРЕМУМОВ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

© 2005 В.Е.Вохрышев

Самарский государственный технический университет

Рассматривается синтез оптимального и субоптимального по быстродействию управления линейными динамическими объектами с использованием функции переключения, содержащей линейную комбинацию фазовых координат и их экстремальные значения.

В теории и практике автоматического управления динамическими объектами к числу обычно рассматриваемых показателей качества относится в первую очередь время затухания переходных процессов в системе, то есть быстродействие. В связи с этим проблема поиска новых путей и методов синтеза оптимального и субоптимального по быстродействию управления динамическими объектами, раскрывающих не использованные резервы существующих систем и направленных на снижение сложности технической, алгоритмической и программной реализации, по-прежнему привлекает внимание специалистов в области автоматического управления [1].

Критерий оптимального по быстродействию управления имеет вид

$$J = \int_{t_1}^{t_2} dt = \min$$

и должен принимать минимальное значение на траекториях движения объекта при условии наложения ограничений на управление и/или фазовые координаты.

Анализ известных методов синтеза систем на основе приведенного критерия показывает, что все они связаны с выявлением инвариантов, присущих конкретным объектам, для которых синтезируется управление, и направлены на создание способов и процедур расчета, алгоритмическую и техническую реализацию синтезированных управлений.

Инварианты представляют собой некоторые функции или величины, остающиеся неизменными во время движения объекта в силу законов сохранения (энергии, количества импульса движения, момента количества движения, массы), которые справедливы для всех форм существования материи.

Так, процедура синтеза оптимального по быстродействию управления линейными объектами n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i + b_i u\,, \ |u| \le u_m\,, \ i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

методом фазового пространства [2,3] связана с определением инвариантного многообразия L_{n-1}, разбивающего фазовое пространство системы на два подпространства. Это многообразие представляет собой гиперповерхность (или ее часть) переключения в фазовом пространстве системы в зависимости от характера собственных значений матрицы коэффициентов a_{ik} объекта (1). Уравнение гиперповерхности имеет вид

$$M(x_i) = 0, \ \ i = \overline{1,n},$$

а управление представляется следующим образом:

$$u(x_i) = u_m sign(M(x_i)). \qquad (2)$$

В работе [4] в качестве инварианта для синтеза управления (3) предлагается использовать гиперплоскость.

В работе [5] в качестве инварианта выступает интегральный функционал от функции свободной составляющей с пределами от 0 до ∞ и номинально-заданного управляющего воздействия $U_н$.

В процедуре принципа максимума [6]

определение управления в виде $u=u(x_1, ..., x_n)$, т. е. решение задачи синтеза, сводится к установлению распределения знаков функций $\sum_{i=1}^{n} b_i \psi_i(t)$. Сами функции ψ_i определяются численными методами и выполняют также роль инварианта синтезированной системы.

Алгоритмические методы синтеза оптимального по быстродействию управления нелинейными объектами [7] предполагают аппроксимацию нелинейных функций в дифференциальном уравнении объекта комбинацией различных функций, а гиперповерхность переключения (инвариант), являющаяся законом управления, также аппроксимируется функциями, удобными для технической реализации.

Каждый из приведенных подходов обеспечивает решение прикладных задач синтеза оптимального по быстродействию управления со свойственными ему особенностями, достоинствами и издержками. Одни расширяют возможности физической реализации управления в замкнутых системах, другие упрощают процедуры аналитических расчетов, третьи расширяют класс объектов, для которых можно построить оптимальное по быстродействию управление.

Таким образом, актуальной здесь является не только сама проблема синтеза. Не менее важным оказывается поиск новых подходов к ее решению.

Понятно, что известными методами не исчерпываются все способы построения, расчета и реализации систем управления динамическими объектами по критерию быстродействия, поскольку здесь по-прежнему остаются проблемы, нуждающиеся в дальнейшем исследовании и последующем изучении возможностей более рационального их решения для автоматических систем различного назначения.

Ниже предлагается подход для построения оптимального и субоптимального по быстродействию управления замкнутыми линейными системами, основанный на использовании экстремумов фазовых координат и их диверсификации (варьировании и изменении их количества).

Задача синтеза формулируется следующим образом: определить закон управления $u(x_1, ..., x_n)$ (3), обеспечивающий перевод объекта (1) из заданного начального состояния в предписанное конечное (например, начало координат фазового пространства) за минимально возможное время с учетом ограничений на управление.

При оптимальном по быстродействию управлении объектами (1) оказывается, что каждая из фазовых координат проходит не менее чем один раз через экстремум или достигает его. Общее их количество не превышает в процессе управления величину $m = 2n - 1 + \sum_{i=1}^{n} i$, а при отработке скачка по управляемой координате (в позиционных системах) общее их количество всегда точно равно величине $m = n + \sum_{i=1}^{n} i$, что можно также считать инвариантом. Минимальное их количество равно $2n$, если изображающая точка в фазовом пространстве оказывается перед началом управления на гиперповерхности переключения.

Эти факты используются в предлагаемом методе синтеза. Для решения задачи на входе релейного элемента, установленного на входе объекта, формируется функция переключения в виде

$$M(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i), \qquad (3)$$

где $P_i(x_i) = x_{ik} + k_i(x_{ie} - x_{ik}) - x_i$, x_{ik}, x_{ie} – соответственно заданное конечное состояние объекта и экстремальные значения фазовых координат x_i, k_i - постоянные коэффициенты. При этом знак управления (2) определяется знаком линейной формы (3).

Если вектор конечного значения совпадает с началом координат фазового пространства, то уравнение (3) преобразуется к виду

$$M(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (k_i x_{ie}(t) - x_i). \qquad (4)$$

Переключения происходят, когда функция (4) обращается в нуль $M(x_i)=0$ или

$$x_1(t)+x_2(t)+...+x_n(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i x_{ie}(t). \quad (5)$$

В фазовом пространстве уравнение (5) - гиперплоскость, проходящая через точку с координатами $k_i x_{ei}(t)$, $i=\overline{1,n}$, и перпендикулярная единичному вектору $N(1,1,\dots,1)$.

В момент включения системы при t=0 экстремальные значения фазовых координат будут равны их начальным значениям, и функция (5) будет иметь вид:

$$M(0)=\sum_{i=1}^{n}(k_i x_{ie}(0)-x_i(0))= \\ =\sum_{i=1}^{n}(k_i-1)x_i(0) \quad (6)$$

Уравнение (6) определяет начальные условия и знак управления на первом интервале. В конце управления изображающая точка (ИТ) в фазовом пространстве переводится в начало координат, и правая часть уравнения (5) обращается в нуль:

$$\sum_{i=1}^{n}k_i x_{ie}(t_n)=0, \quad (7)$$

где t_n – время регулирования. Выражение (7) определяет окончание управления по переводу ИТ в заданную точку.

Из выражения (5) видно, что правая часть уравнения - величина переменная. В результате гиперплоскость (3) или (4) перемещается скачком в фазовом пространстве параллельно самой себе при появлении экстремумов. Для того чтобы количество переключений при этом было не более $(n\text{-}1)$, необходимо выбором коэффициентов k_i обеспечить попадание текущего вектора фазовых координат объекта в гиперплоскость переключения не более чем $(n\text{-}1)$ раз.

Для вычисления коэффициентов k_i решается система уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n}k_i x_{ie}(t_j^*)=\sum_{i=1}^{n}x_i(t_j),\ j=\overline{1,n}, \quad (8)$$

где $x_i(t_j)$ - значения фазовых координат в моменты переключения оптимального управления и в момент окончания управления t_n, $x_{ei}(t_j^*)$ - экстремальные значения фазовых координат в моменты времени, предшествующие моментам переключения оптимального управления, и в момент времени, предшествующий окончанию управления (они равны их значениям на предшествующих интервалах управления).

Алгебраическая система линейных уравнений n-го порядка (8) содержит n неизвестных коэффициентов k_i. Существование решения определяется неравенством нулю определителя системы (8). Учитывая, что столбцы определителя представляют собой линейно независимые векторы (экстремальные значения фазовых координат линейно независимы в силу линейной независимости самих фазовых координат), можно считать, что неравенство нулю главного определителя выполняется и, следовательно, задача вычисления коэффициентов k_i разрешима. Этот набор коэффициентов будет единственным, поскольку в каждом интервале управления значения $x_{ie}(t)$, $x_i(t)$ являются единственными. Этим доказывается признак необходимости функции (4).

Уравнение (8) является необходимым условием реализации оптимального по быстродействию управления, но недостаточным. Для его достаточности необходимо, чтобы знаки функции переключения (4) чередовались на интервалах управления. Это требование проверяется решением системы уравнений:

$$M(t_j)=\sum_{i=1}^{n}(k_i x_{ie}(t_j)-x_{ie}(t_j^*)),\ n>2,$$

и обеспечивается величиной управляющего воздействия u_m.

Использование в функции переключения (4) фазовых координат и их экстремальных значений в количестве, меньшем величины n, приводит к возникновению субоптимальных процессов в системе.

Таким образом, задача синтеза управления состоит в определении функции переключения (4), являющейся законом оптимального или субоптимального по быстродействию управления, и заключается в отыскании коэффициентов обратных связей и их зависимостей от граничных условий системы с помощью соотношения (10):

$$k_i = f(x_{i0}, x_{ik}).$$

Для этого необходимо определить значения координат $x_i(t_j)$, $j = \overline{1, n-1}$ в моменты переключения, а также экстремальные значения фазовых координат $x_{ei}(t_j^*)$ в моменты, предшествующие моментам переключения t_j и в конце управления t^*_n, и вычислить коэффициенты k_i, $i = \overline{1,n}$ для заданных значений граничных условий или в диапазоне их изменения.

Зависимость коэффициентов k_i от граничных условий исчезает, если величину управляющего воздействия поставить в линейную зависимость от экстремального значения выходной координаты:

$$u_m = \gamma \left| x_{1k} - x_{1k} \right|. \qquad (9)$$

В этом случае в системе реализуются субоптимальные по быстродействию процессы, если величина $\left|x_{1e} - x_{k1}\right| < \left|x_{1e} - x_{1k}\right|_{max}$, где $\left|x_{1e} - x_{1k}\right|_{max}$ - максимальная ошибка из допустимой области, и оптимальные, если $\left|x_{1e} - x_{1k}\right| = \left|x_{1e} - x_{1k}\right|_{max}$

Пример.

Объект описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = u, \text{ где } |u| \le u_m.$$

Граничные условия положим $x(0)=(x_{10},0,0)$, $x_k=(0,0,0)$.

Поскольку оптимальное управление является релейным, легко проинтегрировать исходные уравнения :

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{3} c_{ki} \tfrac{1}{(i-1)!} t^{i-1} - (-1)^k \tfrac{1}{6} t^3 u_m,$$

$$x_2(t) = c_{k2} + c_{k3} t - (-1)^k 0.5 t^2 u_m,$$

$$x_3(t) = c_{k3} - (-1)^k t u_m,$$

где c_{ki} - i-тая постоянная интегрирования k-го интервала управления, $k = \overline{1,3}$.

Решая систему уравнений, например, методом стыкования [4] можно определить моменты переключения управления, значения фазовых координат в моменты переключения, а также их экстремальные значения в эти моменты.

$$t_1 = \sqrt[3]{\frac{x_1(0)}{2u_m}}, \quad t_2 = 3t_1, \quad t_3 = 4t_1,$$

$$x_1(t_1) = x_1(0) - \frac{1}{6} t_1^3 u_m,$$

$$x_2(t_1) = -\frac{1}{2} t_1^2 u_m,\ x_3(t_1) = -t_1 u_m,$$

$$x_{1e}(t_1^*) = x_{1e}(0) = x_1(0),$$

$$x_{2e}(t_1^*) = 0, \quad x_{3e}(t_1^*) = 0,$$

$$x_1(t_2) = x_1(0) - \frac{11}{6} t_1^3 u_m,$$

$$x_2(t_2) = -\frac{1}{2} t_1^2 u_m,\ x_3(t_2) = t_1 u_m,$$

$$x_{1e}(t_2) = x_1(0),\ x_{2e}(t_2^*) = -u_m t_1^2,$$

$$x_{3e}(t_2^*) = -u_m t_1,\ x_{1e}(t_3^*) = x_1(0),$$

$$x_{2e}(t_3^*) = -u_m t_1^2,\ x_{3e}(t_3^*) = u_m t_1,$$

$$x_1(t_3) = 0,\ x_2(t_3) = 0,\ x_3(t_3) = 0.$$

Значения коэффициентов вычислим по уравнению (8):

$$k_1 x_{1e}(t_1^*) + k_2 x_{2e}(t_1^*) + k_3 x_{3e}(t_1^*) =$$
$$= x_1(t_1) + x_2(t_1) + x_3(t_1),$$
$$k_1 x_{1e}(t_2^*) + k_2 x_{2e}(t_2^*) + k_3 x_{3e}(t_2^*) =$$
$$= x_1(t_2) + x_2(t_2) + x_3(t_2),$$
$$k_1 x_{1e}(t_3^*) + k_2 x_{21e}(t_3^*) + k_3 x_{3e}(t_3^*) =$$
$$= x_1(t_3) + x_2(t_3) + x_3(t_3).$$

Полагая $|u_m|=1$, $x_1(0)=2$, $x_2(0)=x_3(0)=0$ и вычисляя значения фазовых координат в моменты переключения и их экстремальные значения, получим:

$$2k_1 + 0 + 0 = \frac{1}{3},$$
$$2k_1 - k_2 - k_3 = \frac{2}{3},$$
$$2k_1 - k_2 + k_3 = 0.$$

Отсюда находим $k_1 = \frac{1}{6}$, $k_2 = 0$, $k_3 = -\frac{1}{3}$.

На рис. 1 и 2 приведены оптимальные и субоптимальные процессы в системе, полученные методом цифрового моделирования в среде MathCAD. На рис. 1 представлены процессы во временной области (здесь выведены на плоский график выходная координата, функция переключения *M(t)* и управление *u(t))* для случаев, когда величина u_m равна $\frac{|x_{1e}|}{2}$, в соответствии с соотношением (9), а начальные условия взяты соответственно 2 и 1. Из рисунка видно, что в обоих случаях процессы заканчиваются за одно и то же время. Коэффициенты k_i при этом остаются без изменения.

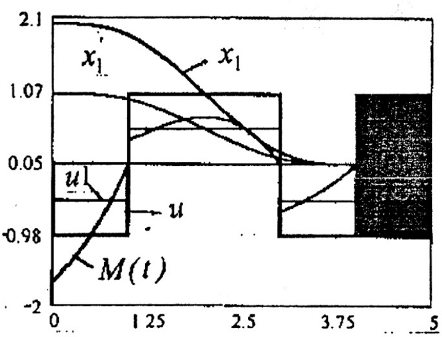

Рис. 1. Процессы в системе третьего порядка при u=±1, и u1=0.5,(пропорциональном начальному значению регулируемой координаты с коэффициентом 0.5)

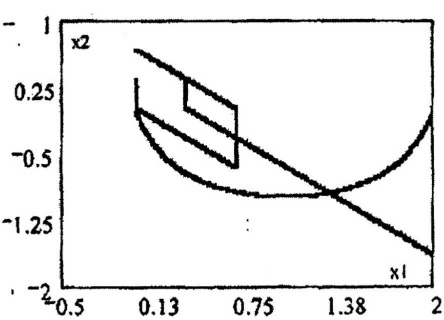

Рис. 2. Процессы на фазовой плоскости

Понятно, что во втором случае имеет место некоторая потеря быстродействия, поскольку здесь недоиспользуется диапазон управляющего воздействия.

В конце управления обеспечивается удержание выходной координаты в предписанном конечном состоянии переключениями управляющего воздействия с бесконечно большой частотой.

На рис. 2 смоделирована проекция фазовой траектории на плоскость x_1, x_2 и проекция следа плоскости переключения *M(t)*, на котором видны перемещения плоскости переключения в моменты времени появления экстремумов фазовых координат.

В заключение отметим, что использование предложенного метода синтеза позволяет строить простые и высокоэффективные управляющие устройства [8, 9]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов О.А.* Европейские конференции по управлению 1991-2003г.г. // Автоматика и телемеханика. 2004. №9.
2. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966.
3. *Павлов А.А.* Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.: Наука, 1966.
4. *Антомонов Ю.Г.* Оптимальные системы. Киев: Наукова думка, 1972.
5. *Авдеев О.Н.* Метод варьирования свободных функционалов и его применение в задачах синтеза систем автоматического управления. С-Пб, 1996.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г.. Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.

7. *Клюев А.С., Колесников А.А.* Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат. 1982.
8. Патент № 2113005 (РФ) Пневматический регулятор/*В.Е.Вохрышев.* Опубл. БИ 1998. Бюл. № 16.
9. Патент 2032925 РФ. Пневматическое устройство для построения автоколебательных самонастраивающихся систем / Авт. *В.Е.Вохрышев.* Опубл. БИ 1995, №10.

SYNTHESIS OF OPTIMAL AND SUBOPTIMAL DYNAMIC OBJECTS CONTROL BY SPEED FUNCTIONING WITH APPLICATION OF PHASE COORDINATES EXTREMES DIVERSIFICATION METHOD

© 2005 V.E.Vokhryshev

Samara State Technical University

The article considers the problems of synthesis of optimal and suboptimal dynamic objects control by speed functioning with application of switching function and linear combination of phase coordinates and their extreme qualities.