УДК 519.2

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ФАЗОКОДИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С РАВНОМЕРНЫМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ

© 2005 А.Н. Леухин

Марийский государственный технический университет

В работе приводится полное решение задачи синтеза дискретных фазокодированных сигналов с нулевыми боковыми лепестками циклической автокорреляционной функции (АКФ). Такие сигналы имеют равномерный энергетический спектр. Для заданной размерности N сигнала синтезируются все возможные кодовые комбинации при условии, что нулевой элемент кодированной последовательности равен единице, а также определяется их общее количество P.

Для решения ряда задач в радиотехнических системах используются сложные сигналы [1-5]. Основное требование при этом состоит в том, чтобы уровень максимального бокового лепестка должен быть минимальным (в идеальном случае равным нулю). Поэтому разработка эффективных методов синтеза сложных сигналов с хорошими корреляционными свойствами является актуальной задачей. Причем сигналы с идеальной корреляционной функцией имеют равномерный энергетический спектр. Особое значение среди сложных сигналов имеют дискретные фазокодированные последовательности с пик-фактором равным единице. Дискретный фазокодированный сигнал $\mathbf{\Gamma}=\{\gamma_n\}_{0,k-1}$ можно определить на основании выражения:

$$\gamma_n = \exp(i\varphi_n),\ n = 0,...,N-1, \qquad (1)$$

где фаза сигнала принимает любое значение из диапазона $\varphi_n \in [0;2\pi]$, N - количество кодовых элементов в сигнале, а модуль каждого кодового элемента равен 1, т.е. $|\gamma_n| = 1$.

Циклическую АКФ можно определить на основе выражения:

$$\eta_\tau = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_{n+\tau \ (\mathrm{mod}\ N)} \cdot \overset{*}{\gamma}_n,\ \tau = 0,1,...,N-1. \qquad (2)$$

В работе [2] приводятся некоторые известные фазокодированные сигналы, циклическая АКФ которых имеет нулевой уровень боковых лепестков: сигналы Френка, сигналы класса p и сигналы, ассоциированные с ЛЧМ сигналом. В работах [6-8] рассмотрены вопросы синтеза и обработки особого вида сигнала – композиционного контура из полного семейства элементарных контуров.

Однако на сегодня задача синтеза всех возможных фазокодированных сигналов с нулевым уровнем боковых лепестков для заданной размерности N не является решенной. Целью данной работы является решение этой задачи. Отметим, что полученные результаты ранее обсуждались в работах [9-11].

Для исключения “повернутых комбинаций” введем ограничение:

$$\gamma_0 = 1. \qquad (3)$$

Таким образом, требуется найти углы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N-1}$, такие чтобы выполнялось условие равенства нулю всех боковых отсчетов циклической АКФ:

$$\eta_0 = N,\ \eta_1 = 0,\ \eta_2 = 0,\ ...,\ \eta_{N-1} = 0. \qquad (4)$$

Записывая выражение энергетического спектра для фазокодированного сигнала $\mathbf{\Gamma}=\{\gamma_n\}_{0,k-1}$ как

$$|\rho_m|^2 = \left|\sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n \cdot \exp\left(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot n\right)\right|^2,$$

$$m = 0..N-1,$$

и учитывая, что

$$|\rho_0|^2 = |\rho_1|^2 = ... = |\rho_{N-1}|^2 = N,$$

получим систему уравнений

$$\sum_{n=1}^{N-1}\left[\begin{array}{l}\cos\left(\varphi_n-\frac{2\pi}{N}\cdot m\cdot n\right)+\\ +\sum\limits_{l=n+1}^{N-1}\cos\left(\varphi_n-\varphi_l+\frac{2\pi}{N}\cdot m\cdot(l-n)\right)\end{array}\right]=0, \qquad (5)$$

на основании которой и будем искать углы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}$.

Базисные решения

Анализируя систему уравнений (5) можно доказать, что для хотя бы одного решения должно выполняться условие:

$$\varphi_1=\varphi_{N-1},\ \varphi_2=\varphi_{N-2},\ \ldots,\ \varphi_{]N/2[}=\varphi_{]N/2[}, \qquad (6)$$

где $]\bullet[$ - означает целую часть числа. Такое решение назовем базисным.

Исходные базисные решения можно определить на основании выражений:

$$\varphi_{l,n}=\phi_l\cdot\left(n^2 \pmod{N_1}\right), \qquad (7)$$

где $N_1=\begin{cases}2N, & для\ N \pmod 2\equiv 0,\\ N, & для\ N \pmod 2\equiv 1.\end{cases}$

$n=0,1,2,\ldots,N-1$, $\phi_l=\frac{2\pi}{N_1}\lambda_l$, λ_l - число взаимно-простое с числом N_1, $l=1,2,\ldots,\varphi(N_1)$; $\varphi(N_1)$ - функция Эйлера.

Если размерность фазокодированного сигнала N является квадратом некоторого целого числа k, т.е. $N=k^2$, то исходными базисными решениями системы уравнений (5) будут также являться решения вида:

$$\varphi_{s,n}=\phi_s\cdot k\times \qquad (8)$$

$$\times\left[\left\{\begin{array}{l}\overbrace{0\cdot 1;1\cdot 1;\ldots;(k-1)\cdot 1;}^{k}\\ \overbrace{k\cdot 3;(k+1)\cdot 3;\ldots;(2k-1)\cdot 3;}^{k}\ldots;\\ \overbrace{\left(k^2-k\right)\cdot(2k-1);\ldots;\left(k^2-1\right)\cdot(2k-1)}^{k}\end{array}\right\}\pmod M\right],$$

где $M=\begin{cases}2k, & для\ k \pmod 2=0;\\ k, & для\ k \pmod 2=1.\end{cases}$

$\phi_s=\frac{2\pi}{N_1}\lambda_s$, λ_s - число взаимно-простое с числом M, $s=1,2,\ldots,\varphi(M)$, $\varphi(M)$ - функция Эйлера от числа M.

Кроме того, если k является четным числом, то кроме решений вида (7) и (8) существуют исходные базисные решения системы уравнений (5) вида:

$$\varphi_{s,n}=\phi_s\cdot k\times \qquad (9)$$

$$\times\left[\left\{\begin{array}{l}0;\overbrace{0;0;\ldots;0;}^{k/2}\overbrace{2\cdot 1;2\cdot 2;\ldots;2\cdot k;}^{k}\\ \overbrace{4\cdot(k+1);4\cdot(k+2);\ldots;4\cdot 2k;}^{k}\ldots;\\ \overbrace{2(k-1)\cdot(k-1)^2;\ldots;2(k-1)\cdot\left(k^2-k-1\right);}^{k-1}\\ \overbrace{0;0;\ldots;0}^{k/2}\end{array}\right\}\pmod{2k}\right],$$

где $\phi_s=\frac{2\pi}{N_1}\lambda_s$, λ_s - число взаимно-простое с числом k, $s=1,2,\ldots,\varphi(k)$.

Группа Галуа системы уравнений (5)

Можно доказать, что корни системы уравнений (5) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}$ удовлетворяют операциям взаимной замены – подстановкам, не нарушающим соотношения между корнями системы уравнений. Если индексы корней системы уравнений (5) $1,2,3,\ldots,N-1$ умножить на число λ взаимно-простое с числом N, то получим, что каждый n-ый корень, где $n=1,2,3,\ldots,N-1$, перейдет в новый корень с индексом $\lambda\cdot n \pmod N$.

Такую подстановку будем представлять в виде:

$$\mathbf{T}_{\lambda_l} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & N-1 \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ 0 & \lambda_l \cdot 1 \pmod{N} & \dots & \lambda_l \cdot (N-1) \pmod{N} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $l = 1, 2, \dots, \varphi(N_1)$, $\varphi(N)$ - функция Эйлера. Совокупность подстановок вида

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{T}) = \left\{ \mathbf{T}_{\lambda_1}, \mathbf{T}_{\lambda_2}, \dots, \mathbf{T}_{\lambda_{\varphi(N)}} \right\}, \tag{11}$$

образует группу Галуа $\varphi(N)$-го порядка, где $l = 1, 2, \dots, \varphi(N)$.

Если размерность фазокодированного сигнала $N = k^2$, то решение системы уравнений (5) можно рассматривать в виде матрицы:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \mathbf{k-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_{k-1} \\ \varphi_k & \varphi_{k+1} & \dots & \varphi_{2k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{(k-1)\cdot k} & \varphi_{(k-1)\cdot k+1} & \dots & \varphi_{k^2-1} \end{bmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{k-1} \end{bmatrix},$$

для которой допустимыми являются подстановки вида:

$$\mathbf{S}_{\lambda_l} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ 0 & \lambda_l \cdot 1 \pmod{k} & \dots & \lambda_l \cdot (k-1) \pmod{k} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где λ_l - число взаимно-простое с числом k, $l = 1, 2, \dots, \varphi(k)$, $\varphi(k)$ - функция Эйлера. Данные подстановки меняют местами столбцы матрицы $\mathbf{\Phi}$, в результате чего получаем новое решение системы уравнений (5) в матричном представлении вида $\mathbf{\Phi}_\lambda = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{k-1} \end{bmatrix} \pmod{k}$.

Совокупность подстановок вида (12)

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{S}) = \left\{ \mathbf{S}_{\lambda_1}, \mathbf{S}_{\lambda_2}, \dots, \mathbf{S}_{\lambda_{\varphi(k)}} \right\} \tag{13}$$

образует группу Галуа $\varphi(k)$-го порядка дополнительных подстановок.

В случае четных значений числа k группу Галуа подстановок корней системы уравнений (5), образованную выражениями (11),(13), можно дополнить. Вспомогательный индекс s определим из выражения $n = s - k/2 \pmod{N}$. С учетом такого циклического сдвига из матрицы $\mathbf{\Phi}$ можно получить матрицу

$\mathbf{\Psi} =$

$$= \begin{bmatrix} \varphi_{k^2-k/2+1} & \dots & \varphi_{k^2-1} & \varphi_0 & \dots & \varphi_{k/2-1} \\ \varphi_{k/2} & \varphi_{k/2+1} & \varphi_{k/2+2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \varphi_{k^2-k/2-1} & \varphi_{k^2-k/2-1} & \varphi_{k^2-k/2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \dots \\ \mathbf{k-2} \\ \mathbf{k-1} \end{bmatrix},$$

для которой допустимыми являются подстановки вида:

$$\mathbf{V}_{\lambda_l} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ 0 & \lambda_l \cdot 1 \pmod{k} & \dots & \lambda_l \cdot (k-1) \pmod{k} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где λ_l - число взаимно-простое с числом k, $l = 1, 2, \dots, \varphi(k)$, $\varphi(k)$ - функция Эйлера. Данные подстановки меняют местами строки матрицы $\mathbf{\Psi}$, в результате чего получаем новое решение системы уравнений (5) в матричном представлении вида $\mathbf{\Psi}_\lambda^{\mathrm{T}} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{k-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \pmod{k}$.

Совокупность подстановок вида (14)

$$\mathrm{Gal}(\mathbf{V}) = \left\{ \mathbf{V}_{\lambda_1}, \mathbf{V}_{\lambda_2}, \dots, \mathbf{V}_{\lambda_{\varphi(k)}} \right\} \tag{15}$$

образует группу Галуа $\varphi(k)$-го порядка дополнительных подстановок.

После применения подстановок вида (15) к решению системы уравнений (5), представленного в виде матрицы $\mathbf{\Psi}$, необходимо выполнить обратный переход от матрицы Ψ к матрице Φ, используя выражение $n = s - k/2 \pmod{N}$.

Небазисные решения системы уравнений (5)

Применяя допустимые подстановки корней системы уравнений (5) в виде (11,13,15) к исходным базисным решениям в виде (7-9), мы получим все возможные базисные решения. Общее количество базисных решений системы уравнений (5) размерности N обозначим через L. Для каждого полученного базисного решения можно получить еще N не базисных решений, используя преобразования вида:

$$\psi_{n+l\cdot N, N-n+m \pmod{N}} = \\ = \varphi_{l,m} - \varphi_{l,n} \pmod{360^o}, \qquad (16)$$

где $l = 0..L-1$, $n = 0..N-1$, $m = 0..N-1$.

Общее количество возможных решений системы уравнений (15) обозначим через P. Выше было показано, что следует различать 3 случая:

1. Для произвольного N, где $N \neq k^2$, k - целое положительное число определим общее количество решений:

$$P = \varphi(N)N, \qquad (17)$$

причем количество базисных решений для нечетного N равно $L = \varphi(N)$, а количество базисных решений для четного N равно $L = \varphi(2N)$.

2. Для $N = k^2$, где k - нечетное число количество возможных решений:

$$P = \left(\varphi(N)\varphi(k) + \frac{\varphi(N)}{2}\varphi(k)\right)\cdot N = \\ = \frac{3\varphi(N)}{2}\varphi(k)\cdot N, \qquad (18)$$

причем количество базисных решений в этом случае равно $L = \dfrac{3\varphi(N)}{2}\varphi(k)$.

3. Для $N = k^2$, где k - четное число количество возможных решений:

- в случае четных $k/2$

$$P = \\ = \left(\varphi(2N)\varphi(k) + \frac{\varphi(N)}{4}\varphi(2k)\varphi(k) + \frac{\varphi(N)}{2}\varphi(k)\right)\times \\ \times\frac{N}{2} = \frac{\varphi(N)\cdot\varphi(k)}{4}\cdot\left(5+\varphi(k)\right)\cdot N, \qquad (19,а)$$

количество базисных решений в этом случае равно $L = \dfrac{\varphi(N)\varphi(k)}{2}\left(5+\varphi(k)\right)$.

- в случае нечетных $k/2$:

$$P = \\ = \left(\varphi(2N)\varphi(k) + \frac{\varphi(N)}{4}\varphi(2k)\varphi(k) + \frac{\varphi(N)}{4}\varphi(k)\right)\times \\ \times\frac{N}{2} = \frac{\varphi(N)\cdot\varphi(k)}{8}\cdot\left(9+2\varphi(k)\right)\cdot N, \qquad (19,б)$$

количество базисных решений в этом случае:

$$L = \frac{\varphi(N)\cdot\varphi(k)}{4}\cdot\left(9+2\varphi(k)\right).$$

Особый случай $N = 4$

Рассмотрим теперь особый случай, при котором длина кодовой последовательности $N = 4$. Система уравнений (5) с учетом существования базисного решения может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} 2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + 1 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2); \\ -\cos\varphi_2 - 1 = 0. \end{cases} \qquad (20)$$

Откуда следует, что $\varphi_2 = 180^o$, а φ_1 и, следовательно, φ_3 могут принимать любое значение из диапазона $\left[0^0;360^0\right]$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_3 \in \left[0^0;360^0\right]$. Поэтому существует бесконечно много базисных решений вида

$$0^o, \varphi_1, 180^o, \varphi_1, \qquad (21,а)$$

где φ_1 может принимать любое значение из диапазона $\left[0^0;360^0\right]$. С учетом преобразований (16) решениями системы уравнений (20) будут также являться решения вида:

$$0^o, \varphi_1, 0^o, \varphi_1 + 180^0. \qquad (21,б)$$

Подчеркнем, что только в особом случае, т.е. при $N = 4$, можно синтезировать сколь угодно много кодовых последовательностей, имеющих нулевые боковые лепестки циклической АКФ, т.е. $P = \infty$, причем количество базисных решений в этом случае равно $L = \infty$. Во всех остальных случаях, с учетом ограничения $\varphi_0 = 0^o$, количество кодовых последовательностей будет конечным.

Взаимно-корреляционные функции (ВКФ) полученных фазокодированных последовательностей

Среди множества P фазокодированных последовательностей размерности N в случае нечетных N можно выделить алфавит "квазиортогональных" сигналов, ВКФ которых будет равномерной и иметь уровень $1/\sqrt{N}$. Таким образом, синтезированные сигналы можно использовать не только для решения задач разрешения и оценки параметров (основное требование к сигналам в этом случае - нулевой уровень циклической АКФ [8]), но и для решения задачи распознавания (основное требование в этом случае – выбор алфавита ортогональных сигналов [8]).

Выводы

В данной работе решены следующие задачи:

1. Определено количество P всех возможных фазокодированных последовательностей заданной размерности N с нулевыми боковыми лепестками циклической АКФ и равномерным энергетическим спектром.

2. Разработан обобщенный метод синтеза всех возможных P фазокодированных последовательностей для заданной размерности N. Показано, что все известные на сегодня фазокодированные сигналы могут быть синтезированы в соответствии с разработанным единым методом.

3. Синтезированы все возможные фазокодированные последовательности для заданной размерности N.

4. Из полного множества фазокодированных последовательностей в случае нечетных размерностей N выделен алфавит сигналов, имеющих равномерную ВКФ с уровнем $1/\sqrt{N}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №04-01-00243

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лезин Ю.С.* Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М.: Сов. радио, 1963.
2. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. М.:Радио и связь, 1985.
3. *Вакман Д.Е., Седлецкий Р.М.* Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. М.: Сов. радио, 1973.
4. *Кук Ч., Бернфельд. М.* Радиолокационные сигналы. М.: Сов. радио, 1970.
5. *Свердлик М.Б.* Оптимальные дискретные сигналы. М.: Сов. радио, 1975.
6. *Furman Ya. A.* Visual structure contours with special spectrocorrelation properties// Pattern Recognition and Image Analysis. 1996. №4.
7. *Фурман Я.А., Роженцов А.А.* Класс кодирующих последовательностей, не приводящих к корреляционным шумам// Радиотехника. 2000. №5.
8. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов/ *Я.А. Фурман, А.В. Кревецкий, А.К. Передреев, А.А. Роженцов, Р.Г. Хафизов, И.Л. Егошина, А.Н. Леухин*; Под ред. Я.А. Фурмана. 2-е изд. иепр. М.: Физматлит, 2003.
9. *Леухин А.Н.* Глобальный подход к синтезу фазокодированных последовательностей с нулевыми боковыми лепестками периодической АКФ// Современная радиоэлектроника в ретроспективе идей В.А. Котель-

никова. М.: изд-во МЭИ, 2003.
10. *Леухин А.Н.* Полное решение задачи синтеза фазокодированных сигналов с нулевыми боковыми лепестками циклической автокорреляционной функции// Марийск. гос. техн. ун-т. Йошкар-Ола, 2004. Деп. В ВИНИТИ 26.02.2004, № 344-В2004.
11. *Леухин А.Н.* Синтез N-позиционных фазокодированных сигналов с идеальными корреляционными свойствами// Радиолокационная техника: устройства, станции, системы, РЛС'2004/ Научн.-практ. конф. Программа конференции и тезисы докладов. Муром, 2004.

FULL SOLUTION OF PHASE-CODED SIGNALS SYNTHESIS PROBLEM WITH EQUAL ENERGETIC SPECTRUM

 A.N. Leukhin

Mari State Technical University

Full solution of phase-coded signals synthesis problem with zero lateral petals of autocorrelation function (ACF) is offered this paper. Such signals have equal energetic spectrum. All possible coded combinations are synthesized for the given dimension N of signal under condition that the zero element of coded sequences is equal to unit, and general amount P of such sequences is also determined.