УДК 574.2 + 51.001.572

ЭФФЕКТЫ НАПРАВЛЕННОЙ ПЕРКОЛЯЦИИ В ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СЛУЧАЙНЫМ РАЗМНОЖЕНИЕМ И РАСПАДОМ

© 2005 Д.И. Иудин

Нижегородский государственный университет

Рассматривается математическое описание направленной перколяции (фильтрования) в процессе заселения территории.

Вписанные в природную среду объекты техногенеза, а таковыми, в частности, являются и промышленно-транспортные комплексы, с физической точки зрения, представляют собой сильно неравновесные открытые системы потокового типа. Потоки энергии и вещества, проходящие через эти системы, обеспечивают возникновение в них эффектов самоорганизации – образования макроскопических диссипативных структур [1]. В последнее время в области интересов физики оказывается все большее число нелинейных распределенных сред, структурообразование в которых демонстрирует в широком диапазоне параметров и масштабов пространственно-временной скейлинг – один из фундаментальных видов симметрии физического мира, играющих формообразующую роль во Вселенной [2]. Пространственно-временной скейлинг характеризуется сильными, спадающими по степенному закону, корреляциями, которые типичны для критических явлений. Критический режим в процессах самоорганизации оказывается самосогласованным и самонастраивающимся, причем динамика критических флуктуации непосредственно связана с появлением фракталов в конфигурационном пространстве нелинейных распределенных систем при кинетических переходах. Исследования явлений такого рода были объединены недавно общим направлением названным самоорганизованной критичностью (self-organized criticality) [3] и позиционирующим скейлинговый аспект самоорганизации как ярчайшую интригу современной физической парадигмы, вызывающую колоссальный интерес [4].

Яркими примерами критической динамики в потоковых системах являются взрывная неустойчивость и кинетический переход типа “заселения среды” в неравновесных системах с размножением, распадом и диффузией. Порог взрывной неустойчивости определяется конкуренцией между процессами размножения и распада.

Если скорости размножения или распада флуктуируют, а размножающееся вещество способно к диффузии, расчет порога взрывной неустойчивости становится сложной проблемой, близкой к кругу вопросов теории неупорядоченных сред и перколяционной теории. Анализ перколирующих систем как геометрического образа самосогласованной критической динамики представляется здесь особенно актуальным. Дело в том, во-первых, что подобно диссипативным структурам, перколяционные структуры также оказываются результатом фазовых превращений. Во-вторых, геометрические параметры перколяционных кластеров вблизи порога слабо зависят от деталей мелкомасштабного устройства, что делает перколяцию чрезвычайно привлекательной в прикладном аспекте.

Итак, сосредоточенная система со случайным размножением и распадом описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$n = -\alpha n + f(t)n, \qquad (1)$$

в котором α – постоянная скорость распада, а $f(t)$ – случайно меняющаяся во времени скорость размножения с заданными статистическими характеристиками. Говорят, что для системы (1) превышен порог взрывной неустойчивости если средняя по ансамблю реализаций плотность вещества $(n(t))$ неограниченно возрастает со временем [5-12].

Добавление в уравнение (1) диффузионного члена обобщает модель на случай распределенных систем, в которых возможны процессы распада, размножения и диффузии некоторого вещества. Предполагается, что скорость распада однородна в пространстве и во времени, а размножение происходит лишь внутри определенных центров размножения, которые случайно возникают во времени в случайных точках среды, но имеют одинаковую форму, интенсивность и продолжительность жизни. Соответствующей математической моделью является уравнение [5]:

$$n = -\alpha n + f(\mathrm{r},t)n + D\Delta n, \qquad (2)$$

где n – плотность вещества, D – коэффициент его диффузии. Флуктуирующее поле $f(\mathrm{r},t)$ задается суммой расположенных в случайных точках (r_i, t_i) одинаковых импульсов $\Theta(\mathrm{r},t)$:

$$f(\mathrm{r}, t) = \sum_{\mathrm{i}} \Theta(\mathrm{r} - \mathrm{r}_i; t - t_i)\ . \qquad (3)$$

Среднее число импульсов, приходящихся в единицу времени на единицу объема, постоянно и равно ξ. Функция $\Theta(\mathrm{r}, t)$ имеет вид

$$\Theta(\mathrm{r},t) = J\Omega(\mathrm{r})\Psi(t), \qquad (4)$$

где J – характеризует интенсивность центра размножения, $\Omega(\mathrm{r}) = 1$ при $\mathrm{r} \le \mathrm{r}_0$ и $\Omega(\mathrm{r}) = 0$ при $\mathrm{r} > \mathrm{r}_0$ и $\Psi(t) = 1$ при $0 < t < \tau_0$ и $\Psi(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > \tau_0$, так что r_0 и τ_0 дают, соответственно, характерный пространственный размер отдельного центра и время его жизни.

Существенным параметром задачи является безразмерная пространственно-временная концентрация центров размножения £, определяемая как

$$\mathrm{J} = \xi\, \mathrm{r}_0^{\,d}\, \tau_0\ , \qquad (5)$$

где d – размерность среды. Когда параметр £ мал, £ << 1, различные центры размножения действуют независимо друг от друга и расчет порога взрывной неустойчивости осуществляется в рамках стандартного анализа в приближении среднего поля [5]. По мере роста £ различные центры размножения начинают перекрываться в пространственно-временном континууме и их взаимное влияние становиться существенным: последующие центры начинают действовать на фоне пятен населенности оставленных предыдущими центрами. Появляются пространственно-временные цепочки центров размножения – кластеры размножающегося вещества эволюционирующие на фоне практически нулевой населенности. Пространственно-временные масштабы этих кластеров расходятся при стремлении параметра £ к некоторому критическому значению, соответствующему порогу направленной перколяции. Характерная критическая динамика модельной системы в одномерном случае представлена на рис. 1, где ось времени направлена вертикально вверх. При численном моделировании уравнения (2) в одномерном случае оно было дополнено слабой постоянной накачкой, поддерживающей населенность на уровне шума и нелинейным диссипативным членом, обеспечивающим механизм запорогового ограничения роста населенности:

$$n' = e - \alpha n + f(\mathrm{r}, t)n + D\Delta n - \beta n^2. \qquad (6)$$

При численном исследовании уравнения (2) в двумерном случае рассматривалась ситуация, когда центры размножения являются короткоживущими, т.е. $\tau_0 << \tau_0^{\,2}/D$. В этом случае центры размножения можно считать слабыми при выполнении условия $J << J^*$, где $J^* = \tau_0^{-1}$ для $d = 1, 2, 3$ [9-12]. При расчете порога взрывной неустойчивости в случае центров слабой интенсивности можно воспользоваться, в качестве первого приближения, условием равенства средней по объему скорости размножения f и скорости распада α. Поскольку средняя скорость размножения есть

$$f = \xi \int \Theta(\mathrm{r},t)\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}t = £J, \qquad (7)$$

где в двумерном случае $£ = \xi\, \pi\, \mathrm{r}_0^{\,2}\, \tau_0$, этот способ дает следующее значение безразмерной критической концентрации центров размножения:

$$£_{cr}^{(0)} = \alpha / J\ . \qquad (8)$$

Выражение (8) не учитывает корреляционных эффектов и, поэтому, далеко не всегда может служить разумным первым приближением

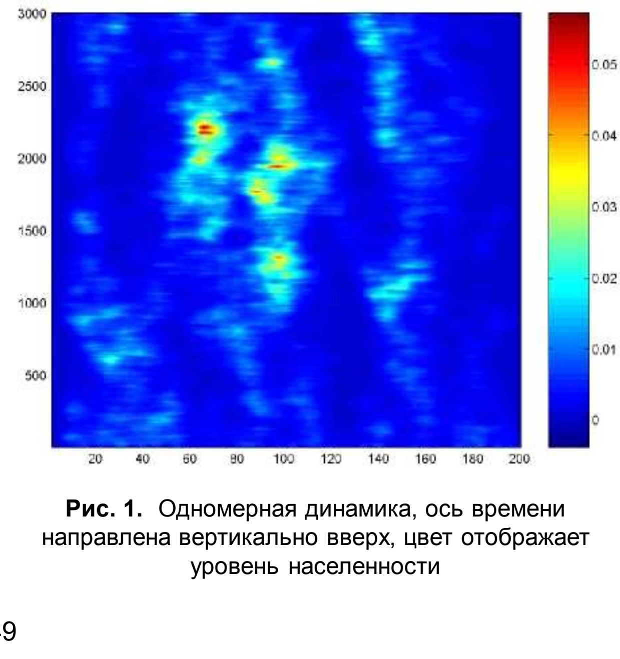

Рис. 1. Одномерная динамика, ось времени направлена вертикально вверх, цвет отображает уровень населенности

к истинной величине порога взрывной неустойчивости. Корреляционные статистические эффекты понижают порог взрыва, причем это понижение может оказаться весьма существенным.

Компьютерное моделирование позволяет найти истинную величину порога £$_{cr}$ при фиксированной амплитуде импульса размножения J и сравнить ее со среднеполевым значением (8). На рис. 2 представлена зависимость эффективности флуктуационного понижения порога взрывной неустойчивости £$_{cr}^{(0)}$ / £$_{cr}$ = $[\alpha/J]$ / £$_{cr}$ от самой истинной величины порога £$_{cr}$. При этом обращает на себя внимание хорошо воспроизводимый максимум эффективности при значении £$_{cr}$ ≈ 0,474, соответствующем порогу направленной перколяции. С ростом амплитуды J эффективность флуктуационного понижения порога взрывной неустойчивости растет.

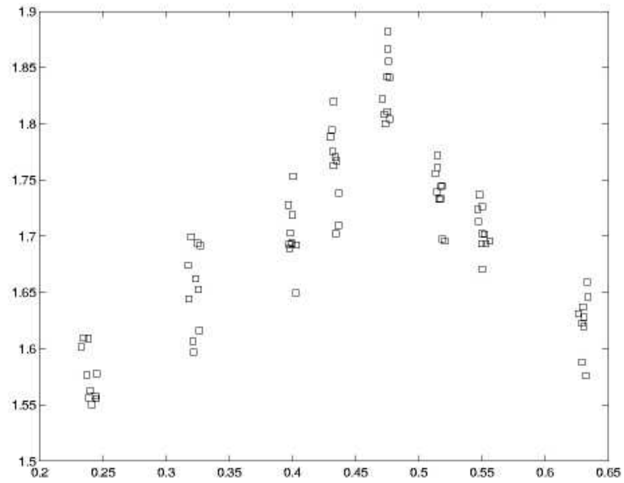

Рис. 2. Зависимость эффективности флуктуационного понижения порога взрывной неустойчивости £$_{cr}^{(0)}$ / £$_{cr}$ = $[\alpha/J]$ / £$_{cr}$ от истинной величины порога £$_{cr}$ при фиксированной амплитуде импульса размножения J

Рис. 3 воспроизводит эволюцию средней населенности для дискретного аналога уравнения (6) на квадратной решетке. Соответствующая динамика населенности в одной отдельно взятой ячейке решетки показана на рис. 4.

Характерный вид пространственного распределения населенности в некоторый фиксированный момент времени представлен на рис. 5. Заметим, что среднее по пространству и времени значение параметра активности составляет величину ‹f(r, t)› ≈ 0,08, которая значительно уступает коэффициенту линейной диссипации.

Динамика системы со случайным размножением и распадом, эволюционирующей вблизи порога направленной перколяции, обнаружила очень интересную зависимость от размеров системы.

Введем параметр $\widetilde{U}$, характеризующий пространственную локализацию размножающегося вещества и равный отношению максимальной на решетке и усредненной по времени населенности к населенности усредненной и по времени и по узлам решетки $\widetilde{U} = \max(n)/\{n\}$. Рис. 6 демонстрирует зависимость введенного параметра локализации $\widetilde{U}$ от скорости распада α при различных значениях линейного масштаба модельной решетки L. Очевидный эффект роста простран-

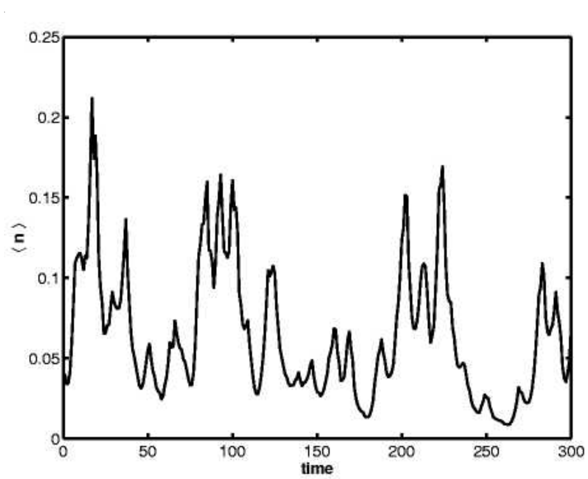

Рис. 3. Эволюция средней населенности на квадратной решетке 70 × 70 при r_0 = 9; τ_0 = 5; J = α = 0,3; β = 5 • 10^{-2}; e = 3 • 10^{-3} и D = 10^{-2}

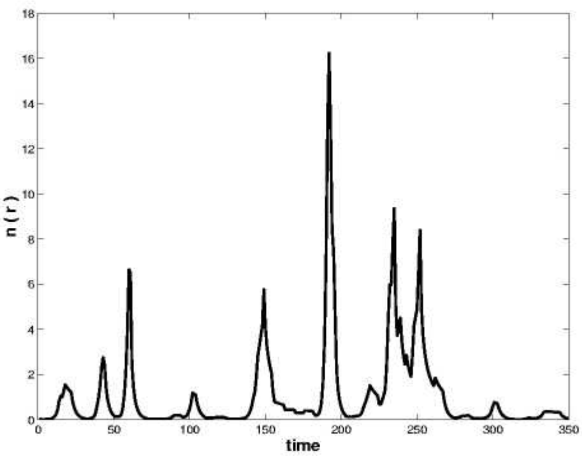

Рис. 4. Динамика населенности в одной отдельно взятой ячейке решетки

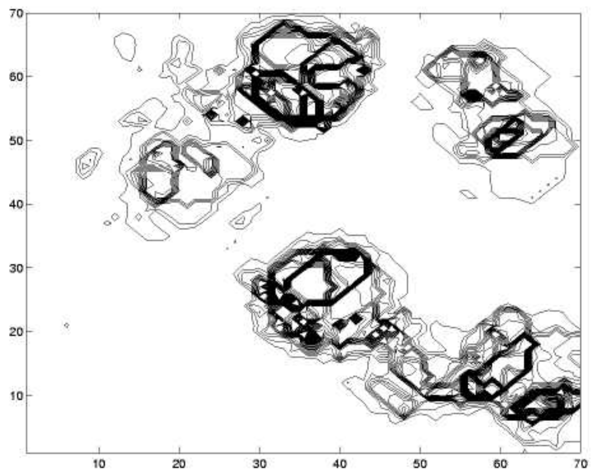

Рис. 5. Пространственное распределение населенности в фиксированный момент времени

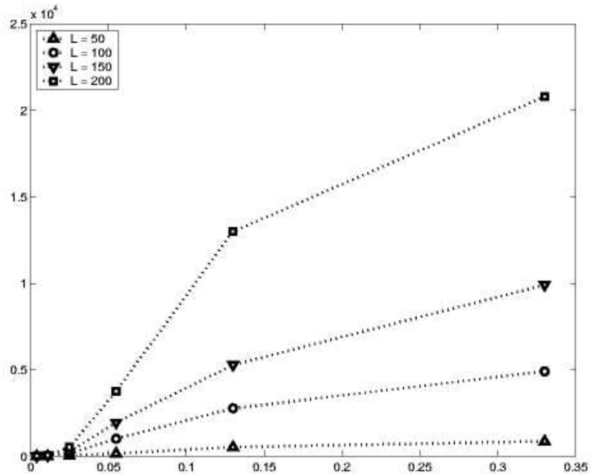

Рис. 6. Зависимость параметра локализации U от скорости распада б при различных- значениях линейного масштаба модельной решетки *L*

ственной локализации обусловлен фрактальностью пространственно-временных цепочек из пятен размножающегося вещества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васипьев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
2. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. М.: Научно-издательский центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
3. *Bak P.* How Nature Works (The Science of Self-organized Criticality). Oxford: Univ. Press, 1997.
4. *Jensen H.J.* Self-Organized Criticality. Cambridge: Univ. Press, 1998.
5. *Михайлов А.С., Упоров И.В.* Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // УФН. 1984. Т. 144(1).
6. *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.
7. *Трубецков Д.И.* След вдохновений и трудов упорных. Саратов: Изд-во Гос. УНЦ “Колледж”, 2001.
8. *Трахтенгерц В.Ю., Иудин Д.И., Григорьев А.Н.* О фрактальной динамике активных сред // Нелинейные волны, 2002 / Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2003.
9. *Иудин Д.И., Трахтенгерц В.Ю.* Динамическая перколяция в активных средах // Нелинейные волны, 2004 / Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005.
10. *Иудин Д.И.* Динамическая перколяция в системах со случайным ростом // Труды научной конференции по радиофизике. Нижний Новгород: ННГУ, 2004.
11. *Иудин Д.И.* Эффекты направленной перколяции в сети клеточных автоматов // Труды научной конференции по радиофизике. Нижний Новгород: ННГУ, 2004.
12. *Iudin D.I., Trakhtengerts V.Y.* Percolation dynamics in active systems // Proceeding of the International Conference “Frontiers of Nonlinear Physics 2004”. Nizhny Novgorod; St. Peterburg, 2004.

EFFECTS OF DIRECTIONAL PERCOLATION IN ECOLOGICAL SYSTEMS WITH CASUAL REPRODUCTION AND DISSOCIATION

© 2005 D.I. Iudin

Nizhniy Novgorod State University

The mathematical modeling of directional percolation in process of colonization of area are considered.