УДК 533.6.011/8

ЭВОЛЮЦИОННО УСТОЙЧИВЫЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ АКУСТИЧЕСКИ АКТИВНЫХ СРЕДАХ

© 2005 В.Г. Макарян [1], Н.Е. Молевич[2]

[1] Самарский государственный аэрокосмический университет
[2] Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

Проведено численное моделирование эволюции газодинамических возмущений типа “ступенька” и “колокол” в неравновесной среде с отрицательной полной вязкостью. Получены эволюционно устойчивые стационарные структуры, в том числе доказана эволюционная устойчивость автоволнового сильно асимметричного импульса с экспоненциальным задним и разрывным передним фронтами.

В термодинамически равновесном газе структура слабых ударных волн хорошо известна. Эволюция газодинамических возмущений малой амплитуды описывается уравнением Бюргерса

$$v_y + \Psi v v_\varsigma = \mu v_{\varsigma\varsigma}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) имеет стационарное решение в виде ступеньки с шириной фронта ~ mm. Локализованное возмущение эволюционирует в треугольную ударную волну конечной площади и бесконечно малой амплитуды. Периодическое возмущение сначала трансформируется в пилообразную волну, а затем быстро затухает, становится синусоидальным и далее диссипирует по законам линейной акустики [1].

Акустика термодинамически неравновесных сред существенно отличается от акустики равновесных сред [2]. Прежде всего, это отличие связано с возможной инверсией коэффициента второй вязкости. Примерами подобных сред являются молекулярные лазерные среды, неизотермическая плазма, химически активные смеси. Среды с отрицательной вязкостью являются акустически активными, причём в ограниченном спектральном диапазоне. Например, для типичной лазерной смеси CO_2-N_2-He=1:2:3 (нормальные условия) при неравновесном возбуждении колебательных степеней свободы до эффективных колебательных температур T_V ~700 К (степень неравновесности $S \approx 0{,}1$) зависимость акустического инкремента от частоты имеет вид, показанный на рис. 1.

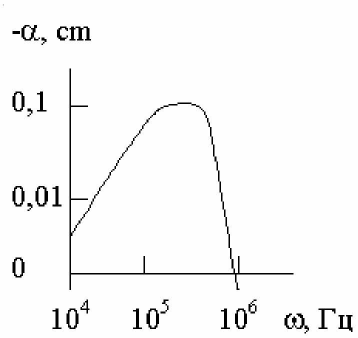

Рис. 1. Частотная зависимость акустического инкремента

Кроме того, если в равновесной среде высокочастотная скорость звука u_∞ всегда больше низкочастотной u_0, то в неравновесной среде ($S \neq 0$) может меняться не только знак диссипации, но и знак дисперсии (рис. 2), как это впервые показано в [3].

При $S > S_{th}$ происходит инверсия коэф-

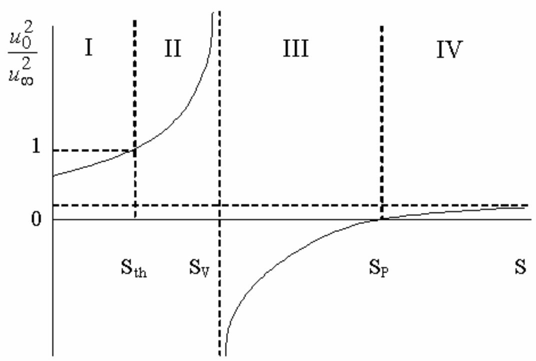

Рис. 2. Влияние неравновесности среды на дисперсию скорости звука

фициента второй вязкости. При $S = S_V$, $S = S_P$ низкочастотные теплоёмкости $C_{V0} = 0, C_{P0} = 0$, соответственно. В области I дисперсия и вязкость положительны. В других областях вторая вязкость отрицательна и среда может быть акустически активной. В области II дисперсия отрицательна и равновесная скорость звука может существенно превышать замороженную. В остальных областях дисперсия положительная, причём в области III низкочастотный звук не может распространяться, а в области IV возможна тепловая неустойчивость.

Новые вязкостно-дисперсионные свойства неравновесных сред должны учитываться не только в задачах линейной акустики. В подобных средах возможно существование стационарных структур, существенно отличных от ударно-волновых структур типа ступеньки с монотонным фронтом. Ранее исследование этих структур проводилось на основе нелинейных уравнений, полученных во втором или третьем газодинамическом приближении отдельно для низкочастотных и высокочастотных возмущений. Примерами таких уравнений являются уравнение с нелинейной вязкостью [4]

$$\widetilde{\beta}_0 \widetilde{v}_{zz} + (\widetilde{\mu}_\Sigma + K_1 \widetilde{v})\widetilde{v}_z + K_2 \widetilde{v} + K_3 \widetilde{v}^2 + K_4 \widetilde{v}^3, \quad (2)$$

получаемое в низкочастотном приближении, или уравнение Бюргерса с источником и интегральной дисперсией [5]

$$\widetilde{v}_y + \Psi_\infty \widetilde{v}\widetilde{v}_\varsigma = \widetilde{\mu}_\infty \widetilde{v}_{\varsigma\varsigma} - \widetilde{\alpha}_\infty \widetilde{v} - \widetilde{\beta}_\infty \int \widetilde{v} d\varsigma, \quad (3)$$

получаемое в высокочастотном приближении.

Стационарные структуры уравнений (2) и (3) в акустически активной среде (в условиях, когда полная низкочастотная вязкость $\widetilde{\mu}_\Sigma < 0$, коэффициент нелинейной вязкости $K_1 > 0$, коэффициент усиления высокочастотного звука $\alpha_\infty < 0$) при отрицательных коэффициентах низкочастотной и высокочастотной дисперсии $\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_\infty$ представлены на рис. 3 и 4, соответственно.

Недостатком этих уравнений является то, что на их основе нельзя описать нестационарную эволюцию возмущений с произвольным спектром. Спектр стационарных структур, ими описываемых, оказывается шире области применимости этих уравнений. Кроме того, стационарные решения высокочастотного уравнения (3) оказываются эволюционно неустойчивыми по отношению к возмущениям большего периода.

В [6] получено уравнение

$$\begin{aligned} &C_{V\infty}\tau_0(v_{tt} - u_\infty^2 v_{xx} - u_\infty \Psi_\infty v_{xx}^2 - \frac{\mu_\infty}{\rho_0} v_{xxt})_t + \\ &+ C_{V0}(v_{tt} - u_0^2 v_{xx} - u_\infty \Psi_0 v_{xx}^2 - \frac{\mu_0}{\rho_0} v_{xxt}) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

описывающее с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде нелинейную эволюцию акустического возмущения произвольного спектрального состава в колебательно-возбуждённом газе с релаксационным процессом вида

$$\frac{dE}{dt} = \frac{E_e - E}{\tau} + Q, \quad (5)$$

где E – энергия колебательных степеней свободы молекул, E_e – её равновесное значение, tt - время релаксации; Q – источник энергии, поддерживающий термодинамическую неравновесность в системе; $u_\infty = \sqrt{\gamma_\infty T_0/m}$, $u_0 = \sqrt{\gamma_0 T_0/m}$ – скорости высокочастотного $(\omega >> \omega_0 \equiv \tau_0^{-1}\sqrt{C_{P0}C_{V0}/C_{P\infty}C_{V\infty}})$ и низкочастотного (ww<<ww$_0$) звуков; $\gamma_\infty = C_{P\infty}/C_{V\infty}$, $\gamma_0 = C_{P0}/C_{V0}$ – высокочастотный и низкочастотный показатели адиабаты; $C_{V0} = C_{V\infty} + C_K + S\tau_T$, $C_{P0} = C_{P\infty} + C_K + S(\tau_T + 1)$ – низкочастотные теплоемкости в колебательно-возбужден-

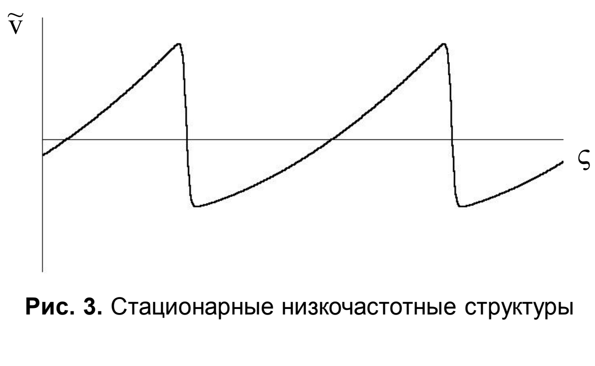

Рис. 3. Стационарные низкочастотные структуры

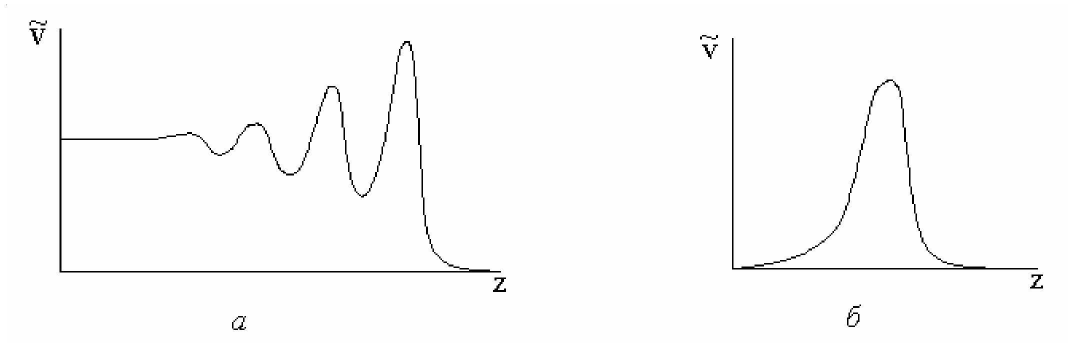

Рис. 4. Стационарная высокочастотная структура

ном газе при постоянном объёме и давлении; T_0, ρ_0, τ_0 – невозмущенные значения температуры, плотности и времени релаксации; m – молекулярная масса; $S = (E_0 - E_{e0})/T_0 = Q\tau_0/T_0$ - степень неравновесности среды; $\tau_0 = \tau(T_0, \rho_0)$; $C_K = (dE_e/dT)_{T=T_0}$ – равновесная колебательная теплоёмкость; $\tau_T = \partial \ln \tau_0 / \partial \ln T_0$; $\mu_\infty = 4\eta/3 + \chi m(1/C_{V\infty} - 1/C_{P\infty})$, $\mu_0 = 4\eta/3 + \chi m(1/C_{V0} - 1/C_{P0})$ – высокочастотный и низкочастотный вязкостно-телопроводностный коэффициент; $\Psi_\infty = (\gamma_\infty + 1)/2$ – высокочастотный коэффициент квадратичной нелинейности; Ψ_0 – низкочастотный коэффициент квадратичной нелинейности, который зависит от степени неравновесности S и может быть даже отрицательным. При $S = 0$ этот коэффициент имеет простой вид $\Psi_0 = (\gamma_0 + 1)/2$. Уравнение (4) получено в предположении слабой дисперсии, то есть малости параметра $\tilde{m} = (u_0^2 - u_\infty^2)/u_\infty^2 \sim \theta << 1$.

Для волн, бегущих в одном направлении ($\tilde{v} = v/u_\infty$, $\varsigma = (x - u_\infty t)/u_\infty \tau_0, y = \theta t/\tau_0$), уравнение (4) преобразуется к виду

$$(\tilde{v}_y + \frac{\Psi_\infty}{2}\tilde{v}_\varsigma^2 - \tilde{\mu}_\infty \tilde{v}_{\varsigma\varsigma})_\varsigma - \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}}(\tilde{v}_y + \frac{\tilde{m}}{2}\tilde{v}_\varsigma + \frac{\Psi_0}{2}\tilde{v}_\varsigma^2 - \tilde{\mu}_0 \tilde{v}_{\varsigma\varsigma}) = 0, \qquad (6)$$

где $\tilde{\mu} = \mu/2\tau u_s^2 \rho_0$. При $S = 0$ уравнение (6) совпадает с известным релаксационным уравнением [7], но в последнем не учитывалось отличие μ_0 от μ_∞ и Ψ_0 от Ψ_∞.

В низкочастотном приближении ($\partial \tilde{v}/\partial y \sim \theta \tilde{v}$) уравнение (6) сводится с точностью до величин $\sim \theta^3$ к модифицированному уравнению Курамото-Сивашинского

$$\tilde{v}_y + \Psi_0 \tilde{v}\tilde{v}_\varsigma = (\tilde{\mu}_0 + \tilde{\xi})\tilde{v}_{\varsigma\varsigma} + \tilde{\beta}_0 \tilde{v}_{\varsigma\varsigma\varsigma} + \tilde{\kappa}\tilde{v}_{\varsigma\varsigma\varsigma\varsigma}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) использовалось ранее для описания волновых процессов в плёнках жидкости, стекающих по наклонной плоскости, возмущений концентраций реагирующих веществ при химических реакциях и горении, волн электростатического потенциала в тороидальных системах и т.д. [8] Здесь оно получено применительно к колебательно-возбуждённому газу (или к любой среде с релаксационным процессом типа (5)). В (7) $\tilde{\xi} = \xi_0/2\rho_0 \tau_0 u_0^2$, где коэффициент второй вязкости

$$\xi_0 = \rho_0 \tau_0 C_{V\infty}(u_\infty^2 - u_0^2)/C_{V0} = P_0 \tau_0[(\tau_T - C_{V\infty})S + C_K]/C_{V0}^2. \qquad (8)$$

Если пренебречь малыми слагаемыми $\sim \tilde{\mu}_0^2, \tilde{\mu}_0 \tilde{\xi}$, то остальные коэффициенты в (7) $\tilde{\kappa} = C_{V\infty}\tilde{\beta}_0/C_{V0} = C_{V\infty}^2 \tilde{\xi}/C_{V0}^2$. При $C_{V0} > 0$ все эти коэффициенты отрицательны, если отрицателен коэффициент второй вязкости (8), т.е. при $(\tau_T - C_{V\infty})S + C_K < 0$.

В высокочастотном приближении ($\partial \tilde{v}/\partial y \sim \theta^{-1} \tilde{v}$) уравнение (6) сводится (с точностью до величин $\sim \theta^2$) к уравнению

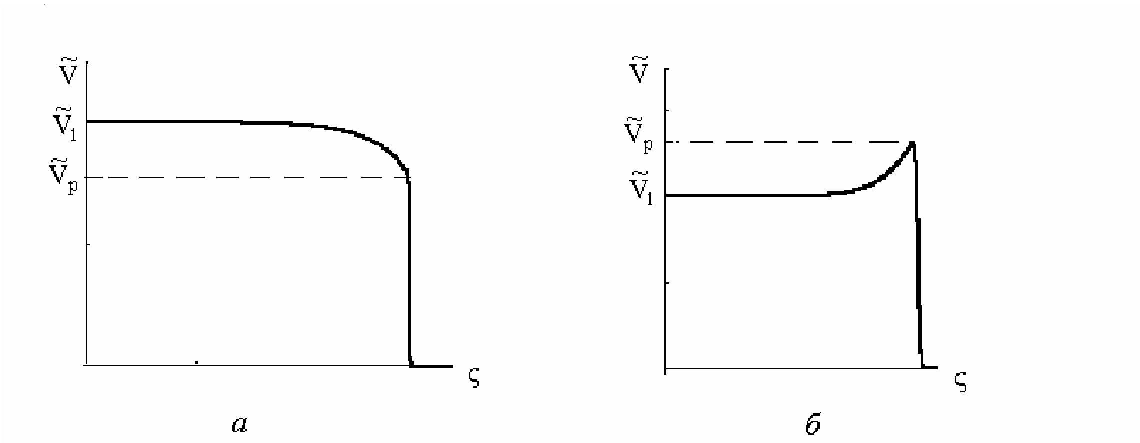

Рис. 5. Стационарные структуры, образующиеся при эволюции возмущения типа "ступенька"

Бюргерса с источником и интегральной дисперсией (3).

Эволюцию возмущения произвольного спектра необходимо исследовать с помощью полного уравнения (6). Для численного решения уравнения (6) в настоящей работе использовался метод расщепления [9]. Рассматривалась среда с отрицательным коэффициентом суммарной вязкости $\tilde{\mu}_\Sigma = \tilde{\xi} + \tilde{\mu}_0 < 0$, т.е. $C_{V\infty}\tilde{m}/2C_{V0} - \tilde{\mu}_0 > 0$. Кроме того, полагалось $C_{V0} > 0,\ \Psi_0 > 0,\ \Psi_\infty > \Psi_0$.

В зависимости от начальной амплитуды $\tilde{v}_1$ возмущения типа "ступенька" наблюдались следующие режимы его эволюции. При $\tilde{v}_1 > \tilde{v}_{кр}$ фронт ступеньки в ходе эволюции закруглялся (рис. 5*а*). При $\tilde{\mu}_0 = \tilde{\mu}_\infty = 0$ величина $\tilde{v}_{кр} = \tilde{m}/(\Psi_\infty - \Psi_0)$.

Подобный закругленный фронт ударной волны типичен для релаксирующих сред при $\tilde{\mu}_\Sigma > 0$ и преобладании нелинейных эффектов [1,7].

При $\tilde{v}'_{кр} < \tilde{v}_1 < \tilde{v}_к$

$\tilde{v}'_{кр} = 2|\tilde{\mu}_\Sigma|C_{V0}/C_{V\infty}(2\Psi_\infty - \Psi$

ная структура имела вид типи

ны детонации (рис. 5*б*). Устано

рость фронта во вс

$W = (\Psi_0\tilde{v}_1 + \tilde{m})/2$, величина

нения $\tilde{v}_p = \dfrac{\Psi_0\tilde{v}_1 - 2|\tilde{\mu}_\Sigma|C_{V0}/C_{V\infty}}{\Psi_\infty}$.

При $\tilde{v}_1 < \tilde{v}'_{кр}$ ступенька становилась неустойчивой и распадалась на периодическую последовательность стационарных импульсов (рис. 6) с амплитудой $\tilde{V}_{им} = 2\tilde{v}'_{кр}$.

Все описанные выше стационарные структуры могут быть получены также при решении автомодельной ($z = \varsigma - Wy$) формы уравнения (6):

$$\tilde{v}_{zz} + \tilde{v}_z[(\frac{W}{\tilde{\mu}_\infty} - \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}}\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\mu}_\infty}) - \frac{\Psi_\infty}{\tilde{\mu}_\infty}\tilde{v}] + \frac{C_{V0}}{\tilde{\mu}_\infty C_{V\infty}}[(-W + \frac{\tilde{m}}{2})\tilde{v} + \frac{\Psi_0}{2}\tilde{v}^2] = 0 \quad (9)$$

Эти структуры могут существовать только при $\tilde{\mu}_\Sigma < 0$ и $W \geq W'_{кр} = 0.5(\tilde{m} + \Psi_0\tilde{v}'_{кр})$ [9,10].

Для примера на рис. 7 представлены фазовый портрет (а) и вид уединенного импульса (б), соответствующего движению по сепаратрисе. Он точно соответствует стационарному импульсу эволюционной задачи. Полу-

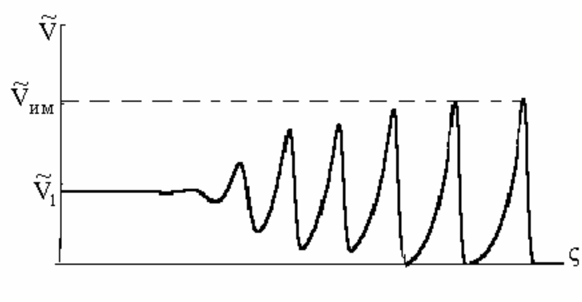

Рис. 6. Эволюция возмущения малой амплитуды типа "ступенька" с образованием стационарных импульсов

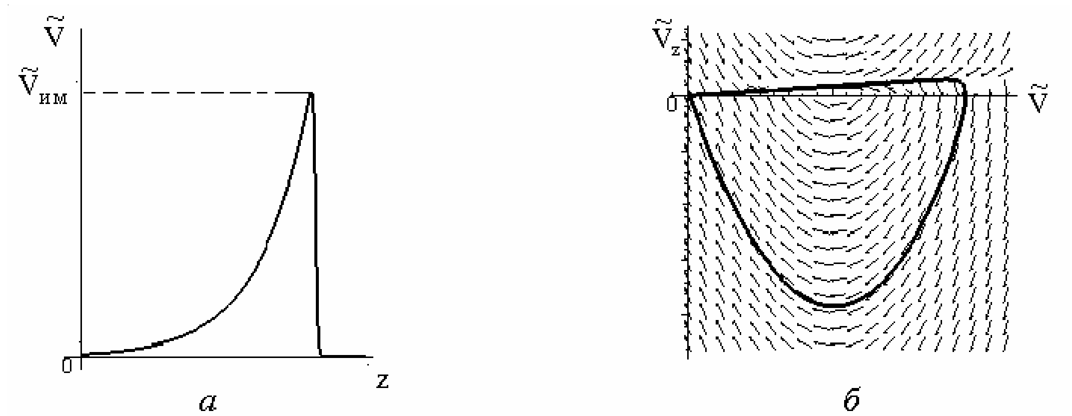

Рис. 7. Стационарный автоволновой импульс (*а*) и соответствующая ему сепаратриса на фазовой плоскости (*б*)

ченный уединенный импульс при $|\tilde{\mu}_\Sigma|/\tilde{\mu}_\infty >> 1$ сильно асимметричен, так как инкремент нарастания переднего фронта $\lambda_1 \approx 2\Psi_\infty C_{V0}|\tilde{\mu}_\Sigma|/(2\Psi_\infty - \Psi_0)C_{V\infty}\tilde{\mu}_\infty$ много больше $\lambda_2 \approx C_{V0}\Psi_0/2C_{V\infty}\Psi_\infty$ – инкремента экпоненциального нарастания заднего фронта.

Этот уединённый импульс является автоволной, поскольку его амплитуда и скорость определяется параметрами неравновесной среды, а не граничными условиями. В подтверждение этому на рис. 8 показана нестационарная эволюция возмущения типа “колокол” в той же самой среде с отрицательным коэффициентом суммарной вязкости в разные моменты времени $y_1 < y_2 < y_3$. В результате

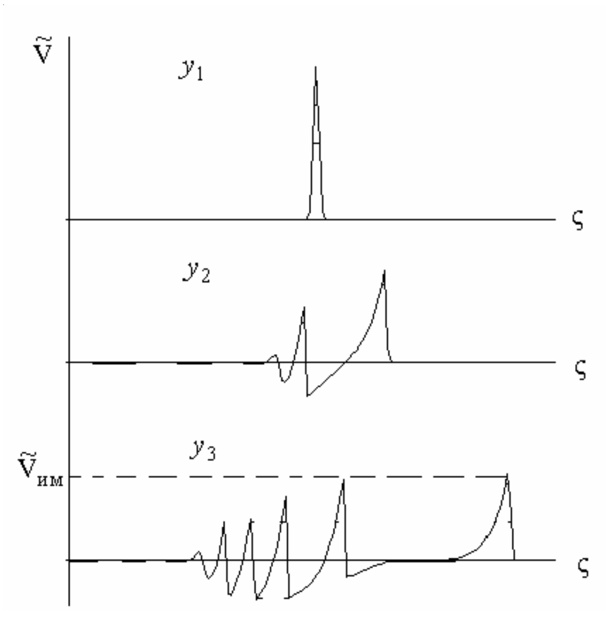

Рис. 8. Эволюция возмущения типа “колокол” с образованием автоволнового импульса

образуется один или несколько автоволновых уединённых импульсов и нестационарный осциллирующий “хвост”. Площадь возмущения при этом сохраняется.

Таким образом, проведённое в настоящей работе численное моделирование распространения возмущений типа “ступенька” и “колокол” демонстрируют существенное отличие эволюции газодинамических возмущений в неравновесных средах с отрицательной вязкостью по сравнению с эволюцией в равновесных средах. Полученные стационарные структуры (рис. 5-8) имеют широкий спектр и не могут быть описаны с помощью используемых ранее уравнений низкочастотного или высокочастотного приближений.

Работа выполнена в рамках российско-американской программы “Фундаментальные исследования и высшее образование” (“BRHE”), при финансовой поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области, Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
2. *Molevich N.E.* Acoustical properties of nonequilibrium media // AIAA Paper. 2004. № 1020.
3. *Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* Звуковые волны в неравновесном молекулярном газе // Известия Вузов СССР. Физика. 1986. Т. 29. № 7.

4. *Коган Е.Я., Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* Структура нелинейных акустических волн в неравновесном колебательно-возбуждённом газе// Письма ЖТФ. 1987. Т.13. №14.
5. *Makarian V.G., Molevich N.E.* Stationary high-frequency structures in vibrationally excited gas// V Int.school - seminar nonequilibrium process and their applications: Contrib. Papers. Minsk. Belarus, 2000.
6. *Молевич Н.Е.* Нелинейные уравнения в теории сред с отрицательной второй вязкостью// Сиб. Физико-технический журнал.1991.№1.
7. *Остроумов Г.А*. Основы нелинейной акустики. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1967.
8. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997.
9. *Макарян В.Г., Молевич Н.Е.* Структура газодинамического возмущения в термодинамически неравновесной среде с экспоненциальной моделью // Известия РАН. МЖГ. 2004. № 5.
10. *Макарян В.Г., Молевич Н.Е.* Новые стационарные структуры в акустически активной среде // Письма ЖТФ. 2003. Т.29. №18.

EVOLUTIONARY STABLE GAS DYNAMICAL STRUCTURES IN NONEQUILIBRIUM ACOUSTICAL ACTIVE MEDIA

© 2005 V.G. Makaryan[1], N.E.Molevich[2]

[1] Samara State Aerospace University

[2] Samara Branch of Physics Institute named for P.N. Lebedev of Russian Academy of Sciences

Numerical investigation of gas dynamical disturbances of a step like and a “bell” like forms are carried out in nonequilibrium medium with the negative total viscosity. The evolutionary stable stationary structures are obtained including the strongly asymmetric self wave pulse with a power-law trailing front and a shock leading front.