

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА МЕЖДУ КРУГОВЫМИ КОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ

© 2005 О.Л. Старицова

Самарский государственный аэрокосмический университет

Сформулирована задача оптимизации движения материальной точки постоянной массы между круговыми компланарными орбитами под действием силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от притягивающего центра с точки зрения быстродействия. Получены приближенное аналитическое и численное решение задачи оптимизации на основе принципа максимума Понтрягина. Предложен подход к выбору начальных параметров краевой задачи и получены зависимости длительности и угловой дальности движения от граничных условий и начального уровня ускорения.

Рассматривается задача о плоском движении материальной точки постоянной массы в гравитационном поле одного притягивающего центра. На точку непрерывно действует сила, величина которой обратно пропорциональна квадрату расстояния от притягивающего центра, а направление образует угол λ с радиус-вектором \vec{r} (рис. 1).

Такой моделью можно приблизенно описывать, например, перелеты космического аппарата с двигателями малой тяги при следующих допущениях:

- мощность энергоустановки обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца;
- двигатель работает без выключения;
- скорость истечения настолько большая, что расходом рабочего тела можно пренебречь по сравнению с массой аппарата.

Такое движение в полярной системе координат описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = \frac{-1 + a_0 \cos \lambda}{r^2}, \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = \frac{a_0 \sin \lambda}{r^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где r, φ – безразмерные полярные координаты точки, a_0 – безразмерное ускорение на орбите единичного радиуса, λ – угол между ускорением и радиус-вектором, α – угол между вектором скорости и радиус-вектором.

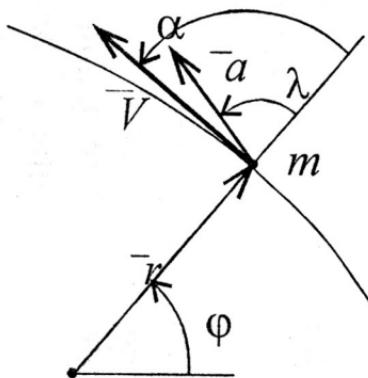


Рис. 1. Система координат

Аналитическое решение задачи

с $\lambda = const$.

В динамике полета КА с малой тягой известно [1] аналитическое частное решение системы, полученное при тангенциальном направлении ускорения, т. е. при $|\alpha| = \lambda$. Траектория этого решения – логарифмическая спираль раскручивающаяся при $\alpha = \lambda$ (вектор ускорения направлен по вектору скорости) и скручивающаяся при $\alpha = -\lambda$ (направление ускорения противоположно вектору скорости). Радиус вектор материальной точки и длительность движения по такой траектории в обозначениях системы (1) в зависимости от угловой дальности перелета изменяются согласно зависимостям:

$$r = r_0 e^{\varphi \operatorname{cig} \alpha}, t = \frac{2(r^{\frac{\lambda}{2}} - r_0^{\frac{\lambda}{2}})}{3 \cos \alpha}. \quad (2)$$

Однако, оказалось возможным получить аналитическое решение в более общем случае – когда углы α и λ постоянны, но не равны. Такое решение для космического аппарата с солнечным парусом было описано в [3].

Найдем условие существования спиральной траектории с постоянным углом между скоростью и радиус вектором α . Предположим, что движение точки происходит по такой траектории, т.е. описывается уравнениями:

$$r = r_0 e^{\varphi \operatorname{cig} \alpha}, \frac{V_\varphi}{V_r} = \operatorname{cig} \alpha. \quad (3)$$

Продифференцируем первое уравнение из (3) и подставим в (1):

$$\begin{cases} r\ddot{\varphi}^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + r\ddot{\varphi} \operatorname{cig} \alpha - r\dot{\varphi}^2 = \frac{a_0 \cos \lambda - 1}{r^2}, \\ r\ddot{\varphi} + 2r \operatorname{cig} \alpha \dot{\varphi}^2 = \frac{a_0 \sin \lambda}{r^2}. \end{cases} \quad (4)$$

Выражая из второго уравнения (4) $\ddot{\varphi}$, подставим в первое и получим:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - a_0} \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin \alpha}}{r^{\frac{\lambda}{2}}}. \quad (5)$$

Отсюда имеем:

$$V_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - a_0} \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin \alpha}}{r^{\frac{\lambda}{2}}}, \quad (6)$$

$$V_r = \dot{r} = V_\varphi \operatorname{cig} \alpha = \frac{\cos \alpha \sqrt{1 - a_0} \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin \alpha}}{r^{\frac{\lambda}{2}}}. \quad (7)$$

Уравнение (5) можно проинтегрировать и получить зависимость длительности движения от радиусов начальной и конечной траекторий:

$$\frac{2}{3}(r^{\frac{\lambda}{2}} - r_0^{\frac{\lambda}{2}}) = \cos \alpha \sqrt{1 - a_0} \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin \alpha} \cdot t \Rightarrow$$

$$t = \frac{2(r^{\frac{\lambda}{2}} - r_0^{\frac{\lambda}{2}})}{3 \cos \alpha \sqrt{1 - a_0} \frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin \alpha}}. \quad (8)$$

Уравнение (8) преобразуется в известное уравнение (2), если $\alpha = \lambda$.

Продифференцировав (5), с учетом (7) получим

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3}{2} \dot{\varphi}^2 \operatorname{ctg} \alpha. \quad (9)$$

Подставив (9) во второе уравнение (4), с учетом (5) получим уравнение связи углов α и λ :

$$\frac{\cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2 - \cos^2 \alpha} = \frac{a_0 \sin \lambda}{1 - a_0 \cos \lambda}. \quad (10)$$

Будем считать, что заданы величина ускорения a_0 и его направление λ , тогда угол α можно выразить в виде:

1) если спираль скручивается (радиус орбиты уменьшается), то

$$\alpha = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{B \cdot (3 - \sqrt{1 - 8B^2})}{1 + B^2} \right), \quad (11)$$

если выполняется

$$\lambda \in [-\pi; 0], a_0 \leq -\frac{1}{3 \sin(\lambda - \tilde{\lambda})}, \quad (12)$$

2) если спираль раскручивается, то

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{B \cdot (3 + \sqrt{1 - 8B^2})}{1 + B^2} \right), \quad (13)$$

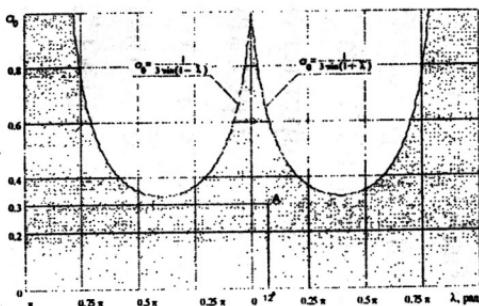
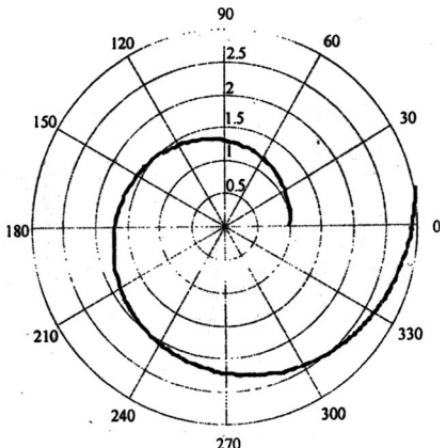
если выполняется

$$\lambda \in [0; \pi], a_0 \leq \frac{1}{3 \sin(\lambda + \tilde{\lambda})}, \quad (14)$$

где $B = \frac{a_0 \sin \lambda}{1 - a_0 \cos \lambda}$, $\tilde{\lambda} = \arcsin \frac{1}{3} \approx 0,3398$ рад.

Пользуясь условиями (12) и (14) можно построить области допустимых параметров a_0 и λ при которых движение по спиральной траектории (3) возможно. Эта область показана на рис. 2.

На рис. 3 показан пример спиральной траектории движения аппарата для $a_0 = 0,3$, $\lambda = 12^\circ$ (точка А на рис. 2), при этом по формуле (10) $\alpha = 79,8^\circ$.

Рис. 2. Область допустимых параметров a_0 , λ Рис. 3. Траектория движения при $a_0 = 0,3$,
 $\lambda = 12^\circ$, $\alpha(a_0, \lambda) = 79,8^\circ$

При заданном начальном уровне безразмерного ускорения a_0 длительность перелетов по таким траекториям изменяется в зависи-

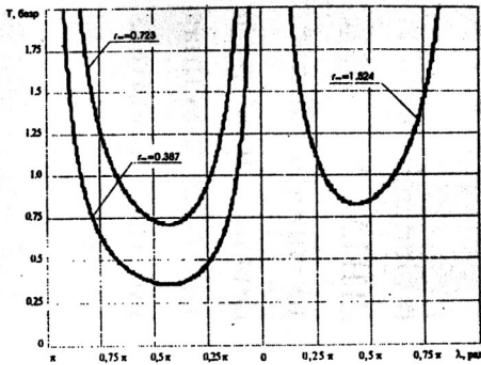


Рис. 4. Зависимость длительности перелетов

с $r_0 = 1$, $a_0 = 0,3$ в зависимости от угла направления ускорения λ

симости от выбранного угла λ согласно зависимостям (7, 10) или (7, 11). Например, на рис. 4 показаны зависимости длительности перелетов от выбранного угла λ с безразмерным ускорением $a_0 = 0,3$, начальным радиусом орбиты $r_0 = 1$ (орбита Земли) и конечными радиусами $r_k = 0,387, 0,723, 1,524$ (средние радиусы орбит Меркурия, Венеры и Марса соответственно).

Получить аналитическую зависимость угла λ , обеспечивающего минимальную длительность перелета, от начального уровня безразмерного ускорения a_0 и конечного радиуса перелета r_k не представляется возможным. В таблице 1 показаны результаты численного решения этой задачи при $r_k = 1,524$

Таблица 1. Результаты аналитического решения задачи об оптимальном по быстродействию перелете с $r_k = 1,524$ для различных уровней начального ускорения

a_0 , безр	a_0 , $\text{мм}/\text{с}^2$	T_{\min} , безр	T_{\min} , сут	λ , рад	λ , град
0,333	1,9795	0,6252	36,32	1,2380	70,93
0,30	1,7816	0,8298	48,20	1,3603	77,94
0,25	1,4847	1,0711	62,22	1,4198	81,35
0,20	1,1877	1,3936	80,96	1,4595	83,62
0,15	0,8908	1,9055	110,70	1,4515	85,46
0,10	0,5939	2,9039	168,69	1,5196	87,07
0,05	0,2969	5,8592	340,37	1,5456	88,56
0,01	0,0594	29,376	1706,5	1,5658	89,71

(орбита Марса) для различных уровней a_0 . При пользовании этой таблицей и графиками (рис. 4) необходимо учитывать, что на спиральной траектории с $\lambda = \text{const}$ составляющие вектора скорости точки должны удовлет-

ворять уравнению связи $\frac{V_\varphi}{V_r} = ctg \alpha$ (в том числе начальные и конечные условия).

Численное решение задачи

$$\text{с } \lambda = \lambda_{opt}(t).$$

Рассмотрим задачу об оптимальном по быстродействию перелете между круговыми компланарными орбитами материальной точкой, уравнения движения которой описываются (1). Приведем эту систему к нормальному виду:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V_r, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V_\varphi}{r}, \\ \frac{dV_r}{dt} &= \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{a_0}{r^2} \cos \lambda, \\ \frac{dV_\varphi}{dt} &= -\frac{V_r V_\varphi}{r} - \frac{a_0}{r^2} \sin \lambda. \end{aligned} \quad (15)$$

В соответствии с формализмом принципа максимума Понтрягина введем вектор сопряженных переменных

$$\bar{P} = (P_r, P_\varphi, P_{V_r}, P_{V_\varphi})^T$$

и составим Гамильтониан $H = \left(\frac{d\bar{X}}{dt} \right)^T \cdot \bar{P}$,

где $\bar{X} = (r, \varphi, V_r, V_\varphi)^T$ – вектор фазовых координат системы (15). Из условия максимума Гамильтониана найдем оптимальное управление:

$$\sin \lambda = \frac{P_{V_\varphi}}{\sqrt{P_r^2 + P_{V_r}^2}},$$

$$\cos \lambda = \frac{P_{V_r}}{\sqrt{P_r^2 + P_{V_r}^2}}. \quad (16)$$

При не фиксированной угловой дальности, с учетом условия трансверсальности $P_\varphi(T) = 0$ и уравнений для оптимального управления (16), система дифференциальных уравнений для сопряженных множителей имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_r}{dt} &= P_{V_r} \left(\frac{V_\varphi^2}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - P_{V_\varphi} \frac{V_r V_\varphi}{r^2} + \frac{2a_0}{r^3} \sqrt{P_r^2 + P_{V_r}^2}, \\ \frac{dP_\varphi}{dt} &= 0 \Rightarrow P_\varphi \equiv 0, \\ \frac{dP_{V_r}}{dt} &= -P_r + P_{V_\varphi} \frac{V_\varphi}{r}, \\ \frac{dP_{V_\varphi}}{dt} &= \frac{P_{V_\varphi} V_r - 2P_{V_r} V_\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, задача об оптимальном по быстродействию перелете между круговыми, компланарными орбитами сводится к следующей двухточечной двухпараметрической краевой задаче. Требуется найти такие началь-

ные значения $\lambda_0 = \arctg \frac{P_{V_r}}{P_{V_\varphi}}$ и

$B = \sqrt{P_r(t_0)^2 + P_{V_r}(t_0)^2}$ ($P_r = \pm 1$ – из условия нормировки), чтобы на концах оптимальной траектории выполнялись начальное и конечное условия:

$$\bar{X}(t_0) = (r_0 = 1, \varphi_0 = 0, V_{r0} = 0, V_{\varphi0} = 1), \quad (18)$$

$$\bar{X}(T) = \left(r_k, \varphi_k - \text{unfixe}, V_{rk} = 0, V_{\varphi k} = \frac{1}{\sqrt{r_k}} \right).$$

Функция невязок $f = \sqrt{(\Delta V_r)^2 + (\Delta V_\varphi)^2}$ (выход из интегрирования осуществляется по r_k) краевой задачи очень чувствительна к начальным значениям подбираемых параметров и “овражистый” характер. Например, на рис. 5 показана такая зависимость в окрестности оптимального решения (для $r_k = 1,524$,

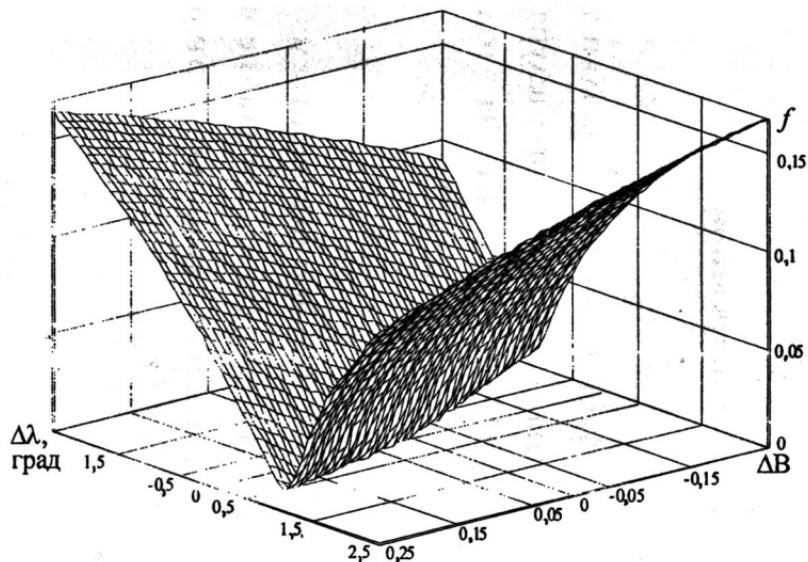


Рис. 5. Линии уровня функции невязок краевой задачи (15-18) $f = \sqrt{(\Delta V_r)^2 + (\Delta V_p)^2}$ от начальных условий

подбираемых параметров $\lambda_0 = \operatorname{arctg} \frac{P_{V_r}}{P_{V_p}}$ и B

$a_0 = 0,1$). Поэтому краевая задача плохо сходится. Использование в качестве начального приближения для подбираемых параметров результатов аналитического решения при $\lambda = \text{const}$ приводит к существенному улучшению сходимости краевой задачи.

В результате решения этой задачи получены зависимости программы изменения угла управления $\lambda_{opt}(t)$ от начального уровня безразмерного ускорения a_0 , показанные на рис. 6. При небольших уровнях ускорения

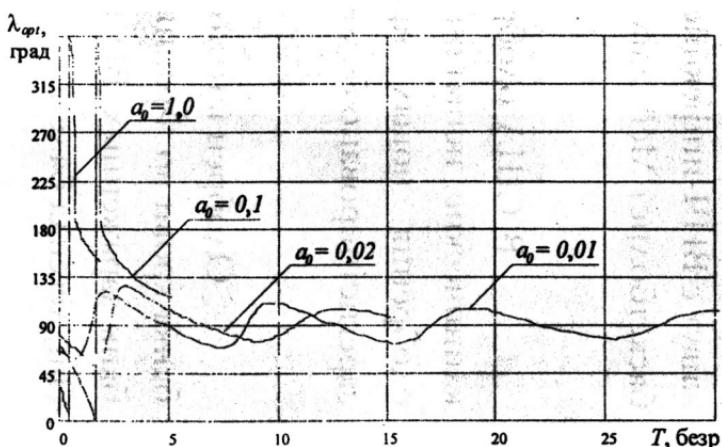


Рис. 6. Оптимальные программы управления $\lambda_{opt}(t)$ для $r_k = 1,524$

и различных уровнях безразмерного ускорения a_0

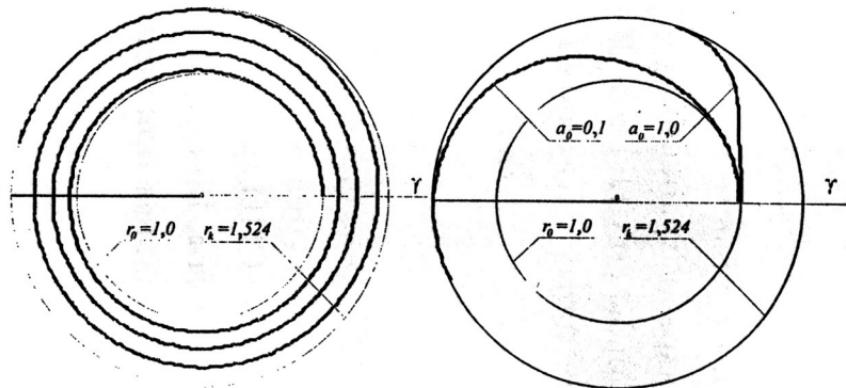


Рис. 7. Траектория перелета:

$$a - r_k = 1,524, a_0 = 0,01$$

$$b - r_k = 1,524, a_0 = 0,1, a_0 = 1$$

ния ($a_0 \approx 0,05$) оптимальный по быстродействию управляющий угол $\lambda_{opt}(t)$ колеблется

относительно угла управления, полученно-го аналитически с периодом приближенно равным одному витку орбиты. С уменьшением ускорения амплитуда этих колебаний уменьшается. Для больших уровней ускорения программа оптимального по быстродействию управления существенно отличается от аналитического. Угол управления в этом случае близок к классическому решению для двигателей большой тяги – импульсного перелета по эллипсу Гомана.

Сравнивая результаты численного оптимального решения с аналитическим можно утверждать, что при $a_0 \leq 0,333$ полученные длительности перелета и траектории движения близки. Траектории движения второй задачи (рис. 7, а) при таком уровне ускорения близки к траекториям первой задачи, особенно на среднем участке траектории.

Начальный и конечный участки траекто-рии у первой и второй задачи существенно отличаются из-за разницы в начальных и ко-нечных условиях по составляющим скоро-стей. При увеличении ускорения a_0 сущес-твенно меняется вид траекторий полученных с оптимальным углом управления $\lambda_{opt}(t)$ (рис. 7б). Траектория перестает носить спиральный

характер.

Поскольку при малых значениях a_0 ре-шения первой и второй задач близки, то ре-зультаты аналитического решения можно ис-пользовать в качестве начального приближе-ния для краевой задачи. Такое использование позволило получить множество решений кра-евой задачи для широкого диапазона парамет-ров $r_k \in [0,1; 5]$ и $a_0 \in [0,001; 5]$. На рис. 8 показаны зависи-мости длительности переле-та от начального уровня безразмерного уско-рения a_0 , для перелетов с увеличением ко-нечного радиуса орбиты r_k .

По результатам решения построены аппроксимационные зависи-мости для началь-ных значений параметров краевой задачи, длительности и угловой дальности переле-та. Эти зависи-мости можно использовать в качестве первого приближе-ния для решения задач оптимизации движения КА с двига-телями малой тяги с солнечной энергоустанов-кой. При достаточно больших скоростях ис-течения рабочего тела погрешность вычис-ления длительности и угловой дальности пе-релетов, связанных с изменением массы КА со-ставляет от 5 до 15 процентов, однако структура оптимального управления и вид траекто-рии практически не изменяется.

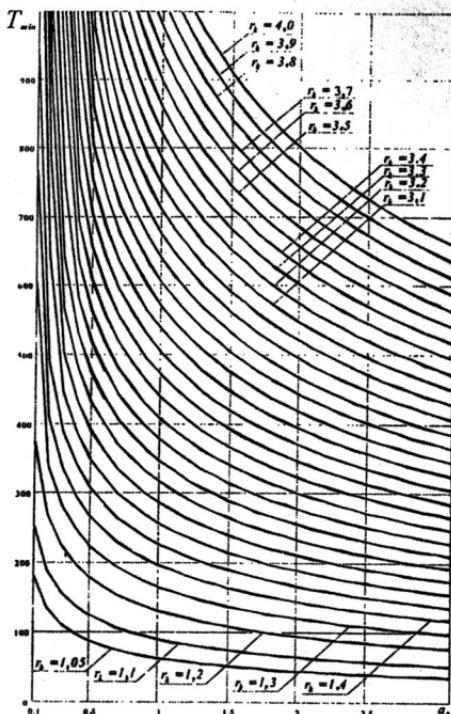


Рис. 8. Зависимость минимальной длительности перелета T_{min} от начального уровня безразмерного ускорения a_0 для различных конечных орбит

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета (проблемы оптимизации). М.: Наука, 1975.
- London H.S. Some exact solution of the equation of motion of a solar sail with constant sail setting. ARS J. 1960. V.30. №2. (Рус. пер.: Лондон Г.С. Некоторые точные

- решения уравнений движения космического корабля с солнечным парусом при постоянном угле установки паруса // В кн.: Механика: Сб. переводов, № 1. М.: 1962.)
- Ишков С.А., Милокумова О.П., Салмин В.В. Оптимизация замкнутых межпланетных перелетов Земля-Марс-Земля с малой тягой // Космические исследования. 1995. Т.33. №2.

OPTIMUM DRIVING ON SPEED BETWEEN CIRCULAR COPLANAR ORBITS

© 2005 O.L. Starinova

Samara State Aerospace University

The problem of optimization of driving of a mass point of a constant mass between circular coplanar orbits under an operation of force, inversely proportional to quadrate of distance from the attracting center is formulated from the point of view of speed. Are obtained the approached analytical and numerical solution of a problem of optimization on the basis of the Pontryagin maximum principle. The approach to a choice of initial parameters of a boundary value problem is offered and approximating associations of duration and angular distance of driving on boundary conditions and an initial level of acceleration are obtained.