

УДК 629.78

ОПТИМИЗАЦИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С СОЛНЕЧНЫМ ПАРУСОМ

© 2005 С.А. Ишков, О.Л. Старинова

Самарский государственный аэрокосмический университет

Исследуются вопросы применения космических аппаратов с солнечным парусом (КАСП) для совершения межпланетных перелетов и принципиальная возможность выхода за пределы Солнечной системы. Описаны законы управления и процедура моделирования геоцентрического маневра набора параболической скорости с учетом нецентральности поля земного тяготения, светотеневой обстановки и влияния атмосферы. Приведено решение задач оптимизации и результаты моделирования гелиоцентрического движения для различных целевых задач.

В настоящей работе рассмотрены задачи достижения планет Солнечной системы и набора максимальной гелиоцентрической скорости космическим аппаратом (КА), использующим в качестве движителя солнечный парус [1]. Не требуя для перелетов запасов рабочего тела, аппараты с солнечным парусом обладают малым, но постоянно действующим ускорением, которое при длительном воздействии позволяет достигать достаточно больших скоростей и совершать сложные энергоемкие маневры. Эти особенности позволяют использовать их в качестве универсальных автоматических исследовательских зондов.

Исследование движения КАСП проводится в рамках теории сфер действия с кинематической стыковкой участков. Задача условно разделяется на расчет многовитковой траектории набора параболической скорости в сфере действия Земли и гелиоцентрический маневр с заданными граничными условиями.

Моделирование геоцентрического участка движения

В соответствии с концепцией использования солнечного паруса для исследования космического пространства, необходимо обеспечить выхода аппарата из сферы действия планеты.

Для описания околоземного движения используется система дифференциальных уравнений, включающая в себя уравнения

плоского движения аппарата в полярной системе координат и уравнения, характеризующие положение плоскости орбиты относительно базовой.

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V_r, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V_\varphi}{r} - \frac{\cos i \sin \varphi \sin \lambda_2 a}{\sin i V_\varphi} + \\ &+ f_z \frac{\cos i \sin \varphi}{\sin i V_\varphi}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_r}{dt} &= \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \cos \lambda_2 \cos \lambda_1 a + f_r, \\ \frac{dV_\varphi}{dt} &= -\frac{V_r V_\varphi}{r} + \cos \lambda_2 \sin \lambda_1 a + f_\varphi, \end{aligned}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sin \varphi \sin \lambda_2 a}{\sin i V_\varphi} + f_z \frac{\sin \varphi}{\sin i V_\varphi},$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos \varphi \sin \lambda_2 a}{V_\varphi} + f_z \frac{\cos \varphi}{V_\varphi},$$

Здесь r , φ , V_r , V_φ - безразмерные полярные координаты и проекции скоростей КА, Ω - долгота восходящего узла, i - наклонение орбиты, λ_1 - угол между проекцией направления ускорения на плоскость орбиты и ра-

диус-вектором, λ_2 - угол между направлением ускорения и плоскостью орбиты, f_r , f_φ , f_z - компоненты возмущающего ускорения.

Для КА с идеально отражающим солнечным парусом направление ускорения совпадает с нормалью к поверхности паруса. Так как расстояние от Солнца до КА в геоцентрическом движении меняется слабо, то текущее значение ускорения определяется по формуле:

$$a = P_a \frac{S}{m} \cos^2 \vartheta, \quad (2)$$

где P_a - сила светового давления на один квадратный метр поверхности паруса на орбите Земли (для идеально отражающего паруса $P_a \approx 9,1 \cdot 10^{-6}$ Н/м²), S - площадь паруса, m - масса аппарата, ϑ - угол между направлением на Солнце и нормалью к поверхности паруса.

Для определения точной величины и направления тяги, создаваемой солнечным парусом и положения теневого участка на витке введем в рассмотрение следующие системы координат (СК):

O, X, Y, Z - геоцентрическая орбитальная СК (ось OX - направлена по линии узлов);

O', X', Y', Z' - объектоцентрическая орбитальная СК (ось $O'X'$ - направлена по радиус-вектору).

Единичный вектор направления на Солнце в геоцентрической орбитальной системе координат определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S_x &= \cos \Omega \cos \theta + \sin \Omega \cos \varepsilon \sin \theta, \\ S_y &= -\cos i \sin \Omega \cos \theta + \cos i \cos \Omega \cos \varepsilon \sin \theta + \\ &+ \sin i \sin \varepsilon \sin \theta \end{aligned} \quad (3)$$

$$S_z = \sin i \sin \Omega \cos \theta - \sin i \cos \Omega \cos \varepsilon \sin \theta + \\ + \cos i \sin \varepsilon \sin \theta$$

Здесь θ - угол между точкой весеннего равноденствия и положением Солнца (отсчитывается в плоскости эклиптики), $\varepsilon \approx 23.45^\circ$ - угол между экватором и плоскостью эклиптики.

В объектоцентрической орбитальной СК

$$S'_x = S_x \cos u + S_y \sin u,$$

$$S'_y = -S_x \sin u + S_y \cos u,$$

$$(4) \quad S'_z = S_z.$$

где u - аргумент широты. Компоненты вектора ускорения от солнечного паруса при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} a'_x &= a \cos \lambda_2 \cos \lambda_1, \\ a'_y &= a \cos \lambda_2 \sin \lambda_1, \\ a'_z &= a \cos^2 \vartheta \sin \lambda_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Угол между нормалью к парусу и направлением на Солнце определяется зависимостью

$$\cos \vartheta = \bar{n}' \cdot \bar{S}' = S'_x \cos \lambda_2 \cos \lambda_1 + \\ + S'_y \cos \lambda_2 \sin \lambda_1 + S'_z \sin \lambda_2. \quad (6)$$

Зная векторы направления на Солнце \bar{S} и на аппарат \bar{K} в геоцентрической орбитальной СК, можно оценить текущую светотеневую обстановку. Аппарат находится в тени, если

$$|\bar{S} \times \bar{K}| < \left| \frac{R_{n\alpha}}{r} \right|, \text{ и } \bar{S} \cdot \bar{K} < 0, \quad (7)$$

где $\bar{K} = (\cos u \ sin u \ 0)^T$, $R_{n\alpha}$ - размерный радиус планеты, r - текущий размерный радиус орбиты КА.

Выбор программы управления парусом $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ для задачи раскрутки и выхода КА из сферы действия Земли представляет собой сложную математическую проблему. Ввиду низкого уровня ускорения, равного $0,2 \dots 2$ мм/с², траектории геоцентрического движения КАСП представляют собой многовитковые спирали. При использовании достаточно высокой стартовой орбиты (высота $12000 \dots 36000$ км) возмущающее воздействие атмосферы можно не учитывать. Однако, большая длительность маневра требует учета возмущений от нецентральности гравитационного поля Земли, а специфика КАСП - возможность попадания аппарата в тень. Эти возмущения существенно усложняют расчет траектории и закона управления ориентацией паруса при наборе скорости в сфере действия Земли.

Колебательный характер изменения фа-

зовых переменных, описывающих движение КАСП, и значительная продолжительность маневра делает невозможным применение классического метода оптимизации управления на основе принципа максимума Понтрягина. При этом реализация двухканального управления по $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ является сложной технической задачей. Естественным путем получения приемлемого управления является упрощение задачи путем фиксации одного из управляемых параметров.

Известен [1] достаточно простой в реализации закон управления КАСП на геоцентрическом участке полета – закон Цандера. Плоскость орбиты и направление ускорения от паруса совпадают с плоскостью эклиптики, $\lambda_2(t) \equiv 0$. При движении навстречу солнечным лучам, парус поворачивается ребром к Солнцу ($\vartheta = 90^\circ$) ускорение отсутствует, а при движении от Солнца парус поворачивается перпендикулярно направлению на Солнце ($\vartheta = 0^\circ$) и создает максимальное ускорение.

Рассмотрим локально-оптимальные программы управления парусом имеющие аналитический вид.

Пусть $\lambda_2(t) \equiv 0$, т.е. вектор ускорения лежит в плоскости орбиты, а парус ей перпендикулярен. Определим локально-оптимальную программу для $\lambda_1(t)$, обеспечивающую максимизацию проекцию тяги на трансверсал (ось OY'):

$$\lambda_{1opt}(t) = \arg \max a'_y.$$

С учетом принятых допущений выражение для a'_y примет вид:

$$a'_y = P_a \frac{S}{m} (S'_x \cos \lambda_1 + S'_y \sin \lambda_1)^2 \sin \lambda_1,$$

$$\frac{\partial a'_y}{\partial \lambda_1} = P_a \frac{S}{m} (S'_y \sin 2\lambda_1 + S'_x \cos 2\lambda_1 - \frac{1}{3} S'_x) = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно λ_1 получим:

$$\lambda_{1opt} = \frac{1}{2} \left[\arcsin \left(\frac{S'_x}{3\sqrt{S'^2_x + S'^2_y}} \right) - \operatorname{arctg} \frac{S'_x}{S'_y} \right]. \quad (8)$$

Подобное управление применимо, если орбита КАСП лежит вблизи плоскости эклиптики. На рис. 1. показана реализация данного закона управления для круговой стартовой орбиты, лежащей в плоскости эклиптики.

Пусть теперь $\lambda_1 = 90^\circ$, т.е. ось вращения паруса направлена по местному радиус-вектору. В этом случае

$$a'_y = P_a \frac{S}{m} (S'_y \cos \lambda_2 + S'_z \sin \lambda_2)^2 \cos \lambda_2,$$

$$\lambda_{2opt} = \arg \max a'_y,$$

$$\frac{\partial a'_y}{\partial \lambda_2} = P_a \frac{S}{m} \left(-S'_y \sin 2\lambda_2 + S'_z \cos 2\lambda_2 + \frac{1}{3} S'_z \right) = 0,$$

$$\lambda_{2opt} = \frac{1}{2} \left[\arcsin \left(\frac{S'_z}{3\sqrt{S'^2_y + S'^2_z}} \right) - \operatorname{arctg} \frac{S'_z}{S'_y} \right]. \quad (9)$$

Данное управление удобно для реализации полета гравитационно-ориентированного паруса (аппарат представляет собой конструкцию вытянутую вдоль оси ОХ'). При этом плоскость орбиты должна находиться как можно ближе к терминатору ($S'_x = S'_y \approx 0$).

Проведенное моделирование движения КА с учетом возмущений от нецентральности гравитационного поля Земли, годового

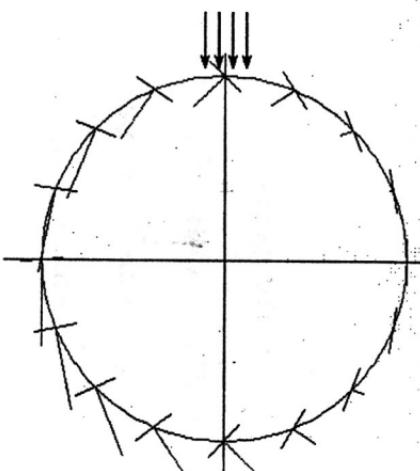


Рис. 1. Локально оптимальный закон управления (8) при начале движения по круговой орбите в плоскости эклиптики

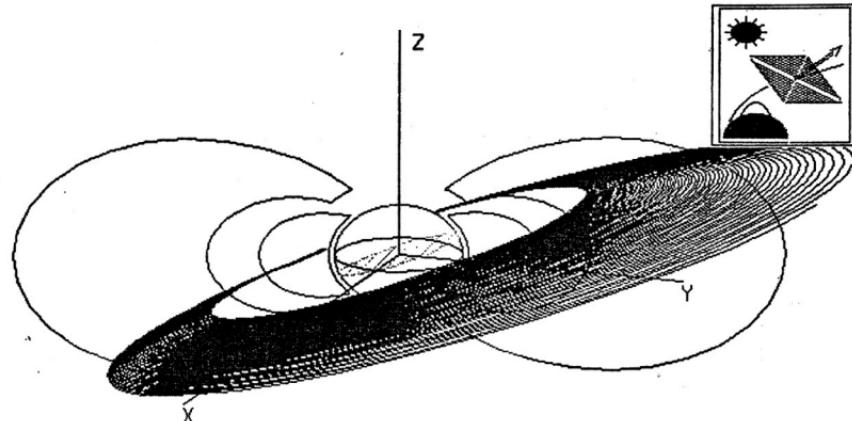


Рис. 2. Траектория геоцентрического движения КАСП при движении с локально оптимальным законом управления (8)

движения Земли и затенения показало, что прецессия плоскости орбиты вследствие влияния этих возмущающих факторов и большой длительности маневра приводит к значительному отклонению реальной плоскости орбиты от плоскости эклиптики, что делает невозможным использование закона управления Цандера в чистом виде. Полученные локально-оптимальные законы управления (8, 9) в этом случае применимы и использовались для моделирования траекторий геоцентрического движения КАСП с различными проектными параметрами.

На рис. 2 приведен пример траектории набора параболической скорости КАСП при старте с орбиты лежащей в плоскости эклиптики и законе управления (8). Для этого закона управления происходит быстрое увеличение эксцентриситета орбиты за счет поднятия апогея.

Так как при движении вблизи эклиптики аппарат попадает в тень планеты, где ускорение от паруса отсутствует, то в процессе маневра возможно уменьшение перигея орбиты. Такое уменьшение может вызвать приближение КАСП к плотным слоям атмосферы и разрушение конструкции. Оказалось, что на этот процесс существенное влияние оказывает положение перицентра орбиты старта относительно направления на Солнце. При оптимальном выборе положения линии апсид управление поднимает перицентр орбиты и опасного сближения с атмосферой не проис-

ходит. Такое положение линии апсид стартовой орбиты, относительно направления на Солнце, автоматически определяется в зависимости от даты старта и используется при моделировании геоцентрического маневра набора параболической скорости.

При моделировании движения с законом управления парусом (9), вблизи плоскости терминатора, эксцентриситет орбиты практически не изменяется, до тех пор пока плоскость орбиты значительно не отклонится от плоскости терминатора (за счет прецессии плоскости орбиты и годового движения Земли). На начальном участке движения орбита не затенена, что позволяет непрерывно увеличивать кинетическую энергию КА и позволяет сократить суммарную длительность маневра. При уменьшении парусности КА (отношение площади паруса к массе аппарата) длительность маневра по закону управления (9) увеличивается быстрее, чем по закону (8). Это связано с быстрым уходом плоскости терминатора и существенным отклонением управления (9) от оптимального. Управление (8) менее чувствительно к возмущениям и при значении парусности менее $54 \text{ м}^2/\text{kg}$ суммарные длительности маневров примерно одинаковы.

Результаты моделирования маневров набора параболической скорости, с локально-оптимальными законами управления (8) и (9) для массы КА 100 кг, площади паруса 20 тыс. м^2 и круговой стартовой орбиты высотой 1000

км приведены на рис. 3. В процессе моделирования рассчитывались угловые скорости вращения паруса. Этот параметр важен при определении конструктивной схемы, обеспечения требуемого закона управления. Для маневра набора скорости по локально-оптимальному закону управления (8) максимальная угловая скорость вращения паруса составила 0,0035 град/с, а при управлении (9) 0,0078 град/с, что является приемлемой величиной для парусных систем любой конструкции.

Оптимизация гелиоцентрического участка движения

Задача оптимизации гелиоцентрического межпланетного перелета опирается на модельную задачу о плоском движении КАСП в невозмущенном гравитационном поле Солнца. Используются следующие допущения: движение КАСП начинается с орбиты Земли, с ее скоростью, вне сферы ее действия; солнечный парус считается идеально отражающим и двусторонним. В этом случае движение КА может быть описано системой (1), но ускорение, получаемое аппаратом от солнечного давления изменяется согласно закону

$$a = \frac{P_a}{r^2} \frac{S}{m} \cos^2 \lambda_1, \quad (10)$$

так как энергия солнечного излучения уменьшается обратно пропорционально квадрату гелиоцентрического расстояния, а угол $\vartheta \equiv \lambda_1$.

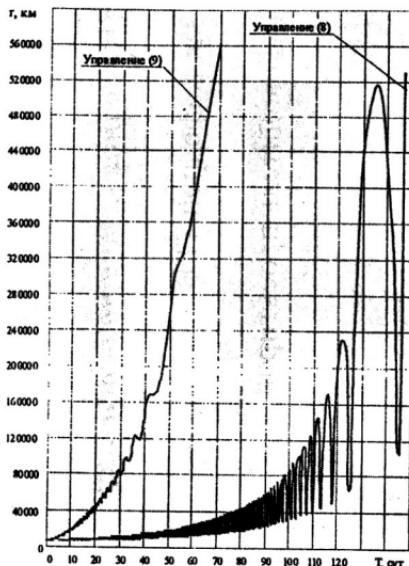


Рис. 3. Зависимость геоцентрического расстояния от времени при движении с локально оптимальными законами управления (8) и (9)

Рассматриваются задачи определения закона управления парусом, обеспечивающего минимум времени гелиоцентрического маневра для следующих вариантов граничных условий:

- доставка полезной нагрузки в заданную точку пространства с формированием заданной гелиоцентрической орбиты (задача "встречи"), возможно совпадающей с орбитой планеты назначения (рис. 4);

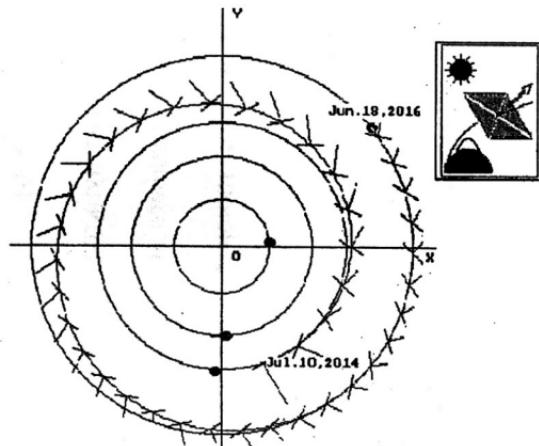


Рис. 4. Оптимальная по быстродействию траектория "встречи" с Марсом

- доставка полезной нагрузки в заданную точку пространства без формирования заданной орбиты, когда вектор скорости в конечный момент времени не фиксируется (задача "пролета").

Следуя принципу максимума Понтрягина [2], системе исходных уравнений движения (1) ставится в соответствие гамильтониан

$$H = P_r \cdot V_r + P_\varphi \cdot \frac{V_\varphi}{r} + P_{V_r} \left(\frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{1}{r^2} + a \cdot \cos \lambda_1 \right) + \\ + P_{V_\varphi} \left(-\frac{V_\varphi V_r}{r} + a \cdot \sin \lambda_1 \right) \quad (11)$$

и соответствующая система сопряженных уравнений.

Искомый оптимальный закон управления углом установки паруса в плоскости орбиты λ_1 должен доставлять абсолютный максимум Гамильтониану (11) и в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{\sqrt{9P_{V_r}^2 + 8P_\varphi^2} - 3P_{V_r}}{4P_\varphi}. \quad (12)$$

Границные условия в задаче оптимизации гелиоцентрического перелета формируются по-разному в зависимости от цели экспедиции.

Для задач "встречи" граничные условия, с учетом условий трансверсальности, для системы (1, 12) имеют вид:

$$t=0, \quad \varphi=0, \quad r=r_\oplus, \quad V_r=V_{r\oplus}, \quad V_\varphi=V_{\varphi\oplus}, \\ T \rightarrow \min, \quad P_\varphi=0, \quad r=r_i, \quad V_r=V_{ri}, \quad V_\varphi=V_{\varphi i} \quad (13)$$

Для задач "пролета" граничные условия, с учетом условий трансверсальности выглядят следующим образом:

$$t=0, \quad \varphi=0, \quad r=r_\oplus, \quad V_r=V_{r\oplus}, \quad V_\varphi=V_{\varphi\oplus}, \\ T \rightarrow \min, \quad P_\varphi=0, \quad r=r_i, \quad P_{V_r}=0, \quad P_{V_\varphi}=0. \quad (14)$$

Вариационные задачи с граничными условиями (13), (14) сводятся к решению трехпараметрических двухточечных краевых задач, которые решались модифицированным методом Ньютона. Достижение аппаратом

планеты назначения, при нефиксированной конечной угловой дальности перелета, обеспечивается выбором даты старта от Земли. Разработана процедура приближенного определения начальных значений сопряженных множителей, позволяющая регулярно решать задачи для широкого диапазона параметров аппарата и баллистических схем перелетов, в том числе, и гравитационных маневров в сферах действия планет.

Для полетов к дальним планетам и выхода из Солнечной системы рассматривается возможность моделирования гравитационных маневров в сфере действия одной или нескольких промежуточных планет с последующим решением целевой задачи с новыми граничными условиями. Например, на рис. 5 показано решение задачи "пролета" Марса с последующим гравитационным маневром, позволяющим осуществить "пролет" Венеры.

Установлено, что аппараты с солнечным парусом позволяют осуществлять "пролет" мимо всех планет Солнечной системы. Например, для аппарата с относительно небольшой парусностью $100 \text{ m}^2/\text{kg}$ перелет к Юпитеру продлится менее года. Было показано, что, для КАСП с $50...100 \text{ m}^2/\text{kg}$ и менее, перелеты с выравниванием скоростей аппарата и планет осуществимы только к планетам земной группы, а к Юпитеру и Сатурну только при очень большой длительности. При перелетах к Урану, Нептуну и Плутону выравнивание скорости аппарата и планеты невозможно, ввиду недостаточного уровня ускорения на орбите планеты назначения.

Другой интересной проблемой, стало определение парусности КАСП, позволяющей аппарату набрать параболическую скорость в гелиоцентрической СК и выйти из сферы действия Солнца. Вариационная задача определения оптимальной программы управления для достижения аппаратом максимальной полной энергии за фиксированное время формулируется следующим образом. Необходимо определить программу управления $U_1(t)$, доставляющую максимум критерию

оптимальности: $V^2 - \frac{2}{r} \rightarrow \max$ (гиперболический избыток скорости). Начальные фазо-

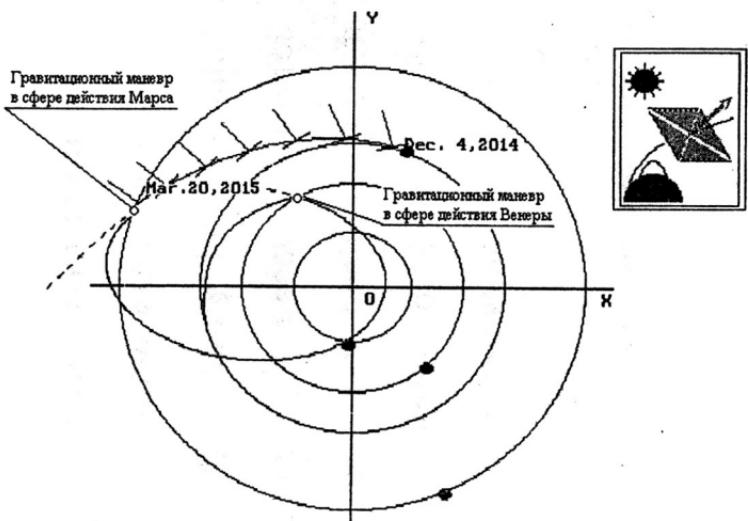


Рис. 5. Решение задачи "пролетов" Марса и Венеры с использованием гравитационного маневра в сфере действия Марса

вые координаты аппарата равны координатам Земли $t = t_0, X = X_0 = \{r_\oplus, \varphi_\oplus, V_{r\oplus}, V_{\varphi\oplus}\}$, конечные координаты не фиксируются.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина, вводится дополнительная фазовая координата (безразмерная отрицательная полная энергия КА)

$$x_0 = \frac{2}{r} - V_r^2 - V_\varphi^2, \text{ закон изменения которой}$$

можно записать:

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{2a_0}{r^2} \cos^2 \lambda_1 (V_r \cos \lambda + V_\varphi \sin \lambda). \quad (15)$$

Применяя формализм принципа максимума Понтрягина, удалось получить оптимальное управление в аналитическом виде:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\varphi - \arcsin \frac{P_{V_r} + 2V_r}{3\sqrt{(P_{V_r} + 2V_r)^2 + (P_{V_\varphi} + 2V_\varphi)^2}} \right), \quad (16)$$

где.

$$\varphi = \arccos \frac{P_{V_r} + 2V_r}{\sqrt{(P_{V_r} + 2V_r)^2 + (P_{V_\varphi} + 2V_\varphi)^2}}.$$

Из условий трансверсальности в конечный момент времени $P_r, P_\varphi, P_{V_r}, P_{V_\varphi} = 0$, а

$P_{x_0} = -1$. Так как P_φ и $P_{x_0} = \text{const}$, то $P_\varphi(t) \equiv 0$, а $P_{x_0}(t) \equiv -1$.

Таким образом, вариационная задача сводится к двухточечной трехпараметрической краевой задаче. Необходимо подобрать начальные значения сопряженных множителей таким образом, чтобы при заданных уравнениях движения (1, 10), сопряженной системе и оптимальном управлении (16), выполнялись граничные условия и условия трансверсальности.

Краевая задача решалась модифицированным методом Ньютона для различных уровней парусности КАСП и длительностей перелета. Были проанализированы возможности КАСП с различными техническими характеристиками по достижению максимально возможной скорости. Для аппаратов с различной парусностью были получены траектории оптимального набора гиперболического избытка скорости (рис. 6). Интересно отметить, что для совершения маневра оказывается оптимальным сначала приблизить КАСП к Солнцу, а затем начать набор скорости. Было установлено, что при парусности $206 \pm 1 \text{ m}^2/\text{kg}$ аппарат набирает параболическую скорость на расстоянии 123 а.е. от Солнца.

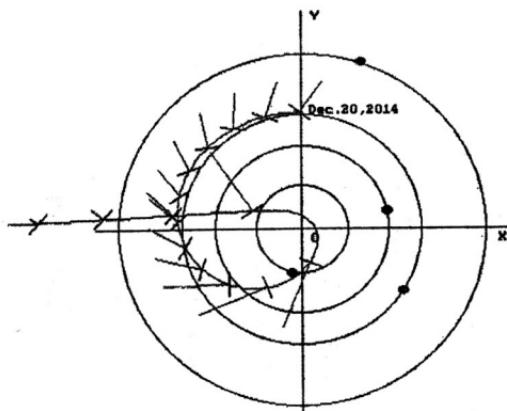


Рис. 6. Начальный участок траектории оптимального набора скорости

ца. Дальнейшее увеличение парусности ведет к быстрому увеличению скорости и для аппарата с парусностью $300 \text{ м}^2/\text{кг}$ на том же расстоянии от Солнца избыток гиперболической скорости составит 15,8 км/с.

Первые испытания КАСП в космосе уже были проведены. Для них был разработан аппарат с парусностью $20 \text{ м}^2/\text{кг}$. Сейчас разрабатываются КАСП с парусностью $130 \dots 240 \text{ м}^2/\text{кг}$, что позволит использовать их для межпланетных перелетов к дальним планетам и, может быть, для выхода из Солнечной системы.

Предложенная методика расчета и моделирования траекторий движения КА с солнечным парусом реализована в программном комплексе "ПАРУС" [3]. В него включены задачи о моделировании геоцентрического движения и оптимизации и моделировании гелиоцентрического движения. Высокая информативность графического отображения

движения КА позволяет эффективно решать и наглядно представлять результаты решения широкого комплекса задач, возникающих при проектировании межпланетных полетов КАСП. Все графические отображения траекторий движения, приведенные в данной статье, получены с помощью этого программного комплекса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляхова Е.Н. Космический полет с солнечным парусом. М.: Наука, 1986.
2. Понтиягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
3. Ишков С.А., Милокумова О.Л., Салмин В.В., Старинов О.Ю. Моделирование перелетов космического аппарата с солнечным парусом // Труды XVII чтений по космонавтике. Москва, 1993.

OPTIMIZATION AND MODELLING OF MOVEMENT WITH THE SOLAR SAIL

© 2005 S.A. Ishkov, O.L. Starinova

Samara State Aerospace University

In work questions of application of space vehicles with a solar sail for fulfillment of interplanetary flights and a basic opportunity of an output for limits of Solar system are researched. Laws of management and procedure of modelling of maneuver of a set of speed in a field of terrestrial gravitation in view of a shadow and influences of an atmosphere are described. The decision of problems of optimization and results of modelling of heliocentric movement for various targets is resulted.