УДК 621.375

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА – КАММИНГСА С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ФОТОННОЙ МОДЫ. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2005 И.Е. Синайский

Самарский государственный университет

Найдено аналитическое выражение для матрицы плотности в обобщенной модели Джейнса – Каммингса. Получены аналитические выражения для наблюдаемых и спектра излучения для различных начальных состояний полевой моды.

Введение

Модель Джейнса — Каммингса (МДК) [1], описывающая двухуровневый атом, взаимодействующий с фотонной модой в идеальном резонаторе, играет важную роль в современной квантовой оптике. В рамках этой модели предсказаны новые неклассические эффекты [2, 3]. Все эти предсказания были успешно проверены в экспериментах с одноатомным мазером, см., например, обзорные статьи [4-6].

В данной работе на основании ранее разработанной теории [7] рассматривается частный случай $\langle n \rangle \to 0$, т.е. при температуре резонатора равной нулю (большинство работ по обобщению МДК работают в этом приближении, как в исходном) оказывается, что в этом случае выражение для элементов матрицы плотности принимают более простой вид и можно явно выписать выражения для спектра излучения и для спектра среднего числа фотонов.

Обобщенная модель Джейнса - Каммингса

Одним из наиболее востребованных обобщением МДК является учет конечности добротности резонатора, с учетом этого гамильтониан задачи будет иметь следующий вид :

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_B + \hat{H}_{AF} + \hat{H}_{BF},$$

где $\hat{H}_A = \hbar\omega_0 \hat{S}_3$ гамильтониан свободного атома, $\hat{H}_F = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)$ гамильтониан фотонной моды, $\hat{H}_F = \hbar g(\hat{a}^+\hat{S}^- + \hat{a}\hat{S}^+)$ – гамильтониан взаимодействия атома с полевой модой, записанный в приближении вращающей волны (ПВВ). $\hat{S}_3, \hat{S}_\pm$ – это операторы энергетического спина, a^+, a – бозонные операторы рождения и уничтожения. Термостат моделируется системой осцилляторов, т.е.

$$\hat{H}_B = \sum_{\alpha=1}^{?} \hbar\omega_\alpha (\hat{c}_\alpha^+ \hat{c}_\alpha + 1/2),$$

$$\hat{H}_{FB} = \sum_{\alpha=1}^{?} (\hat{c}_\alpha^+ \hat{a} f_\alpha + \hat{c}_\alpha \hat{a}^+ \overline{f}_\alpha)$$

– гамильтониан взаимодействия полевой моды с системой бозонных осцилляторов. Далее записывается уравнение для матрицы плотности:

$$i\hbar \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}, \hat{\rho}\right].$$

Матрицу плотности будем искать в виде $\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_{AF}(t) \otimes \hat{\rho}_B(0)$, то есть воспользуемся кинетической гипотезой: малая динамическая подсистема не изменяет состояния большой диссипативной подсистемы.

Затем в этом уравнении нужно перейти в представление взаимодействия по свободному гамильтониану и усреднить по переменным термостата.

В результате получаем кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности динамической подсистемы "атом + фотонная мода":

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{AF}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_{AF}^{(I)}, \hat{\rho}_{AF}\right] + \hat{L}_F \hat{\rho}_{AF},$$

где

$$\hat{L}_F\hat{\rho}_{AF} = -\frac{\gamma}{2}\Big\{(\langle n\rangle+1)\Big[\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\rho}_{AF} -$$

$$-2\hat{a}\hat{\rho}_{AF}\hat{a}^{+} + \hat{\rho}_{AF}\hat{a}^{+}\hat{a}\Big] + \langle n\rangle\Big[\hat{a}\hat{a}^{+}\hat{\rho}_{AF} -$$

$$-2\hat{a}^{+}\hat{\rho}_{AF}\hat{a} + \hat{\rho}_{AF}\hat{a}\hat{a}^{+}\Big]\Big\}.$$

В кинетическом уравнении воспользуемся приближением нулевой температуры термостата (общее решение этого уравнения [7]):

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{AF}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\Big[\hat{H}^{(I)}_{AF}, \hat{\rho}_{AF}\Big] -$$

$$-\frac{\gamma}{2}\Big\{\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\rho}_{AF} - 2\hat{a}\hat{\rho}_{AF}\hat{a}^{+} + \hat{\rho}_{AF}\hat{a}^{+}\hat{a}\Big\}.$$

Именно это уравнение обычно записывают другие авторы [6], как исходное, далее находят его решение воспользовавшись серией приближений. В работе будет найдено общее решение этого уравнения без каких либо дополнительных приближений.

Решение модели

Выражение для матрицы плотности будем искать в P – представлении Глаубера – Сударшана:

$$\hat{\rho}_{AF} = \sum_{\mu,\nu=1}^{2}\int\frac{d^2\alpha}{\pi}P_{\mu\nu}(\alpha,t)|\alpha\rangle\langle\alpha|\otimes|\mu\rangle\langle\nu|$$

Для решения перейдем в представление "взаимодействия" по $\hat{H}^{(I)}_{AF}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\partial\hat{\rho}'}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2}\Big\{\hat{a}'^{+}\hat{a}'\hat{\rho}' - 2\hat{a}'\hat{\rho}'\hat{a}'^{+} + \hat{\rho}'\hat{a}'^{+}\hat{a}'\Big\},$$

где:

$$\hat{\rho}' = \exp\Big\{i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\}\hat{\rho}\exp\Big\{-i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\},$$

$$\hat{a}' = \exp\Big\{i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\}\hat{a}\exp\Big\{-i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\},$$

$$\hat{a}'^{+} = \exp\Big\{i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\}\hat{a}^{+}\exp\Big\{-i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\}$$

и для векторов состояния $|\alpha'\rangle$ необходимо записать $|\alpha'\rangle = \exp\Big\{i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\}|\alpha\rangle$.

Несложно видеть спектр векторов состояния поля остался тем же: $\hat{a}'|\alpha'\rangle = \alpha|\alpha'\rangle$. В рассматриваемом представлении уравнение для P – символа приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (\gamma/2)\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}}\bar{\alpha}\right)P.$$

Несложно видеть, что решение имеет вид:

$$P(\alpha,t) = \int\frac{d^2\alpha_0}{\pi}K(\alpha,t|\alpha_0,0)P(\alpha_0,t),$$

$$K(\alpha,t|\alpha_0,0) = \delta_2\left(\alpha - \alpha_0e^{-\gamma t/2}\right).$$

Теперь для получения явного выражения для матрицы плотности необходимо вернуться в исходное представление. Для этого необходимо определить $|\alpha'\rangle = \exp\Big\{i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\}|\alpha\rangle$.

Проще всего это сделать, разложив $|\alpha\rangle$ по Фоковскому базису. С учетом того, что в начальный момент времени атом рассматривается в возбужденном состоянии и оператор $\exp\Big\{i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\}$ в Фоковском представлении расщепляется на операторы вида (для каждой пары состояний $|n,1\rangle$ и $|n+1,2\rangle$):

$$\exp\Big\{-i\hat{H}^{(I)}_{AF}t/\hbar\Big\} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix},$$

$$a = e^{-i\omega t/2}Cos(gt\sqrt{n+1}/2),$$

$$b = -ie^{-i\omega t/2}Sin(gt\sqrt{n+1}/2).$$

Проинтегрировав по α подынтегральное выражение, получим явный вид матрицы плотности:

$$\hat{\rho}_{AF} = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{F_{nm}(t)}{\sqrt{n!m!}}\times\times$$

$$\times\Big\{c_nc_m|n,1\rangle\langle m,1| + ic_nd_m|n,1\rangle\langle m+1,2| +$$

$$-id_nc_m|n+1,2\rangle\langle m,1| + d_nd_m|n+1,2\rangle\langle m+1,2|\Big\},$$

$$c_n = Cos\Big(gt\sqrt{n+1}/2\Big),$$

$$d_n = Sin\Big(gt\sqrt{n+1}/2\Big)$$

где

$$F_{nm}(t) = \int\frac{d^2\alpha_0}{\pi}P(\alpha_0,t)e^{-|\alpha_0|^2e^{-\gamma t}}\alpha_0^n\bar{\alpha}_0^me^{-\gamma t/2(m+n)}.$$

Выражение для спектра излучения и спектра среднего числа фотонов

Для нахождения спектра излучения воспользуемся хорошо известной формулой:

$$S\left(\Delta\omega\right)=\mathrm{Re}\int_0^{\infty}d\tau e^{i\Delta\omega\tau}\left\langle a^{+}\left(\tau\right)a\left(0\right)\right\rangle .$$

Несложно показать, что спектр излучения для произвольного состояния имеет вид:

$$S(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-(n+1)}p_k(n+1)C_k^{n+1}C_{k-(n+1)}^{j}(-1)^j\times$$

$$\times\left\{\frac{\gamma_{n,j}}{\gamma_{n,j}^2+\left(g_n+\omega\right)^2}+\frac{\gamma_{n,j}}{\gamma_{n,j}^2+\left(g_n+\omega\right)^2}\right\},$$

$$\gamma_{n,j}=\gamma\left(2n+2j+1\right)/2,$$

$$g_n=g\Big/\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right),$$

где p_k - диагональный элемент начальной матрицы плотности фотонной моды ($p_k=\left\langle k\right|\rho_F\left(0\right)\left|k\right\rangle$). К примеру, спектр R- фотонного начального состояния будет иметь вид:

$$S(\omega)=\sum_{n=0}^{R-1}\sum_{j=0}^{R-(n+1)}(n+1)C_R^{n+1}C_{R-(n+1)}^{j}(-1)^j\times$$

$$\times\left\{\frac{\gamma_{n,j}}{\gamma_{n,j}^2+\left(g_n+\omega\right)^2}+\frac{\gamma_{n,j}}{\gamma_{n,j}^2+\left(g_n-\omega\right)^2}\right\},$$

а начального вакуумного:

$$S^0(\omega)=\frac{\gamma_{0,0}}{\gamma_{0,0}^2+(g+\omega)^2}+\frac{\gamma_{0,0}}{\gamma_{0,0}^2+(g-\omega)^2}.$$

Аналогично можно получить выражение и для спектра среднего числа фотонов. В случае начального когерентного состояния необходимо проинтегрировать по времени следующее выражение:

$$n\left(t\right)=\left|\alpha_0\right|^2e^{-\gamma t}+\sum_0^{\infty}\frac{F_{nn}\left(t\right)}{n!}Sin^2\left(gt\sqrt{n+1}/2\right).$$

Заключение

Из аналитических формул и графиков (рис. 1, 2, 3), видно, что предложенный подход описывает физические системы .

Следует отметить, что найдено общее

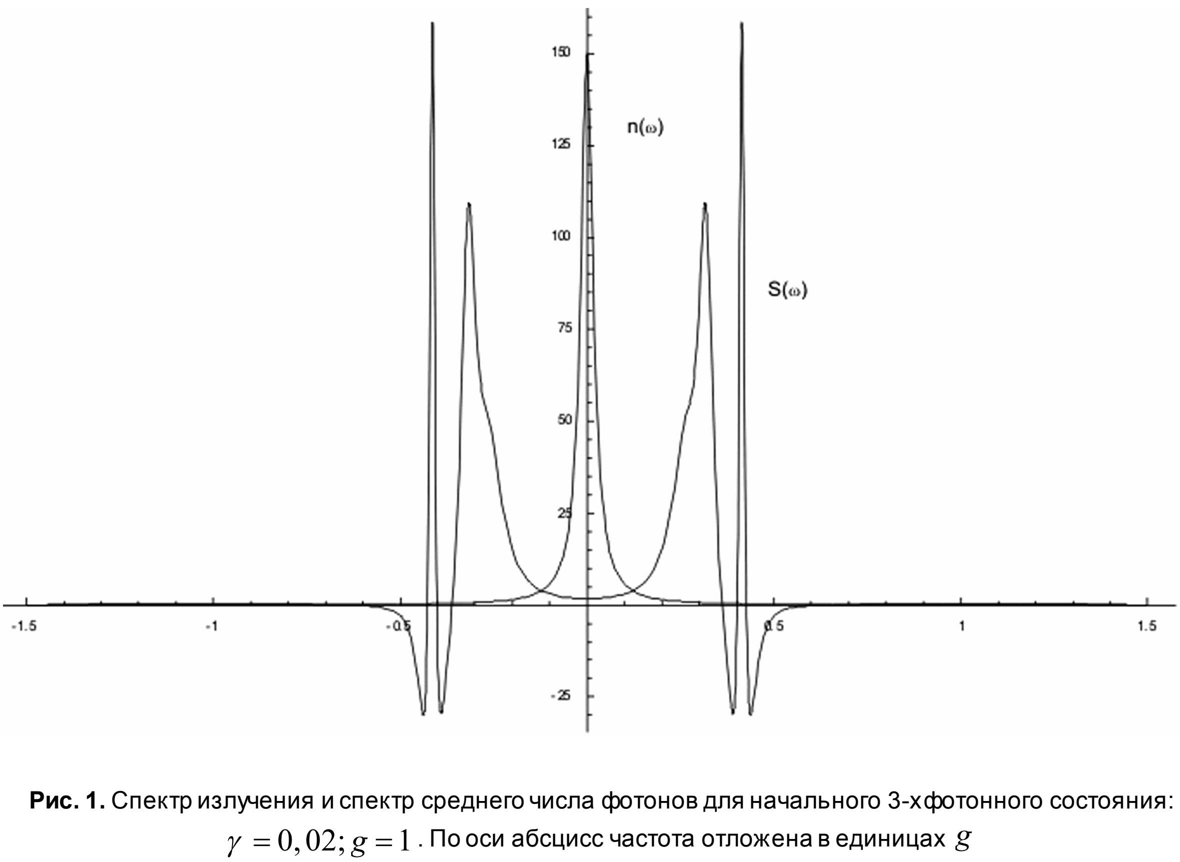

Рис. 1. Спектр излучения и спектр среднего числа фотонов для начального 3-хфотонного состояния: $\gamma=0,02;g=1$. По оси абсцисс частота отложена в единицах g

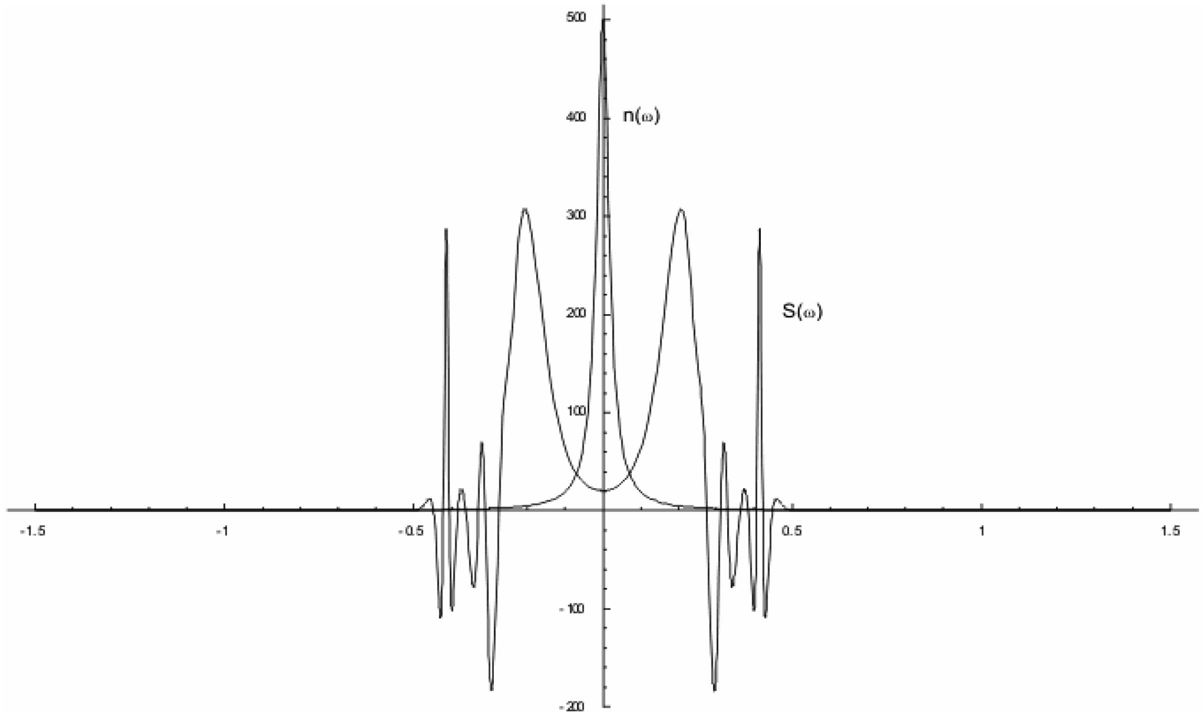

Рис. 2. Спектр излучения и спектр среднего числа фотонов для начального 10-ти фотонного состояния: $\gamma = 0,02; g = 1$. По оси абсцисс частота отложена в единицах g

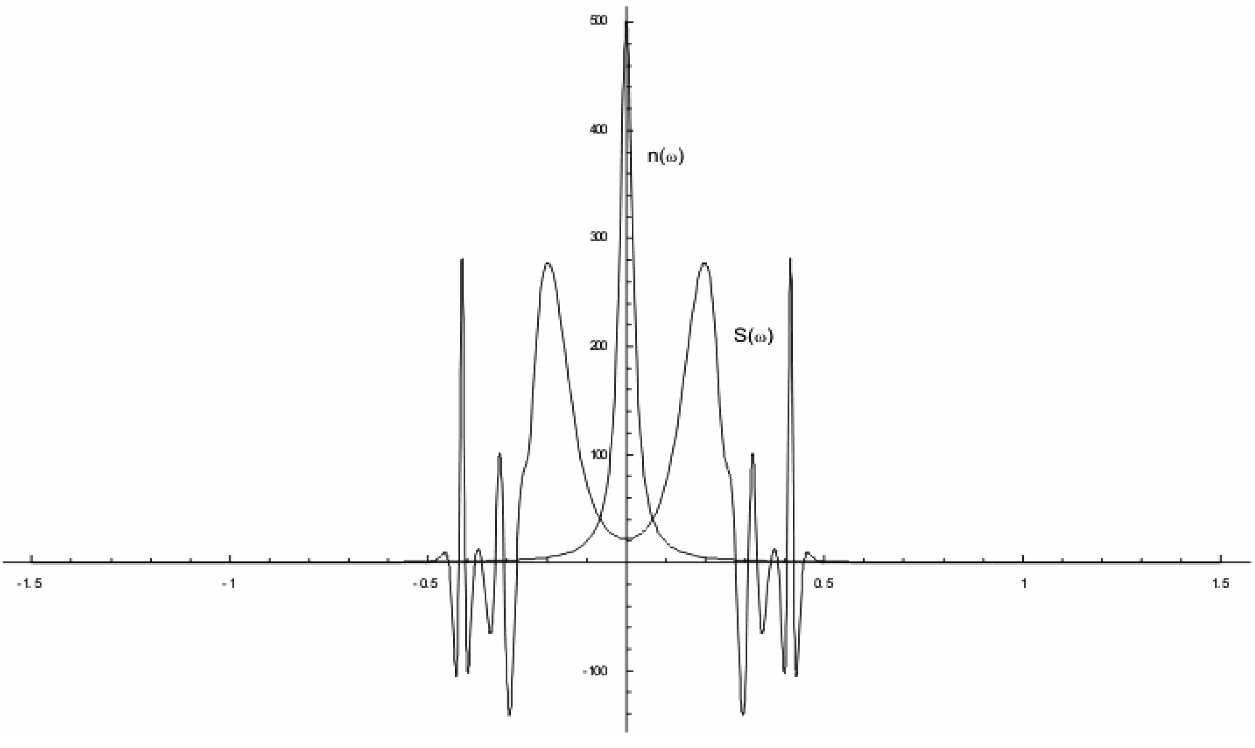

Рис. 3. Спектр излучения и спектр среднего числа фотонов для начального когерентного состояния: $|\alpha_0|^2 = 10; \gamma = 0,02; g = 1$. По оси абсцисс частота отложена в единицах g

точное решение кинетического уравнения. В работах других исследователей это уравнение точно решается только в частных случаях или решение ищется в секулярном приближении (оно работает только для малых значений γ – константы затухания и для малых времен взаимодействия). Предложенный подход лишен этого недостатка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *H.Y. Yoo and J.H. Eberly*, Physics Reports, 118, 1985.
2. *S. Singh* // Phys. Rev. A 25, 1982.
3. *J.H. Eberly*, N.B. Narozhny, and J.J. Sanches-Mondragon, Phys. Rev. Lett. 44, 1980; *M.O. Scully, M.S. Zubairy*, Quantum Optics, Cambridge University Press, 1997.
4. *G. Raithel, C. Wagner, H. Walther, L.M. Narducci & M.O. Scully* The micromaser: a providing ground for quantum physics // Advances in atomic, molecular and optical physics. Academic, New York.
5. *H. Walther* // Proc. R. Soc. **A** 454. 1998.
6. *G.S. Agarwal, R.R. Puri* // Phys. Rev. A 33. 1986.
7. *А.В. Горохов, И.Е. Синайский*. Метод уравнения Фоккера – Планка и статистика фотонов в теории одноатомного мазера // Известия РАН. Серия Физическая. 2004. Т. 68. № 9.

GENERALIZED JANES-CUMMING MODEL WITH PHOTON MODE RELAXATION. SPECTRA

I.E. Sinaiski

Samara State University

It was found analytical solution for density matrix in generalized Janes-Cumming model. It was obtained analytical expression for observable and spectra for different initial state of photon mode.