УДК 519

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА.

© 2005 А.В. Барвинок, Г.М. Гришанов, О.В. Прохорова

Самарский государственный аэрокосмический университет

Сформирована дискретная модель механизма принятия оптимальных решений по выбору параметров инвестиционного проекта с учетом платежеспособности заемщика.

На практике типичной является ситуация, когда инвестиционные проекты осуществляются с привлечением банковского кредита, погашаемого обычно в рассрочку. В связи с этим при обосновании условий предоставления инвестиций необходимо сбалансировать денежные потоки между заемщиком и инвестором. Сформируем балансовые модели финансовых потоков и на этой основе сформулируем задачу принятия решений по выбору параметров инвестиционного проекта. При моделировании задач принятия решений будем считать заданной процентную ставку, а проценты начисляются на непогашенную часть долга. Задание процентной ставки на весь срок кредитования, является типичной ситуацией в практике долгосрочного кредитования.

Пусть y – кредит (объем инвестиций), выданный заемщику инвестором на срок T с процентной ставкой α, а V(t) = f(t), t = 1, …, T – периодические выплаты заемщика, включающие в себя часть погашаемого долга R(t), t = 1, …, T и сумму выплачиваемых за период t процентов I(t), t = 1, …, T. Таким образом, взятый заемщиком кредит возвращается по частям за T раз платежами величиной

При найденном потоке платежей V (t) выплаты на погашение основного долга R(t) определяются из уравнения (1)

$$R(t) = V(t) - I(t),\ t = 1, \dots, T, \quad (2)$$

$$R(1)=V(1) - y\alpha.$$

Обозначим через D(t) невыплаченную часть долга на начало t-го года, тогда проценты, выплачиваемые за t-й период, равны

$$I(t) = D(t\text{-}1)\alpha,\ t = 1, \dots, T,\ I(1) = y\alpha,\ D(0) = y, \quad (3)$$

где D(t) – невыплаченная часть долга на начало t-го периода, определяемого из следующего уравнения:

$D(t) = D(t–1) – R(t), t = 1, …, T, D(1) = y–R(1), D(T) = D(T-1)–R(T) = 0$ (4)

Равенство D(T) = 0 в этом уравнении означает, что долг за срок T должен полностью погашаться.

Система уравнений (1…4) взаимосвязана и позволяет в совокупности определить в любой момент времени сумму на погашение основного долга, выплату процентов, размер невыплаченного долга, характеризующих состояние кредитного процесса в каждом периоде.

Балансовое уравнение, характеризующее равенство обязательств между инвестором и заемщиком и являющееся основным ограничением при выборе траектории изменения периодических выплат, имеет следующий вид:

$$y = \sum_{i=1}^{T} V(t) / (1+\alpha)^{t} . \qquad (5)$$

Последовательность выплат должна быть выбрана такой, чтобы в соответствии с (5) полностью за срок T погасить кредит, а с другой стороны, величина выплат в каждый период не превышала финансовые возможности заемщика [1,2].

Сложность решения такой задачи заключается в том, что величины периодических выплат V(t) для каждого периода свободно выбираются из допустимой области при обязательном выполнении условия (5). Обеспечить выполнение сбалансированности обязательств (5) можно разными способами, поскольку это условие представляет собой уравнение с T неизвестными.

Для обоснования принимаемых решений по выбору платежного потока сформируем модель целевой функции и модель ограничений на параметры финансовых потоков.

В общем случае задача управления долгосрочным инвестиционным проектом состоит в том, чтобы при заданной динамике изменения совокупного дохода заемщика и структуры его обязательств выбрать такие параметры финансовых потоков, как объем, срок, процентная ставка кредита, и такую динамику изменения потока платежей, чтобы обеспечить погашение кредита и получить оптимальное значение целевой функции от его реализации.

Целевой функцией инвестора или заемщика в решении сформулированной задачи может служить величина процентного дохода, получаемого инвестором, или величина расхода на выплату процентов заемщиком за весь срок кредита. Отметим, что процентный доход, получаемый инвестором, и расход на выплату процентов заемщиком отражают их экономические интересы, которые являются прямо противоположными, т.е. то, что получает инвестор, ровно столько же вынужден отдавать заемщик. В связи с этим стратегии, выбираемые инвестором и заемщиком при реализации долгосрочного кредита, будут противоположными.

Процентный доход определим как разность между суммой по периодам всех членов платежного потока и объема кредита из уравнения

$$I_{\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} V(t) - y. \qquad (6)$$

Эта разность представляет собой величину расхода на выплату заемщиком процентов и, одновременно, полученного инвестором дохода при реализации долгосрочного кредита. Поэтому заемщик стремится к минимуму этой величины, а инвестор – к максимуму.

Поскольку проценты за каждый период начисляются в зависимости от размера невозвращенной части долга, а сумма начисленных процентов по всем периодам представляет собой величину процентного дохода, то с учетом рекуррентных уравнений (1 – 4) определим процентный доход из следующего соотношения:

$$I_{\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} I(t) = \sum_{t=1}^{T} D(t-1)\alpha, \quad I(1) = y\alpha, \; D(0) = y. \qquad (7)$$

Процентный доход, как следует из (7), зависит от объема, срока, процентной ставки и траектории изменения невыплаченной части долга D(t), которая в свою очередь определяется траекторией изменения периодических выплат заемщиком V(t).

В связи с этим возникает необходимость в определении такой траектории изменения периодических платежей заемщиком, которая обеспечивает максимальную величину суммы выплачиваемых процентов за срок кредита. Для определения траектории изменения потока периодических платежей необходимо выбрать срок погашения кредита и уровень процентной ставки.

Сформируем ограничения на такие управляющие параметры инвестиционного проекта как размер периодических выплат V(t), t = 1, …, T; срок T и объем кредита *y*. Параметры платежного потока V(t) определяются в соответствии с балансовым уравнением (5).

При установленном объеме кредита *y* и его сроке T достичь сбалансированности между дисконтированной суммой платежного потока V(t) и величиной кредита можно выбором различий динамики изменения платежного потока. При этом выбранной динамике платежного потока соответствует определенное значение операционного дохода.

Для обеспечения возвратности кредита необходимо, чтобы выплаты заемщика в каждом периоде не превышали его финансовых возможностей и удовлетворяли следующему неравенству:

$$0 \le V(t) \le \gamma Д(t),\ t = 1, \dots, T, \qquad (8)$$

где Д(t) – доход заемщика в t-й период, учитывающий структуру его обязательств; γ – коэффициент, характеризующий долю дохода, направляемую на выплаты по кредиту.

Выполнение неравенства (8) позволяет обеспечить возвратность кредита и снизить кредитный риск при реализации долгосрочного кредита.

Объем кредита должен удовлетворять следующему неравенству:

$$y \le КЦ, \qquad (9)$$

где К – коэффициент кредитной задолженности, характеризующий долю покупаемой собственности, взятой заемщиком в кредит;

Ц – стоимость приобретаемого имущества заемщиком.

Срок долгосрочного кредита, как правило, выбирается не более максимально возможного, установленного инвестором. Кроме того, балансовое соотношение (5) позволяет находить неизвестные параметры инвестиционного проекта по известным. Так, если платежные потоки, объем кредита и процентная ставка выбраны, то равенство (5) позволяет определить срок кредита T, обеспечивающий погашение кредита. Таким образом, срок кредита должен удовлетворять неравенству

$$T \le \min(T_{\delta}, T_{max}), \qquad (10)$$

где T_δ – срок кредита, определяемый из балансового уравнения (5);

T_{max} – максимально возможный срок, установленный инвестором.

В совокупности уравнение (5) и неравенства (8 – 10) образуют допустимое множество принимаемых решений по выбору объема, срока кредита и платежного потока. Эта совокупность соотношений является моделью ограничений с учетом платежеспособности заемщика.

С учетом (1…4), (7…10) математическая модель задачи выбора механизма управления долгосрочным инвестиционным проектом с позиции интересов инвестора представим в следующем виде:

$$I_\Sigma = \sum_{t=1}^{T} I(t) = \sum_{t=1}^{T} D(t-1)\alpha \rightarrow \max(\min) \quad ($$

$I(t) = D\ (t-1)\alpha$, $D\ (t)= D(t-1)\alpha - R(t)$, $R(t) = V(t) - I(t)$, $0 \le V(t) \le \gamma Д(t)$, $t = 1, \ldots, T$, $I(1)= y\alpha$, $D(0)= y$, $D(1)= y-R(1)$, $D(T) = D(T-1)-R(T) = 0$, $y \le КЦ$, $T \le \min\ (T_\delta, T_{max})$, $\sum_{t=1}^{T} V(t)\ /1+\alpha)^t$.

Управляющими параметрами в этой модели являются объем y, срок T кредита и выбираемая в каждом периоде сумма выплат $V(t)$, $t = 1,\ldots, T$. Исходными будут следующие параметры: уровень процентной ставки α; доход, получаемый заемщиком в каждом периоде $Д(t)$, $t=1, T$; коэффициент γ; условия (правила) погашения кредита и выплаты процентов.

В результате решения задачи (11), при заданных исходных данных, определяются следующие значения неизвестных параметров: объем y и срок T кредита; величина выплат в каждом периоде $V(t)$, $t = 1, \ldots, T$; проценты по кредиту $I(t)$, $t=1, \ldots, T$; сумма остаточной задолженности $D(t)$, $t = 1, \ldots, T$, характеризующие состояние инвестиционного проекта в каждом периоде.

В зависимости от того, инвестору или заемщику принадлежит право выбора условий погашения кредита, задача (11) решается или на максимум, или на минимум.

Особенность решения задачи (11) заключается в наличии большого количества неизвестных переменных, число которых зависит от срока кредита T. Так, если кредит выдан на срок T = 5 лет, с ежемесячными платежами на его погашение, то количество периодов равно 12T = 60. Это означает, что задача выбора параметров платежных потоков представляет собой задачу как минимум с 60-ю неизвестными.

На практике типичной является ситуация, когда доход заемщика Д(t), и платежный поток V(t) задаются постоянными в течение срока кредита T, т.е.

$$V(t) = V = \text{const},\ Д(t) = Д = \text{const}.$$

Балансовое уравнение (5) в этой ситуации принимает вид

$y = a\ (T,\ \alpha)\ V$, где $a(T,\ \alpha) = \sum_{t=1}^{T} 1/(1+\alpha)^t$ – коэффициент приведения единичного потока платежей.

Количество управляющих параметров при этом становится равным трем (y, T, V).

Выбор параметров из допустимой области в совокупности с рекуррентными уравнениями (1…4) позволяет осуществить процесс погашения долгосрочного кредита с постоянными выплатами наиболее просто.

Таким образом, задавая функциональный закон изменения платежного потока V(t) = f(t), где f(t) – заданная функция, можно резко сократить количество неизвестных и на этой основе задачу выбора управляющих переменных инвестиционного проекта реализовать практически простыми методами.

Оптимальное значение процентного дохода в результате решения задачи (11) на максимум или минимум обеспечивается кусочно-постоянной траекторией платежного потока.

Проведем оценку эффективности по величине процентного дохода при реализации кусочно-постоянной траектории платежного потока. Для этого предположим, что доход заемщика является постоянным за срок кредита T и равен Д, а величина постоянных периодических выплат V_0 не превышает части дохода γД, т.е. выполняется неравенство

$$V_0 < \gamma Д. \qquad (12)$$

Пусть кусочно-постоянная траектория платежного потока описывается следующим уравнением:

$$V(t) = \begin{cases} \gamma Д,\ \text{если}\ D(t-1) - R(t) > 0, \\ \quad t = 1,\ldots,k-1; \\ D(k-1)/a(T-(k-1),\ \alpha),\ \text{если} \\ \quad D(t-1) - R(t) \le 0,\ t = k,\ldots,T, \end{cases} \qquad (13)$$

где D(k –1) – невыплаченная часть долга на начало (k – 1)-го периода;

$a(T - k, \alpha) = \sum_{t=k-1}^{T} \frac{1}{(1+\alpha)^t}$ – коэффициент приведения единичного потока к (k –1)-му периоду.

Из этого уравнения следует, что на временном отрезке от 1 до (k –1)-го периодические выплаты постоянны и равны

$V_0 < \gamma Д$, $t = 1, \ldots, k - 1$, а начиная с k-го периода до конца срок T, выплаты равны $V(t) = D(k - 1)/\, a\,(T - (k - 1),\alpha)$, $t = k, \ldots, T$.

Выбор в качестве траектории кусочно-постоянной функции позволяет впервые периоды погасить большую часть долга, а оставшуюся часть долга погасить более низкими величинами периодических выплат или в k-й период досрочно погасить кредит. Реализация такой стратегии позволяет обеспечить погашение кредита и минимизировать значение процентного дохода.

Рассмотрим числовой пример погашения кредита с кусочно-постоянным платежным потоком, объемом $y = 240 \cdot 10^3$ рубля, сроком T = 5 лет, процентной ставкой $\alpha = 15\%$. Пусть ежегодный доход заемщика равен $Д = 273 \cdot 10^3$ рубля, а доля дохода на погашение кредита $\gamma = 0,4$. Тогда величина части дохода, которая может быть направлена на погашение кредита, составляет $\gamma Д = 0,4 \cdot 273 \cdot 10^3 = 109,2 \cdot 10^3$ рубля. Для формирования кусочно-постоянной траектории необходимо определить в соответствии с (13) номер периода, в котором происходит переключение на меньшие по величине выплаты. В этом периоде остаточный долг становится неположительной величиной, т.е

$$D(k) = D\,(k - 1) - R(k) \le 0. \qquad (14)$$

В этом неравенстве остаток долга D(k – 1) можно определить из уравнения

$$D\,(k - 1) = y - R(1)\,S\,(k - 1,\alpha) = y - R(1)\left(\frac{(1+i)^{k-1} - 1}{i}\right), \qquad (15)$$

где $R(1) = V - y\alpha = \gamma Д - y\alpha$ – расходы на погашение в первом периоде.

Расходы на погашение основного долга в k-м периоде R(k) определяются при известной величине расхода в 1-м периоде из соотношения

$$R(k) = R(1)\,(1 + \alpha)^k, \; R(k) = R(1)\left(\frac{(1+i)^{k} - 1}{i}\right). \qquad (16)$$

Подставляя (16) и (15) в (14), получим

$$(1 + \alpha)^{k-1} \le (28Д - y\alpha) / (\gamma Д - y\alpha)\,(2 + \alpha).$$

Из этого неравенства находим, что

$$К \le \frac{\ell n[(2\gamma Д - y\alpha)/(\gamma Д - y\alpha)(2+\alpha)]}{\ell n(1+\alpha)} + 1. \quad (17)$$

Подставляя в это уравнение исходные данные, получим, что номер периода, в котором следует переходить на меньшие величины, удовлетворяет неравенству

$$К \le \frac{\ell n[(2 \cdot 109{,}2 - 36)/(109{,}2 - 36)2{,}15}{\ell n1{,}15} +$$

Полученный результат означает, что после второго года остаток долга D(2) становится меньше расхода на погашение основного долга R(3). В связи с этим заемщик выплачивает величину остаточного долга D(2), если D(2) < γД, либо продолжает гасить кредит меньшими постоянными выплатами, равными D(2) / *a* (3,15).

В таблице 1 представлен план погашения кредита с кусочно-постоянным платежным потоком.

В первой строке таблицы 1 представлен кусочно-постоянный платежный поток: первые два года ежегодные выплаты составляют $109{,}2 \cdot 10^3$ рубля, а с 3-го года – $36{,}19 \cdot 10^3$ рубля. На втором году остаток долга меньше ежегодных выплат ($82{,}62 \cdot 10^3 < 109{,}2 \cdot 10^3$) и заемщик мог бы погасить кредит досрочно на 3-м году, но он принял решение не изменять срок кредита. Величина выплат после второго года определяется в соответствии с уравнением

$V(3) = D(2) / a(3{,}15) = 82{,}62 \cdot 10^3 / 2{,}83 = 36{,}19 \cdot 10^3$ рублей.

Конец года t	1	2	3	4	5	Итого
Выплаты по кредиту $V(t) \cdot 10^3$	109,2	109,2	36,19	36,19	36,19	$V_\Sigma = \sum_1^T V(t) = 326{,}95$
Выплата процентов $I(t) \cdot 10^3$	36	25,02	12,39	8,82	4,72	$I_\Sigma = \sum_1^T I(t) = 86{,}95$
Выплаты на погашение долга $R(t) \cdot 10^3$	73,2	84,18	23,8	27,37	31,45	$R_\Sigma = \sum_1^T R(t) = 240$
Остаток долга $D(t) \cdot 10^3$	166,8	82,62	58,82	31,45	0	

Таблица 1

План погашения кредита с кусочно-постоянными выплатами

($y = 240 \cdot 10^3$ рублей, T = 5 лет, α=15%, $\gamma Д = 109{,}2 \cdot 10^3$ рублей)

Процентный доход при реализации кусочно-постоянной траектории платежного потока составляет I_Σ = $86{,}95 \cdot 10^3$ рубля.

Таким образом, реализация кусочно-постоянной траектории с уменьшением выплат, описываемая уравнением (13) позволяет обеспечить погашение кредита в заданный срок и получить минимум расходов на выплату процентов. Такая стратегия выбора платежного потока является выгодной для заемщика, но невыгодной инвестору, поскольку он теряет часть своего дохода.

Таким образом, варьируя только траекторией платежного потока, можно, с одной стороны, адаптироваться к финансовым возможностям заемщика, а с другой стороны, существенно влиять на эффективность реализации долгосрочного кредита с позиции экономических интересов как заемщика, так и инвестора.

Следует отметить, что каждая выбранная из допустимого множества траектория платежного потока имеет достоинства для одних категорий заемщиков и обладает недостатками для других. Так, если заемщик с малым доходом прогнозирует увеличение его в будущем, то для него наилучшим является кредит с возрастающими платежами и, наоборот, если заемщик прогнозирует уменьшение в будущем своего дохода.

Таким образом, выбором траектории платежного потока при заданном объеме, сроке, процентной ставке кредита можно согласовать экономические интересы между инвестором и заемщиком. При этом обеспечивается для инвестора прибыльность и возвратность кредита, а для заемщика его доступность и выгодность по величине расходов.

Список литературы.

1. Мелкумов Я.С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям. - М.: ИНФРА-М, 1996. - 336 с.

2. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. - М.:

Дело, 1995. - 320 с.

THE MODELLING OF THE CHOICE OF METHOD THE OPTIMAL PARAMETERS OF AN INVESTMENT PROJECT

A. V. Barvinok, G.M. Grishanov, O. V. Prokhorova

Samara State Aerospace University

We suggest the discrete model of the method for optimal decision making for choice of parameters of an investment project with taking intro account the borrower paying capacity.