

## РОБАСТНОЕ ЦИФРОВОЕ ГИРОСИЛОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ ПРИ НЕПОЛНОМ ДИСКРЕТНОМ ИЗМЕРЕНИИ

© 2006 Е.И. Сомов

Самарский научный центр РАН

Представлены оригинальные методы проектирования робастных цифровых систем гиросилового управления ориентацией космических аппаратов, имеющих упругую слабо демпфированную конструкцию.

### Введение

Применение новых конструктивных схем космических аппаратов (КА) и расширение круга задач, решаемых ими при длительном сроке активного существования в условиях параметрической неопределенности, слабого собственного демпфирования упругих колебаний конструкции КА, дискретного измерения только доступных координат и наличия различных типов запаздываний при формировании цифрового управления, обусловили актуальность новых разработок в этой области. В отличие от обычных приемов теории робастных систем, предложенный в [1] подход основывается на глубоком проникновении в существо конкретной проблемы, отраженной в структуре модели и собственных свойствах упругого КА в нелинейной зависимости от значений его неопределенных физических параметров. В этом подходе используется многократная фильтрация дискретных измерений только доступных координат с целью амплитудного ослабления влияния колебаний конструкции КА на основные процессы управления ориентацией его корпуса.

### Модели движения и свойства упругого космического аппарата

При традиционных обозначениях и некоторых упрощающих предположениях динамика КА упругой конструкции вместе с неподвижными гиросиловыми (ГД) в составе силового гироскопического комплекса (СГК) описывается векторно-матричным соотношением

$$\begin{bmatrix} M I_3 & [-L \times] & M_q \\ [L \times] & J & D_q \\ M_q^t & D_q^t & A^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^* \\ \dot{\omega} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^v \\ F^\omega \\ F^q \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $M$  – суммарная масса КА в целом, векторы-столбцы

$$F^v = -M(\omega \times v + (\mu/r_o^2) e_r) + \omega \times (L \times \omega - 2L\dot{\omega}) - R_w \ddot{\gamma} - r_g(\gamma, \dot{\gamma}, \omega) + R_c;$$

$$F^\omega = -L \times (\omega \times v + (\mu/r_o^2) e_r) - \omega \times (D_q \dot{q} + K) - J_w \ddot{\gamma} - m_g(\gamma, \dot{\gamma}, \omega) + M_o;$$

$$F^q = -A^q (V_q \dot{q} + W_q q) - M_q^t (\omega \times v + (\mu/r_o^2) e_r) - P_w^t \ddot{\gamma}.$$

Здесь  $R_c$  и  $M_o$  – соответственно суммарный вектор внешних сил негравитационной природы, приложенный в центре масс (ЦМ) КА  $S$ , и суммарный вектор внешних моментов относительно полюса  $O$ ,  $e_r$  – орт местной вертикали, и при обозначениях  $[-]$  – строка,  $\{\}$  – столбец,  $(\cdot)^t$  – символ транспонирования,  $[a \times]$  – косо-симметричная трехмерная матрица на основе вектора  $a$ , введены

$$q = \{q_p, q_a\}, \quad q_p = \{q_{1p}, q_{2p}\},$$

$q_a = \{q_{1a}, q_{2a}\}$  – векторы-столбцы упругих перемещений конструкции КА, а именно двух панелей солнечных батарей (СБ) и двух антенн;

$M_q = [A_p, A_a]$  – матрица взаимовлияния *постоятельного* движения КА с упругими перемещениями панелей СБ и антенн, где

$$A_p = [A_{p1}, A_{p2}] \text{ и } A_a = [A_{a1}, A_{a2}];$$

$D_q = [B_p, B_a]$  – матрица взаимовлияния *вра-*

щательного движения КА с упругими перемещениями двух панелей СБ и двух антенн, где  $\mathbf{B}_p = [\mathbf{B}_{p1}, \mathbf{B}_{p2}]$  и  $\mathbf{B}_a = [\mathbf{B}_{a1}, \mathbf{B}_{a2}]$ ;

$\mathbf{A}^q = \mathbf{I}$  – матрица обобщенных масс, нормированная к единичной матрице;

$$\mathbf{V}_q = \text{diag}\{(\delta^p / \pi)\Omega_{1i}^p, (\delta^p / \pi)\Omega_{2i}^p, (\delta^a / \pi)\Omega_{1i}^a, (\delta^a / \pi)\Omega_{2i}^a\}$$

– матрица демпфирования

$$\mathbf{W}_q = \text{diag}\{(\Omega_{1i}^p)^2, (\Omega_{2i}^p)^2, (\Omega_{1i}^a)^2, (\Omega_{2i}^a)^2\}$$

– нормированная матрица жесткости  
 $\mathbf{R}_w, \mathbf{J}_w, \mathbf{P}_w^t$  – векторы-столбцы, отражающие инерционное влияние ротационного перемещения панелей СБ, как твердых тел, относительно корпуса КА;

$\mathbf{r}_g(\gamma, \dot{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$  и  $\mathbf{m}_g(\gamma, \dot{\gamma}, \boldsymbol{\omega})$  – нелинейные векторные функции, отражающие гироскопическое влияние перемещений панелей СБ на угол  $\gamma$  относительно корпуса КА;

$\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$  – вектор кинетического момента (КМ) корпуса КА, как твердого тела;

$\mathbf{L} = \mathbf{M}_q \mathbf{q}$  – вектор статического момента корпуса КА, как упругой конструкции.

Применение групп ГД с коллинеарными осями подвеса дает ряд важных преимуществ при формировании схемы СГК [2]. При использовании только четырех ГД в рамках такого подхода возможна лишь обобщенная классическая схема 2-SPE (2 Scissored Pair Ensemble – система 2 ножничных пар), состоящая из двух пар ГД, рис. 1. В прецессионной теории силовых гироскопов представления нормированного вектора КМ СГК

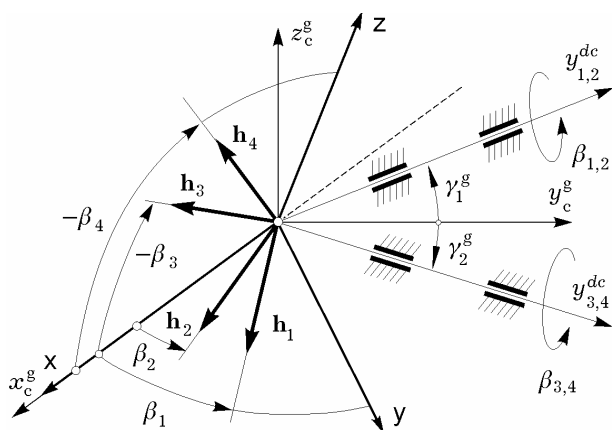


Рис. 1. Схема СГК 2-SPE

$\mathbf{h}^c \equiv \{x_c^g, y_c^g, z_c^g\}$  в каноническом базисе и  $\mathbf{h} = \{x, y, z\}$  в косоугольном гироскопическом базисе связаны соотношением  $\mathbf{h}^c = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{h}$ .

При отсчете углов поворота всех ГД от положительного направления оси  $Ox_c^g$  вектор управляющего момента СГК  $\mathbf{M}^g(\boldsymbol{\beta})$  вычисляется как  $\mathbf{M}^g(\boldsymbol{\beta}) = h_g \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) \dot{\boldsymbol{\beta}}$ , где  $h_g$  – модуль вектора КМ каждого ГД и при обозначениях

$$x_p = C_{\beta_p}, p = 1 : 4; y_p = S_{\beta_p}, p = 1, 2; z_p = S_{\beta_p}, p = 3, 4;$$

$$S_\alpha \equiv \sin \alpha; C_\alpha \equiv \cos \alpha; \quad \boldsymbol{\beta} = \{\beta_p\};$$

$$\mathbf{x} = x_{12} + x_{34}$$

$$x_{12} = x_1 + x_2; \quad x_{34} = x_3 + x_4;$$

$$\mathbf{y} = y_1 + y_2; \quad \mathbf{z} = -(z_1 + z_2)$$

$$\text{матрицы } \mathbf{A}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & S_{\gamma_1^g} & S_{\gamma_2^g} \\ 0 & -C_{\gamma_1^g} & C_{\gamma_2^g} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_h(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & -z_3 & -z_4 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_4 \end{bmatrix}.$$

Принципиальной проблемой управления СГК избыточной структуры является выбор функции распределения потребного суммарного КМ СГК между ГД – так называемого закона настройки СГК. В схеме 2-SPE указанная проблема сводится к задаче распределения суммарного КМ СГК между двумя парами ГД. Наиболее рациональными являются явные законы настройки, которые позволяют получить все характеристики движения каждого ГД по явным аналитическим соотношениям. Введем нормированную функцию распределения суммарного КМ СГК между парами ГД

$$f_p(\boldsymbol{\beta}) \equiv \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \rho(\tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 - 1); \quad \tilde{x}_1 \equiv x_{12}/q_y; \quad \tilde{x}_2 \equiv x_{34}/q_z,$$

$$q_s \equiv \sqrt{4 - \mathbf{s}^2}, |\mathbf{s}| \leq 2, \mathbf{s} = \mathbf{y}, \mathbf{z} \quad (1.2)$$

с фиксированным нормированным параметром  $\rho$  ( $0 < \rho < 1$ ). При условии  $f_p(\boldsymbol{\beta}) = 0$

внутри области  $S$  вариации КМ СГК остаются сингулярными только два *одномерных* множества в ее периферийной части. Поэтому для центральной части области  $S$  имеется *взаимнооднозначная* [2] явная аналитическая связь векторов-столбцов  $\mathbf{M}^g(\beta)$  и  $\beta$ ,  $\dot{\beta} = \mathbf{u}^g$ , что позволяет исключить избыточность СГК и его сингулярные состояния.

При невозмущенном движении ЦМ КА по произвольной эллиптической орбите в центральном гравитационном поле вектор  $\mathbf{R}_c = \mathbf{0}$ , а в невозмущенном угловом движении связанная система координат (ССК) Охуз совпадает с орбитальной системой координат (ОСК)  $Ox^o y^o z^o$ . Обозначим  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{T}_o^b \mathbf{v}^o(t) - \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{T}_o^b$  – матрица координатного перехода от ОСК к ССК и вектор-столбец  $\mathbf{v}^o(t)$  представляет скорость невозмущенного поступательного движения ЦМ КА в проекциях на оси ОСК. Учитывая, что  $\mathbf{v}^* = -[(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{T}_o^b \dot{\mathbf{v}}_o^o) \times] \mathbf{T}_o^b \mathbf{v}^o(t) + \mathbf{T}_o^b \mathbf{v}^{o*}(t) + \delta \mathbf{v}^*$ , получаем нелинейную модель движения упругого КА, управляемого СГК, в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{I}_3 & [-\mathbf{L} \times] & \mathbf{M}_q \\ [\mathbf{L} \times] & \mathbf{J} & \mathbf{D}_q \\ \mathbf{M}_q^t & \mathbf{D}_q^t & \mathbf{A}^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}^* \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\delta^v \\ \mathbf{F}_\delta^\omega \\ \mathbf{F}_\delta^q \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где векторы-столбцы

$$\mathbf{F}_\delta^v = -\mathbf{M}(\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{L} \times \boldsymbol{\omega} - 2\dot{\mathbf{L}}) - \mathbf{R}_w \ddot{\gamma} - \mathbf{r}_g(\gamma, \dot{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{R}_c$$

$$\mathbf{F}_\delta^\omega = -\mathbf{L} \times (\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v}) - \mathbf{A}_H(\beta) \dot{\beta} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} - \mathbf{J}_w \ddot{\gamma} - \mathbf{m}_g(\gamma, \dot{\gamma}, \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_\omega$$

$$\dot{\beta} = \mathbf{u}^g;$$

$$\mathbf{F}_\delta^q = -\mathbf{M}_q^t(\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v}) - \mathbf{A}^q(\mathbf{V}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_q \mathbf{q}) - \mathbf{P}_w^t \ddot{\gamma},$$

вектор  $\mathbf{G} = \mathbf{D}_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} + \mathbf{H}(\beta)$  представляет суммарный КМ упругого КА вместе с СГК, вектор  $\mathbf{H}(\beta)$  – суммарный КМ СГК, а матрица  $\mathbf{A}_H(\beta) = \partial \mathbf{H}(\beta) / \partial \beta = h_g \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_h(\beta)$ . В данной модели СГК управлением считается вектор командных скоростей прецессии ГД  $\dot{\beta} = \mathbf{u}^g$ , при этом формируется управляющий гироскопический момент СГК

$$\mathbf{M}^g = -\mathbf{A}_H(\beta) \mathbf{u}^g.$$

При вариации суммарного КМ  $\mathbf{H}(\beta)$  в малой окрестности его естественного “паркового” состояния, которое определяется условием  $\mathbf{H}^* \equiv \mathbf{H}(\beta^*) = \mathbf{0}$  при  $\beta^* = \{\beta_p^*\} = \mathbf{0}$ , обеспечивается наибольшая эффективность работы СГК произвольной схемы. Для модели КА как абсолютно твердого тела динамика углового движения КА описывается соотношениями  $\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{A}_H(\beta) \dot{\beta} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} + \mathbf{M}_o$ ;

$\dot{\beta} = \mathbf{u}^g$ , где вектор  $\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{H}(\beta)$  представляет суммарный КМ механической системы “КА+СГК”. При отсутствии внешних возмущающих моментов (т.е. при  $\mathbf{M}_o \equiv \mathbf{0}$ ) в теории гиросилового управления ориентацией КА относительно ОСК различают два варианта применения СГК, в зависимости от значения вектора  $\mathbf{G}$  суммарного КМ системы “КА+СГК” для *невозмущенного движения* корпуса КА с вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o = \{0, 0, \omega_o\} = \dot{\mathbf{v}}^o \approx \text{const}$ :

схема *сбалансированная* по суммарному КМ системы “КА+СГК”, когда вектор  $\mathbf{G} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}^o + \mathbf{H}_* \equiv \mathbf{0}$ , “парковое” состояние СГК определяется из условия  $\mathbf{H}_* \equiv \mathbf{H}(\beta_*) = -\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}^o$ ;

схема *несбалансированная* по суммарному КМ системы “КА+СГК” – вектор  $\mathbf{G} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}^o + \mathbf{H}^* = \text{const} \neq \mathbf{0}$ , в частном случае – при естественном парковом состоянии СГК  $\mathbf{H}^* \equiv \mathbf{H}(\beta^*) = \mathbf{0}$  это соответствует условию  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}^o = \text{const} \neq \mathbf{0}$ .

За счет малых внешних возмущающих моментов “векового” типа вектор  $\mathbf{G}$  медленно изменяет свою величину и направление в инерциальном базисе. Для невозмущенного движения корпуса КА представим этот вектор в виде  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_* = \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{H}_s \approx \text{const}$ , где вектор  $\tilde{\mathbf{G}} \equiv \mathbf{0}$  для сбалансированной схемы либо  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}^*$  для несбалансированной схемы, а вектор  $\mathbf{H}_s$  накопленного КМ СГК имеет про-

извольное направление. Модуль вектора  $\mathbf{H}_s$  ситуационно уменьшается до приемлемого уровня с помощью системы разгрузки СГК внешними управляющими моментами. При наличии вектора накопленного КМ  $\mathbf{H}_s$  требуется компенсирующее управление СГК, которое определяются из условий  $-\mathbf{A}_H(\boldsymbol{\beta}^0) \mathbf{u}^{s0} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{v}}^0 + \dot{\mathbf{v}}^0 \times \mathbf{G}_*$ ;  $\dot{\boldsymbol{\beta}}^0 = \mathbf{u}^{s0}$ , при этом изменяются собственные динамические свойства упругого КА. При условии  $f_p(\boldsymbol{\beta}) = 0$  для функции распределения КМ (1.2) без ограничения общности для анализа устойчивости только линеаризованных моделей движения упругого КА принимается известная схема СГК “Звезда” [3] на основе трех ГД с естественным парковым состоянием  $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}^*) = \mathbf{0}$ . Несбалансированность и наличие накопленного КМ СГК моделируется дополнительными постоянными векторами  $\mathbf{H}_*$  и  $\mathbf{H}_s$ .

При получении линеаризованной модели движения КА относительно ОСК наряду векторами-столбцами *рассогласований* углов  $\delta\boldsymbol{\alpha}(t) = \{\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3\} = \{\psi, \varphi, \theta\}$ , угловых скоростей  $\delta\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\omega}^0(t) = \{\delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3\} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z - \omega_0\}$  корпуса КА и скорости поступательного движения  $\delta\mathbf{v}$  ЦМ КА, используются векторы-столбцы  $\delta\mathbf{u}^s = \mathbf{u}^s - \mathbf{u}^{s0}$  по управлению СГК и  $\delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0$  по угловому положению ГД в составе СГК, а также векторы-столбцы малых внешних сил  $\mathbf{p}$  и моментов  $\mathbf{M}$ . Опуская далее знак  $\delta$  вариации соответствующих координат, вводятся вектор состояния  $\mathbf{x} = \{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}\}$ , соответствующие матрицы и линеаризованная модель движения упругого КА при фиксированном положении панелей СБ представляется в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u \mathbf{u}^s + \mathbf{B}_m \mathbf{M} + \mathbf{B}_p \mathbf{p}; \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad (1.4)$$

Матричные передаточные функции  $\mathbf{W}(s)$  от вектора входа ( $\mathbf{u}^s, \mathbf{M}$  либо  $\mathbf{p}$ ) к вектору выхода  $\mathbf{y}$  получаются стандартно, на-

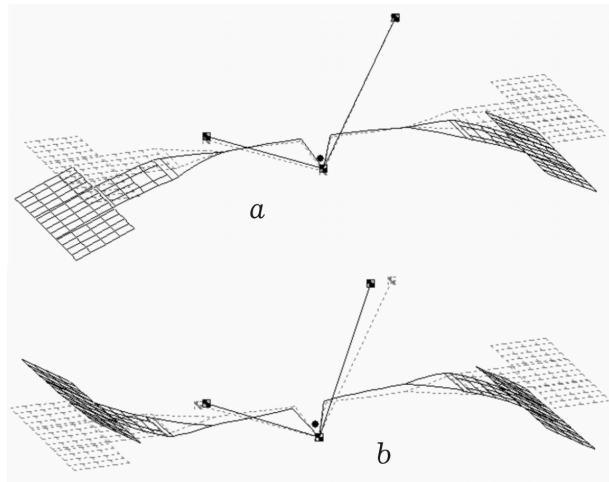


Рис. 2. Формы колебаний панелей СБ при  $\gamma = 45^\circ$ : а – симметричная, б – асимметричная

пример  $\mathbf{W}_u(s) = \mathbf{C}(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_u$  для векторного входа  $\mathbf{u}^s$ . Логарифмические амплитудные и фазовые характеристики (ЛАХ и ЛФХ) формально получаются из передаточных функций с помощью подстановки  $s = j\omega$ , однако используемые алгоритмы их расчета основываются на методах спектрального разложения. Парциальные частоты панелей СБ и антенн в составе всего изделия трансформируются в собственные частоты. При этом каждой паре практически одинаковых парциальных частот двух симметрично расположенных на корпусе КА панелей СБ и антенн соответствует две собственные частоты, из которых первая (низшая) связана с симметричной формой колебаний, а вторая (более высокая) – с асимметричной формой колебаний, рис. 2. Все собственные частоты изделия мигрируют (изменяются) в зависимости от положения панелей СБ, причем такая миграция наиболее существенна для частот, соответствующих асимметричным формам колебаний навесных конструктивных элементов – панелей СБ и антенн. В качестве примера см. рис. 3 – для конкретного КА собственная частота по второму тону колебаний панелей СБ, соответствующая асимметричной форме изгибных колебаний, в зависимости от угла  $\gamma$  их положения *нелинейно* изменяется от 0.147653 Гц (при  $\gamma = 0^\circ$ ) до 0.172134 Гц (при  $\gamma = 90^\circ$ ), т.е. примерно на 17%. Этот факт необходимо учитывать при проектиро-

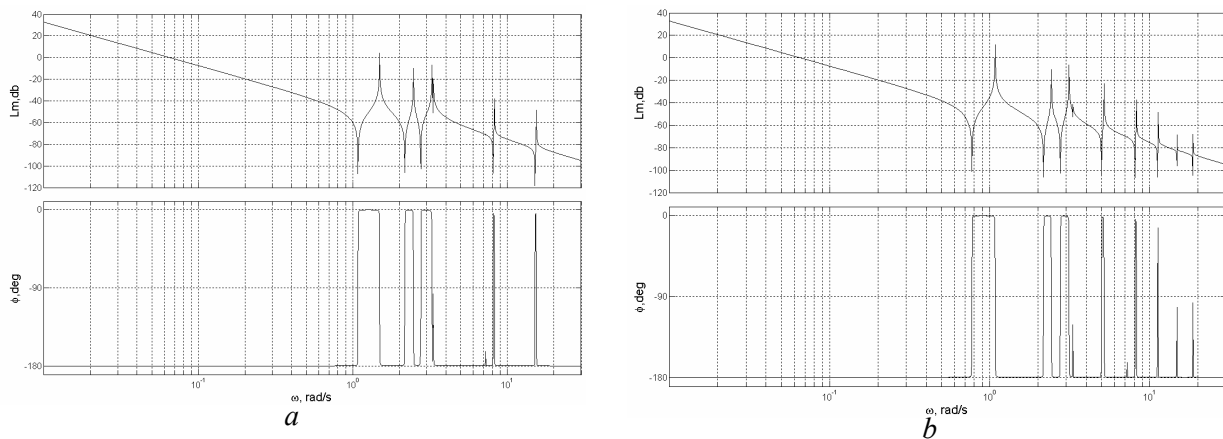


Рис. 3. ЛАХ и ЛФХ упругого КА по каналу крена:

*a* – при  $\gamma = 0^\circ$ , *b* – при  $\gamma = 90^\circ$

вании гиросиловой цифровой системы управления движением (СУД) и добиваться ее робастности в отношении вариации жесткостных и инерционных параметров упругого КА при минимальном *гарантированном* значении декремента колебаний навесных конструктивных элементов.

### Агрегирование линейных многократных систем

Дискретные алгоритмы управления по каждому каналу основываются на дискретном аналоге реального дифференцирующего звена, обеспечивающего форсирование управляющего дискретного сигнала только в районе частоты среза ЛАХ. Дискретная частотная передаточная функция такого звена в зависимости от псевдочастоты  $\lambda$  имеет вид  $W(\lambda) = k(1 + j\lambda\tau_1)/(1 + j\lambda\tau_2)$ , где  $k, \tau_1, \tau_2$  являются параметрами.

Рассмотрим линейный стационарный объект с *кусочно-постоянным* управлением

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}_k(t), \quad \dot{\mathbf{u}}_k(t) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t);$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad t \in T_0 \equiv [t_0, +\infty), \quad t_0 = 0, \quad (2.1)$$

где вектор-функция управления  $\mathbf{u}_k(t) = \{\mathbf{u}_{jk}(t)\} \in \mathbf{R}^r$  с определением  $\mathbf{u}_k(t_k) = \mathbf{u}_k$  формируется в дискретные моменты времени  $t_k$  и фиксируется на полуинтервале времени  $t \in T_k \equiv [t_k, t_{k+1})$  с основным периодом  $T_u$ , что определяется как

$$\mathbf{u}_k(t) = \{\mathbf{u}_{jk}(t)\}; \quad \mathbf{u}_{jk}(t) = Z h(t, t_k, \mathbf{u}_{jk}) = \mathbf{u}_{jk} = \text{const} \quad \forall t \in T_k \equiv [t_k, t_{k+1}), \quad t_k = kT_u, \quad (2.2)$$

$k \in N_0 \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , вектор  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  описывает состояние объекта, а вектор  $\mathbf{u}_k = \{\mathbf{u}_{jk}\} \in \mathbf{R}^r$  представляет дискретную текущую команду – выход дискретного алгоритма управления, формируемый БЦВМ только в дискретные моменты времени  $t_k$ .

Измерение  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$  состояния объекта (1.1) является *неполным* и выполняется только в моменты времени  $t_s = sT_q$ ,  $s \in N_0$  с периодом  $T_q \leq T_u$ , *кратным* периоду управления  $T_u$ , что описывается так:

$$\mathbf{y}_s \equiv \mathbf{y}(t_s) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t_s); \quad \mathbf{y}_s \in \mathbf{R}^l, \quad l < n. \quad (2.3)$$

Будем считать, что при вычислении вектора дискретной команды управления  $\mathbf{u}_k$  применяется дискретная система с периодом квантования  $T_q$ , описывающая алгоритм *рекуррентной* линейной дискретной фильтрации рассогласования  $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{r}_k - \boldsymbol{\chi} \mathbf{y}_s$ , где  $\mathbf{r}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k^r$  – сигнал внешней команды,  $\mathbf{r}_k \in \mathbf{R}^l$ ,  $\mathbf{r}_k = \{\mathbf{r}_{ik}\}$ ;  $\mathbf{x}_k^r$  – вектор эталонных переменных состояния системы,  $\boldsymbol{\chi}$  – диагональная матрица с элементами, равными 1 либо 0 при *замыкании* либо *размыкании* системы по отдельным каналам:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s+1} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_s + \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{r}_k - \boldsymbol{\chi}\mathbf{y}_s;$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_s = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}_s + \tilde{\mathbf{D}}\boldsymbol{\varepsilon}_s; \quad \tilde{\mathbf{x}}_s, \tilde{\mathbf{y}}_s, \boldsymbol{\varepsilon}_s \in \mathbf{R}^l, \quad s \in N_0 \quad (2.4)$$

и выходным сигналом  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^F = \tilde{\mathbf{y}}_s|_{s=n_q \cdot k^*}$ , где  $k^* = E[s/n_q]$ ,  $E[\cdot]$  – символ целой части, а  $\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}$  – матрицы соответствующей раз- мерности. Дискретизация с периодом  $T_q = T_u/n_q$  стандартного непрерывного аperiodического звена с передаточной фун- кцией  $W(s) = 1/(1 + T_f s)$  и постоянной вре- мени  $T_f$ , без фиксатора на входе для каж- дого канала управления при введении нор- мировки приводит к дискретной передаточ- ной функции  $W_f(z_q) = (1 + b_1^f)/(1 + b_1^f z_q^{-1})$ ;  $b_1^f \equiv -\exp(-T_q/T_f)$ ;  $z_q \equiv \exp(sT_q)$  с условием  $W_f(1) = 1$ . В каждом канале такой переда- точной функции соответствует алгоритм линейной дискретной фильтрации  $\tilde{\mathbf{y}}_{s+1} = -b_1^f \tilde{\mathbf{y}}_s + (1 + b_1^f) y_{s+1}$ , который представ- ляется в форме (2.4) с помощью диагональ- ных матриц  $\tilde{\mathbf{A}} = \{-b_f\}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}} = \{b_f\}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}} = \{-(1 + b_f)\}$  и  $\tilde{\mathbf{D}} = \{1 + b_f\}$ .

Выходные сигналы  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^F$  фильтра (2.4) поступают в дискретный динамический ре- гулятор с периодом дискретизации  $T_u$ :

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{B}^g \mathbf{g}_k + \mathbf{C}^g \boldsymbol{\varepsilon}_k^F; \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{K}^g (\mathbf{g}_k + \mathbf{P}^g \boldsymbol{\varepsilon}_k^F), \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{B}^g, \mathbf{C}^g, \mathbf{P}^g$  и  $\mathbf{K}^g$  – постоянные диагональ- ные матрицы, причем диагональные элемен- ты матриц  $\mathbf{B}^g, \mathbf{C}^g, \mathbf{P}^g$  при обозначении  $a_i = [(2/T_u)\tau_{1i} - 1]/[(2/T_u)\tau_{1i} + 1]$  вычисляются по соотношениям

$$b_i^g = [(2/T_u)\tau_{2i} - 1]/[(2/T_u)\tau_{2i} + 1];$$

$$p_i^g = (1 - b_i^g)/(1 - a_i); \quad c_i^g = p_i^g (b_i^g - a_i).$$

При обозначениях  $\varepsilon_q = 1/n_q = T_q/T_u$ ;

$$\mathbf{A}_d^{\varepsilon_q} = \exp(T_q \mathbf{A}); \quad \mathbf{B}_d^{\varepsilon_q} = \int_0^{T_q} \exp(\tau \mathbf{A}) d\tau \cdot \mathbf{B} \quad \text{век-}$$

торное уравнение, описывающие эволюцию состояния объекта (2.1) с периодом измере- ния  $T_q$  при *постоянном* на этом периоде управлении  $\mathbf{u}_k$ , имеет вид

$$\mathbf{x}_{s+1} = \mathbf{A}_d^{\varepsilon_q} \mathbf{x}_s + \mathbf{B}_d^{\varepsilon_q} \mathbf{u}_k, \quad s, k \in N_0, \quad k = E[s/n_q], \quad (2.6)$$

где значения управления  $\mathbf{u}_k$  формируются согласно (2.2).

Приведем рассматриваемую систему к дискретной форме для главного периода  $T_u$ , как *наибольшему* из имеющихся периодов квантования в системе, т.е. к виду:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}_d^r \mathbf{X}_k + \mathbf{B}_d^r \mathbf{r}_k; \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{C}_d^r \mathbf{X}_k, \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k) = \{\mathbf{x}_k, \tilde{\mathbf{x}}_k, \mathbf{g}_k\}$  – вектор состоя- ния системы в моменты времени  $t_k$ ,  $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{x}_k\}$  – вектор выходных переменных, а  $\mathbf{A}_d^r$  – постоянная матрица размерности  $N \times N$ , причем  $N = n + l + l$ . Вектора  $\mathbf{X}(t_k)$  принципиально *недостаточно* для описания состояния системы во все *промежуточные* моменты времени  $t \in T_k$ , так как на полуин- тервале  $T_k \equiv [t_k, t_{k+1})$  вектор  $\mathbf{u}_k(t)$  (2.2) и командный вектор  $\mathbf{r}_k$  являются *постоянными* функциями времени. Поэтому следует принять расширенный вектор состояния  $\tilde{\mathbf{X}}_k = \{\mathbf{X}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{r}_k\}$  и анализировать его измене- ния на главном периоде дискретности.

Выделяется три вида изменения состо- яния модели системы для  $t \in T_k$ :

1° *вычисление* вектора  $\mathbf{u}_k$  в момент кван- тования  $t = t_k$  согласно (2.5):

$$\tilde{\mathbf{X}}_k^+ = \mathbf{P}_u \tilde{\mathbf{X}}_k^-, \quad \tilde{\mathbf{X}}_k^\pm = \tilde{\mathbf{X}}(t_k \pm 0); \quad (2.8)$$

2° *изменение* состояния динамической части дискретного регулятора (1.5) для мо- мента времени  $t_{k+1}$  согласно матричному соотношению

$$\tilde{\mathbf{X}}_k^+ = \mathbf{P}_g \tilde{\mathbf{X}}_k^-; \quad (2.9)$$

3° *изменение* состояния системы, *изме- рение* и *фильтрация* измерений с периодом  $T_q$  согласно соотношению

$$\tilde{\mathbf{X}}_{s+1} = \mathbf{P}_q \tilde{\mathbf{X}}_s, \tilde{\mathbf{X}}_s = \{\mathbf{x}_s, \tilde{\mathbf{x}}_s, \mathbf{g}_s, \mathbf{u}_s, \mathbf{r}_s\}, \quad (2.10)$$

В соотношениях (2.8) – (2.10) матрицы переходов  $\mathbf{P}$  с различными нижними индексами имеют вид:

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}^g \mathbf{P}^g \tilde{\mathbf{D}} \chi \mathbf{C} & \mathbf{K}^g \mathbf{P}^g \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{K}^g & \mathbf{0} & \mathbf{K}^g \mathbf{P}^g \tilde{\mathbf{D}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}$$

;

$$\mathbf{P}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^g \tilde{\mathbf{D}} \chi \mathbf{C} & \mathbf{C}^g \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{V}^g & \mathbf{0} & \mathbf{C}^g \tilde{\mathbf{D}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^{\varepsilon_q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_d^{\varepsilon_q} & \mathbf{0} \\ -\tilde{\mathbf{B}} \chi \mathbf{C} & \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{V}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_l \end{bmatrix}.$$

Учет *всех изменений* состояния непрерывно-дискретной системы на полуинтервале  $T_k$  приводит в итоге к векторному соотношению

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}_d^r \tilde{\mathbf{X}}_k = \tilde{\mathbf{A}}_d^r \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^r & & \mathbf{B}_d^r \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{r}_k \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

где матрица  $\tilde{\mathbf{A}}_d^r = (\mathbf{P}_q)^{n_q} \mathbf{P}_g \mathbf{P}_u$ . Для получения модели системы (2.7) в соотношениях (2.11) с вектором состояния  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  следует опустить вектор  $\mathbf{u}_k$  текущей команды на  $k$ -м шаге, так как он является избыточным – нет рекуррентности по индексу  $k$ . Алгебраически это отражается в том, что столбцы блочной матрицы  $\mathbf{P}_u$ , а следовательно и столбцы матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_d^r$ , соответствующие вектору  $\mathbf{u}_k$ , обязатель-

но получаются нулевыми. Отбрасывая в матрице  $\tilde{\mathbf{A}}_d^r$  последние  $r+l$  строк и столбцов, получается искомая матрица  $\mathbf{A}_d^r$  замкнутой системы, см. (2.11). Матрица  $\mathbf{B}_d^r$  получается из столбцов матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_d^r$ , соответствующих вектору  $\mathbf{r}_k$ , при отбрасывании в них последних  $r+l$  строк, см. (2.11). В итоге матрицы  $\mathbf{A}_d^r$ ,  $\mathbf{B}_d^r$  и матрица  $\mathbf{C}_d^r = [\mathbf{I}_l, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$  полностью описывают эквивалентную замкнутую дискретную систему (2.7) с периодом  $T_u$  и выходным вектором  $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{x}_k\}$ .

Данный подход к агрегированию линейной непрерывно-дискретной многократной системы на главном периоде позволяет получить дискретную модель разомкнутой по любому компоненту выходного вектора  $\mathbf{Y}_k$  системы относительно любого компонента входного вектора  $\mathbf{r}_k$ . С этой целью матрицы  $\mathbf{B}_d^r = [\mathbf{b}_{dj}^r]$  и  $\mathbf{C}_d^r = \{\mathbf{c}_{di}^r\}$  в (2.7) представляются в виде совокупности столбцов  $\mathbf{b}_{dj}^r, j = 1:l$ , где  $j$  – номер компоненты  $r_{jk}$  вектора  $\mathbf{r}_k$ , и строк  $\mathbf{c}_{di}^r, i = 1:l$ , где  $i$  – номер компоненты  $u_{ik}$  вектора  $\mathbf{Y}_k$ , и назначая одному (и только одному) диагональному элементу в матрице  $\chi$  нулевое значение. В результате расчета матрицы  $\mathbf{A}_d^r$  с такой матрицей  $\chi$  получается модель системы, разомкнутой по  $j$ -му собственному ( $i = j$ ) каналу, со скалярными входом  $r_{jk}$  и выходом  $u_{ik}$ :

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}_d^r \mathbf{X}_k + \mathbf{b}_{dj}^r r_{jk}; \quad u_{ik} = \mathbf{c}_{di}^r \mathbf{X}_k. \quad (2.12)$$

### Анализ устойчивости и качества линейных дискретных моделей

Определение устойчивости линейной замкнутой непрерывно-дискретной системы понимается как прямая композиция классических понятий устойчивости ее непрерывной и дискретной частей. Разработанное программное обеспечение для анализа устойчи-



Рис. 4. Диалоговая панель программного комплекса для линейного анализа устойчивости СУД

ности многократных дискретных моделей гиросиловых СУД КА основано на частотных методах (критерий *Найквиста* в логарифмическом масштабе для разомкнутых каналов) и на корневых методах с использованием прямого расчета собственных значений  $z_i^d(A_d)$  матрицы замкнутой дискретной системы. Созданные программные средства позволяют выполнять тщательный анализ влияния сбалансированности схемы и накопленного КМ СГК на устойчивость гиросиловой СУД упругого КА. В качестве примера некоторые результаты таких исследований для конкретного КА с декрементами колебаний  $\delta^p = \delta^a = 0.002$  его конструкции и исходными данными на рис. 4 представлены по каналу рыскания на рис. 5.

На рис. 5 представлены ЛАХ и ЛФХ по каналу рыскания для несбалансированной схемы, где верхние графики соответствуют контуру без применения фильтра, при этом все каналы гиросиловой СУД неустойчивы. Эти дискретные частотные характеристики иллюстрируют эффект, вносимый дискретным фильтром с постоянной времени  $T_f = 1.5$

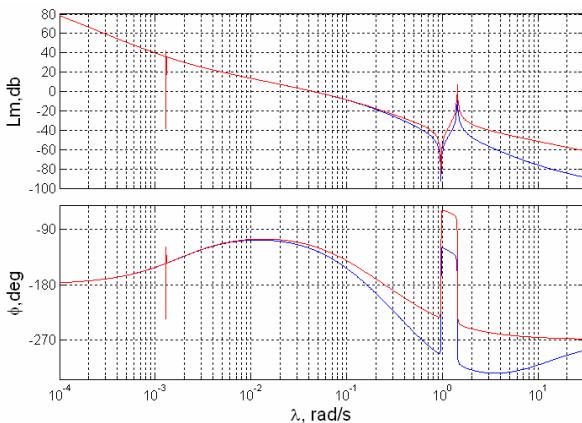


Рис.5. ЛАХ и ЛФХ канала рыскания

сек, а именно эффект подавление ЛАХ только в окрестности резонанса панелей СБ по второму тону упругих колебаний при незначительном уменьшении запаса устойчивости по фазе до  $57.4^\circ$ .

Основной вывод исследований: с позиций обеспечения робастной устойчивости и качества при наличии накопленного КМ СГК предпочтительна сбалансированная схема.

### Нелинейный анализ динамики и синтез цифровой гиросиловой СУД

Разработанные алгоритмы управления основываются на многократной фильтрации измерений углового положения КА, а также измерениях вектора угловой скорости КА и положения каждого ГД с периодом управления  $T_u$ , и имеют в общем случае заданного программного углового движения три информационных компонента:

1. *программный* механический момент, связанный с орбитальным движением КА и его программным угловым движением (вектор-функция времени);

2. *компенсирующий* механический момент для приближенной нейтрализации влияния вектора суммарного КМ системы “КА+СГК”, здесь используются дискретные измерения вектора угловой скорости корпуса КА и дискретная информация о фактическом положении всех гиросиловых в составе СГК;

3. *стабилизирующий* механический момент, вычисляемый по текущим дискретным значениям вектора углового рассогласования ССК относительно программного движения.

После формирования векторной суммы этих трех компонентов результат поступает в цифровой блок распределения управлений



между гиросилодами, где по нелинейным аналитическим соотношениям вычисляются цифровые команды для каждого ГД на очередном такте управления. Для параметрического синтеза цифровых алгоритмов гиросилового управления, робастных в отношении вариации инерционных и жесткостных параметров конструкции КА с очень слабым собственным демпфированием, разработано программное обеспечение имитационного моделирования с диалоговой средой на рис. 6. Некоторые результаты выполненного синтеза СУД конкретного КА на высокоэллиптической орбите при сбалансированной схеме и значении угла установки панелей СБ  $\gamma = 45^\circ$  представлены на рис. 7 для углов ориентации ССК относительно ОСК.

### Особенности синтеза гиросилового управления космическими роботами

Среди проблем сборки больших космических конструкций непосредственно на орбите [4] с использованием свободнолетающих космических роботизированных модулей (КРМ) выделяется задача гиросилового управления их пространственным движением в режиме транспортировки полезного груза, который упруго и часто асимметрично закреплен относительно строительного базиса служебного отсека КРМ, а также обладает собственной нежесткой слабо демпфирован-

ной конструкцией. КРМ должен выполнять программные маневры поступательных и угловых движений с краевыми условиями общего вида, причем требуется ограничение возбуждения упругих колебаний общей конструкции связки твердых и упругих тел в процессе таких маневров.

Представленная выше методика синтеза гиросилового управления вполне применима к КРМ указанного типа. Как и для маневрирующих КА оптико-электронного наблюдения поверхности Земли [5], здесь необходимо использовать кватернионные кинематические соотношения, выполнять их линеаризацию с введением кватерниона рассогласования углового положения ССК относительно ее программного движения, а также проводить дополнительный анализ влияния внешних управляющих сил, применяемых для коррекции поступательного движения ЦМ КРМ, с оценкой степени возбуждения ими упругих колебаний общей конструкции.

### Заключение

Представлены оригинальные методы проектирования робастных цифровых систем гиросилового управления разнообразных космических аппаратов, имеющих упругую слабо демпфированную конструкцию, при неполном дискретном измерении их состояния. Полученные результаты эффективно использованы практически при создании гиросило-

The screenshot shows a software interface for data input. The window title is "Figure 2: ВВОД ДАННЫХ". The interface is organized into several sections:

- Корпус КА (Spacecraft Body):**
  - Тонов каждой панели: 2
  - Разворот панелей [гр]: 0
  - Тонов каждой антенны: 1
  - Декремент: 0.002
  - Масса корпуса [кг]: 2325
- Силовой гиросомплекс (Control Gyrocomplex):**
  - Кинетич. момент ГД [Нмс]: 150
  - Макс. скор. прец. [гр/с]: 0.8
  - Угол установки ГД1,2 [гр]: 90
  - Коэф.ф.-ции распредел.: 0.97
  - Угол установки ГД3,4 [гр]: 0
- Орбита (Orbit):**
  - Радиус апогея [км]: 46370
  - Аргумент перигея [град]: 23
  - Радиус перигея [км]: 7370
- Условия интегрирования (Integration Conditions):**
  - Интервал [с]: 600
  - Абс. погрешность шага: 1e-005
  - Начальный шаг [с]: 0.05
  - Отн. погрешность шага: 1e-005
  - Шаг вывода [с]: 1
- Параметры управления (Control Parameters):**
  - Период управления [с]: 4
  - Постоянная фильтра [с]: 1.5
  - Период измерения [с]: 1
- К =** (Matrix):
 

x	y	z
0.03	0.025	0.03
- τ 1 =** (Matrix):
 

550	400	400
-----	-----	-----
- τ 2 =** (Matrix):
 

8	8	8
---	---	---
- Ориентация (Orientation):**

	рыскание (x)	крен (y)	тангаж (z)
Ориентац. отн. ОСК [гр]	0.5	0.5	0.5
Угл. скор. в ССК [гр/с]	0	0	two
Накопл. КМ СГК [Нмс]	0	0	0

A "Старт" (Start) button is located at the bottom right of the dialog box.

Рис. 6. Диалоговая среда ввода исходных данных для имитационного моделирования

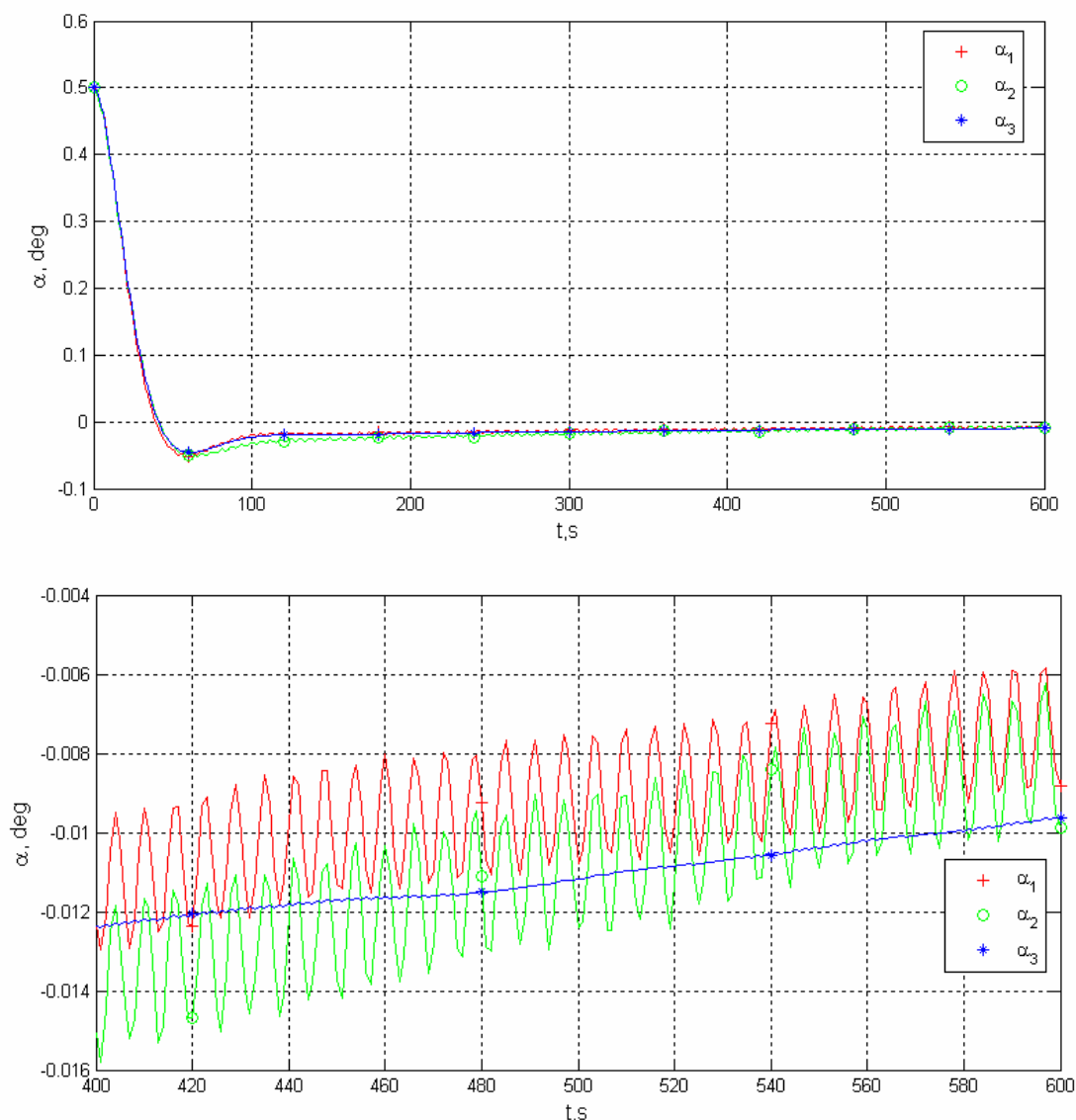


Рис. 7. Переходные процессы по углам ориентации КА относительно ОСК при  $\gamma = 45^\circ$

силовых отказоустойчивых систем управления ориентацией многих российских КА информационного назначения – спутников связи, навигации и наблюдения [5,6].

Работа поддержана РФФИ (04-01-96501 и 05-08-18175), Президиумом РАН (программа фундаментальных исследований 22) и Отделением энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН (программы 16 и 18)

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сомов Е.И. Робастная стабилизация упругих космических аппаратов при неполном дискретном измерении и запаздывании в управлении // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 2.
2. Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сорокин А.В., Платонов В.Н. Управление силовыми гироскопическими комплексами космических аппаратов// Труды X Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург: ЦНИИ “Электроприбор”, 2003.
3. Сомов Е.И. Динамика многократной цифровой системы пространственной гиросиловой стабилизации упругого космического аппарата // Динамика и управление космическими объектами. Новосибирск: Наука, 1992.
4. Глумов В.М., Крутова И.Н, Суханов В.М. Адаптивная система управления на основе нечеткой логики для большой косми-

- ческой конструкции в процессе ее сборки на орбите// *АиТ*. 2004. №. 10.
5. *Somov Ye.I., Rayevsky V.A., Matrosov V.M., Anshakov G.P.* Nonlinear dynamics of spacecraft fault-tolerant control systems // *Нелинейная теория управления и ее приложения*. М.: Физматлит, 2003.
6. *Matrosov V.M., Somov Ye.I.* Nonlinear problems of spacecraft fault tolerant control systems // *Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, vol. 12: *Advanced in Dynamics and Control*. – A CRC Press Company, Boca Raton - London - New York - Washington, D.C., 2004.

**ROBAST DIGITAL GYROMOMENT CONTROL OF FLEXIBLE SPACECRAFT  
AT AN INCOMPLETE DISCRETE MEASUREMENT**

© 2006 Ye.I. Somov

Samara Science Centre of Russian Academy of Sciences

Original methods for designing the robust digital gyromoment attitude control systems of spacecraft with a flexible weak damping structure, are presented.