

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ АВТОРЕГРЕССИИ ПРИ АВТОКОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХАХ В ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ

© 2006 В.М. Тренькин

Самарская государственная академия путей сообщения

В статье рассматривается устойчивый численный метод решения задачи минимизации отношения двух квадратичных форм, что позволяет находить оценки параметров авторегрессии при конечной выборке, при наличии автокоррелированных помех наблюдений.

Пусть имеет место случайный процесс авторегрессии конечного порядка, описываемый следующим стохастическим линейным разностным уравнением порядка r с дискретным временем $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$:

$$Z_i - \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} Z_{i-m} = \xi_1(i), \quad (1)$$

$$y_i = Z_i + \xi_2(i)$$

где Z_i, y_i – наблюдаемый и ненаблюдаемый векторы состояний системы, $\xi_1(i)$ – генератор авторегрессии, $\xi_2(i)$ – коррелированная помеха. Требуется определить оценку $\hat{b}(N)$ по y_i .

Пусть выполняются следующие условия:

1) Случайный процесс $\xi_1(i)$ удовлетворяет условиям:

$$E(\xi_1(i+1)/F_i) = 0 \text{ п.н.};$$

$$E(\xi_1^2(i+1)/F_i) = C(i+1) \leq \pi < \infty \text{ п.н.};$$

$$E(\xi_1^4(i)) \leq \pi < \infty.$$

2) Случайный процесс $\xi_2(i)$ удовлетворяет условиям:

$$E(\xi_2(i+1)/F_i) = 0 \text{ п.н.};$$

$$E(\xi_2^2(i_0)) \leq \pi < \infty;$$

$$E(\xi_2^2(i+1)/F_i) \leq W,$$

где W – случайная величина, $E(W) \leq \pi < \infty$, E – оператор математического ожидания, F_i – у – алгебра, индуцированная семейством случайных величин $\{\xi_k(t), t \in T_i\}$, $k = \overline{1, 2}$,

$T_i = \{t; t \leq i, t \in Z_c - \text{множество целых чисел}\}$.

3) Случайные процессы $\{\xi_1(i)\}$ и $\{\xi_2(i)\}$ статистически независимы.

4)

$$N^{-1} \sum_{i=i_0}^N \xi_2(i) \xi_2(i+m) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{н.н.}} h_{\xi_2}^*(m) < \infty,$$

$$m = 0, \dots, r$$

где $h_{\xi_2}^*(m)$ – локальная автоковариационная функция, $\tilde{H}_{\xi_2}^*$ – положительно определенная матрица

$$\tilde{H}_{\xi_2}^* = \begin{vmatrix} h_{\xi_2}^*(0) & h_{\xi_2}^*(1) & \dots & h_{\xi_2}^*(r) \\ h_{\xi_2}^*(1) & h_{\xi_2}^*(0) & \dots & h_{\xi_2}^*(r-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{\xi_2}^*(r) & h_{\xi_2}^*(r-1) & \dots & h_{\xi_2}^*(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{\xi_2}^*(0) & (\tilde{h}_{\xi_2}^*)^T \\ h_{\xi_2}^* & H_{\xi_2}^* \end{vmatrix},$$

где

$$H_{\xi_2}^* = \begin{vmatrix} h_{\xi_2}^*(0) & \dots & h_{\xi_2}^*(r-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{\xi_2}^*(r-1) & \dots & h_{\xi_2}^*(0) \end{vmatrix},$$

$$\tilde{h}_{\xi_2}^* = (h_{\xi_2}^*(1), \dots, h_{\xi_2}^*(r))^T \in R_r.$$

5) Множество, которому априорно принадлежат истинные значения параметров

$(b_0^{(1)}, \dots, b_0^{(r)})^T \in \tilde{B}$ компактно, $\tilde{B} \in R_r$.

б) Для случайного процесса Z_i существует предел:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N Z_r(i) Z_r^T(i) = H_{ZZ}^*$$

где

$$Z_r(i) = (Z_{i-1}, \dots, Z_{i-r})^T \in R_r.$$

Представим уравнение (1) в виде:

$$y_i = y_r^T(i) b_0 + \xi_1(i) + \xi_2(i) - \Xi_r^T b_0,$$

где

$$y_r(i) = (y_{i-1}, \dots, y_{i-r})^T \in R_r,$$

$$\Xi_r = (\xi_2(i), \dots, \xi_2(i-r))^T.$$

Введем обобщенную ошибку:

$$e(b_0, i) = y_i - y_r^T(i) b_0 = \xi_1(i) + \xi_2(i) - \Xi_r^T b_0.$$

Средняя дисперсия обобщенной ошибки равна:

$$\bar{\sigma}_e^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{i=1}^N E(e^2(b_0, i)) = h_{\xi_1}^*(0) +$$

$$+ h_{\xi_2}^*(0) + (H_{\xi_2}^* b_0, b_0) - 2(\tilde{h}_{\xi_2}^*, b_0) = \omega(b_0),$$

где (\cdot, \cdot) - скалярное произведение.

Определим оценку $(\hat{b}(N))$ неизвестного истинного значения параметра (b_0) из условия минимума суммы взвешенных квадратов обобщенных ошибок $e^2(b, i)$ с весом $\omega(b)$, т.е. [1]:

$$\begin{aligned} \min_{(b) \in \tilde{B} \subset R_r} \omega^{-1}(b) \sum_{i=1}^N (y_i - y_r^T(i) b)^2 = \\ = \min_{(b) \in \tilde{B} \subset R_r} \omega^{-1}(b) U_N(b), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$U_N(b) = \sum_{i=1}^N (y_i - y_r^T(i) b)^2.$$

Утверждение 1. Пусть некоторый случайный процесс $\{y_i, i = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ описывается уравнением (1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-5.

Тогда оценка $\hat{b}(N)$ определяемая выражением (2) с вероятностью 1 при $N \rightarrow \infty$ ПТ,

существует, единственная и является сильно-состоятельной оценкой, т.е.

$$\hat{b}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} b_0,$$

при этом

$$N^{-1} \min_{(b) \in \tilde{B} \subset R_r} \omega^{-1}(b) U_N(b) = \frac{N^{-1} U_N(b_0)}{\omega(b_0)} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию:

$$\begin{aligned} N^{-1} U_N(b) &= N^{-1} \sum_{i=1}^N (Z_i + \xi_2(i) - (Z_r(i) + \Xi_r)^T b)^2 = \\ &= N^{-1} \sum_{i=1}^N (\xi_1(i) + \xi_2(i) + Z_r^T(i) b_0 - (Z_r(i) + \Xi_r)^T b)^2 = \\ &= N^{-1} \sum_{i=1}^N (\xi_1(i) + \xi_2(i) - Z_r^T(i) \tilde{b} - \Xi_r^T b)^2 = \\ &= \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{b} = b - b_0;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= N^{-1} \sum_{i=1}^N (\xi_1^2(i) + \xi_2^2(i) + b^T \Xi_r (\Xi_r)^T b - \\ &- 2(\xi_1(i) + \xi_2(i)) \Xi_r^T b); \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N \tilde{b}^T Z_r(i) Z_r^T(i) \tilde{b};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3 &= 2N^{-1} \sum_{i=1}^N ((-\xi_2(i) - \xi_1(i)) Z_r^T(i) \tilde{b} + \\ &+ Z_r^T(i) \tilde{b} \Xi_r^T b + \xi_1(i) \xi_2(i)). \end{aligned}$$

Из предположений 1-5 получаем:

$$\mathcal{G}_1 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0) + b^T H_{\xi_2}^* b - 2(\tilde{h}_{\xi_2}^*)^T b;$$

$$\forall b \in R_r.$$

$$\mathcal{G}_2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \tilde{b}^T H_{ZZ}^* \tilde{b}; \forall b \in R_r.$$

$$\mathcal{G}_3 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0, \forall b \in R_r.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} N^{-1} U_N(b) &\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0) + b^T H_{\xi_2}^* b - \\ &- 2(\tilde{h}_{\xi_2}^*)^T b + \tilde{b}^T H_{ZZ}^* \tilde{b} = \\ &= b^T (H_{ZZ}^* + H_{\xi_2}^*) b - 2(H_{ZZ}^* b_0 + \tilde{h}_{\xi_2}^*)^T b + \end{aligned}$$

$$+ h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0) + b_0^T H_{ZZ} b_0 = \tilde{U}(b), \forall b \in R_r.$$

Покажем что решение задачи

$$\min_{(b) \in \tilde{B} \subset R_r} \omega^{-1}(b) \tilde{U}(b)$$

существует и достигается в единственной точке b_0 , т.е.

$$\min_{(b) \in \tilde{B} \subset R_r} \omega^{-1}(b) \tilde{U}(b) = \frac{\tilde{U}(b_0)}{\omega(b_0)} = 1. \quad (3)$$

Для этого рассмотрим функцию

$$V(b, \theta) = \tilde{U}(b) - \theta \omega(b), \theta \in R_1,$$

$$V(\theta) = \min_{(b) \in \tilde{B} \subset R_r} V(b, \theta).$$

Дифференцируя $V(b, \theta)$ по b и приравнявая производную к нулю, находим $b(\theta)$, и тогда

$$V(\theta) = h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0) + b_0^T H_{ZZ}^* b_0 - \theta h_{\xi_1}^*(0) - \theta h_{\xi_2}^*(0) - (H_{ZZ}^* b_0 + \tilde{h}_{\xi_2}^* - \theta \tilde{h}_{\xi_2}^*)^T \times \\ \times (H_{ZZ}^* + H_{\xi_2}^* - \theta H_{\xi_2}^*)^{-1} \times (H_{ZZ}^* b_0 + \tilde{h}_{\xi_2}^* - \theta \tilde{h}_{\xi_2}^*).$$

Легко проверить, что уравнение $V(\theta) = 0$ на интервале $(-\infty, \lambda_{\min} + 1)$ имеет не более одного корня. Где λ_{\min} – минимальное собственное значение матрицы H_{ZZ}^* . Непосредственной постановкой $\theta_1 = 1$ в уравнение $V(\theta) = 0$ легко убедимся, что этим единственным корнем на интервале $(-\infty, \lambda_{\min} + 1)$ является $\theta_1 = 1$. Тогда непосредственно следует справедливость (3). Получаем, что с вероятностью 1 при $N \rightarrow \Gamma$ решение задачи (2) существует и является единственным т.е. с вероятностью 1 при $N \rightarrow \Gamma$ существует единственная оценка $\hat{b}(N)$ и

$$\hat{b}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{П.Н.}} b_0,$$

$$N^{-1} \min_{(b) \in \tilde{B} \subset R_r} \omega^{-1}(b) U_N(b) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{П.Н.}} 1.$$

Из утверждения следует, что для получения сильно состоятельных оценок (2) требуется априорное знание лишь отношение γ средних дисперсий генерирующих шума

$\{\xi_1(i)\}$ и аддитивного шума измерений $\{\xi_2(i)\}$.

Далее показан численный метод построения оценок параметров авторегрессии с авторегрессионными помехами в выходных сигналах на основе введенного нелинейного метода наименьших квадратов, представляющего собой отношение двух квадратичных функций [2].

Для получения конструктивного метода вычисления оценок из критерия (2) рассмотрим вспомогательную функцию:

$$V_N(b, \theta) = U_N(b) - \theta \omega(b).$$

Лемма 1. Уравнение

$V_N(\theta) = \min_{(b) \in \tilde{B} \subset R_r} V_N(b, \theta) = 0$ имеет не более одного корня $\hat{\theta}(N)$ на интервале $(-\infty, \lambda_{\min}(N))$,

где $\lambda_{\min}(N)$ – наименьший корень уравнения:

$$\det[A_Y^T A_Y - \theta H_{\xi_2}^*] = 0.$$

Если $\hat{\theta}(N)$ существует, то $0 \leq \hat{\theta}(N) < \lambda_{\min}(N)$, т.е. $\hat{\theta}(N)$ – наименьший среди всех корней уравнения $V(\theta) = 0$, где

$$A_Y = \begin{bmatrix} y_0 & \dots & y_{1-r} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{N-1} & \dots & y_{N-r} \end{bmatrix}.$$

Выражение

$$V_N(b, \theta) = Y^T Y - \theta (h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0)) + b^T (A_Y^T A_Y - \theta H_{\xi_2}^*) b - 2(Y^T A_Y - \theta h_{\xi_2}^T) b.$$

Дифференцируя $V_N(b, \theta)$ по b и приравнявая производную к нулю, находим

$$\hat{b}(N, \theta) = (A_Y^T A_Y - \theta H_{\xi_2}^*)^{-1} (A_Y^T Y - \theta h_{\xi_2}^*)$$

и тогда

$$V_N(\theta) = Y^T Y - \theta (h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0)) + \hat{b}^T(N, \theta) (A_Y^T A_Y - \theta H_{\xi_2}^*) \hat{b}(N, \theta) - 2(A_Y^T Y - \theta h_{\xi_2}^T)^T \hat{b}(N, \theta)$$

или

$$V_N(\theta) = Y^T Y - \theta(h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0)) - (A_Y^T Y - \theta \tilde{h}_{\xi_2}^*)^T (A_Y^T A_Y - \theta H_{\xi_2}^*)^{-1} (A_Y^T Y - \theta \tilde{h}_{\xi_2}^*).$$

Заметим, что $V_N(\theta)$ на интервале $(-\infty, \lambda_{\min}(N))$ непрерывная и

$$\dot{V}_N(\theta) = -(h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0) + \hat{b}^T(N, \theta) \times H_{\xi_2}^* \hat{b}(N, \theta) - 2(\tilde{h}_{\xi_2}^*)^T \hat{b}(N, \theta)).$$

Отсюда ясно, что $\dot{V}_N(\theta) < 0$, $\forall \theta \in (-\infty, \lambda_{\min}(N))$ и доказательство леммы.

Лемма 2. Для функции $V_N(\theta)$ справедливо следующее утверждение:

1) все корни уравнения $V_N(\theta) = 0$ неотрицательны (если они существуют).

2) уравнение $V_N(\theta) = 0$ на полусегменте $[0, \lambda_{\min}(N))$ имеет не более одного корня.

3) существование корня $\hat{\theta}(N)$ на полусегменте $[0, \lambda_{\min}(N))$ является необходимым и достаточным условием существования единственного решения (2), при этом

$$\min_{(b) \in \hat{B} \subset R_r} \omega^{-1}(b) U_N(b) = \frac{U_N(\hat{b}(N))}{\omega(\hat{b}(N))},$$

где

$$\hat{b}(N) = (A_Y^T A_Y - \theta(N) H_{\xi_2}^*)^{-1} (A_Y^T Y - \theta(N) \tilde{h}_{\xi_2}^*)$$

Эта лемма по сути дела доказана при доказательстве леммы 1.

На основании доказанных лемм получены численные методы, которые позволяют:

- ответить на вопрос существует ли единственная оценка $\hat{b}(N)$;

- определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационного процесса к единственной оценке $\hat{b}(N)$;

- вычислить с любой наперед заданной точностью оценку $\hat{b}(N)$.

Утверждение 2. Пусть последователь-

ность $\{\theta(i)\}$ определяется следующим алгоритмом:

Шаг 1. $\hat{\theta}'(0) = 0$.

Шаг 2. $\hat{\theta}'(i) = (\lambda_{\min}(N) + \hat{\theta}'(i-1))/2$.

Шаг 3. Вычисляются $\hat{b}(N, \hat{\theta}'(i))$ из уравнения:

$$(A_Y^T A_Y - \hat{\theta}'(i) H_{\xi_2}^*) \hat{b}(\hat{\theta}'(i)) = (A_Y^T A_Y - \hat{\theta}'(i) \tilde{h}_{\xi_2}^*). \tag{4}$$

Шаг 4. Вычисляется

$$V_N(\hat{\theta}'(i)) = Y^T Y - \hat{\theta}'(i)(h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0)) - (A_Y^T Y - \hat{\theta}'(i) \tilde{h}_{\xi_2}^*)^T \hat{b}(N, \hat{\theta}'(i)).$$

Шаг 5. Проверяется условие $V_N(\hat{\theta}'(i)) \leq 0$.

Тогда, если уравнение $V_N(\theta) = 0$ имеет корень $\hat{\theta}(N) \in [0, \lambda_{\min}(N))$, то последовательность $\hat{\theta}'(0), \dots, \hat{\theta}(0)$ конечна и $\hat{\theta}(0) \in [\hat{\theta}(N), \lambda_{\min}(N))$, в противном случае последовательность бесконечна.

Доказательство утверждения непосредственно следует из леммы 2.

Утверждение 3. Пусть существует $\hat{\theta}(0) \in [\hat{\theta}(N), \lambda_{\min}(N))$, тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\theta}(i) = \hat{\theta}(N)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{b}(N, \hat{\theta}(i)) = \hat{b}(N)$, где $\hat{\theta}(i)$, $\hat{b}(N, \hat{\theta}(i))$ определяются следующим алгоритмом:

Шаг 1. Вычисляется $\hat{b}(N, \hat{\theta}(i))$ из уравнения (4).

Шаг 2. Вычисляется
$$\hat{\theta}(i+1) = (h_{\xi_1}^*(0) + h_{\xi_2}^*(0) + \hat{b}^T(N, \theta(i)) \times H_{\xi_2}^* \hat{b}(N, \theta(i)) - 2(h_{\xi_2}^*)^T \hat{b}(N, \theta(i)))^{-1} (Y^T Y + \hat{\theta}(i) \hat{b}^T(N, \theta(i)) H_{\xi_2}^* \hat{b}(N, \theta(i)) - \hat{\theta}(i) 2(h_{\xi_2}^*)^T \times \hat{b}(N, \theta(i)) - (A_Y^T Y - \hat{\theta}(i) h_{\xi_2}^*)^T \hat{b}(N, \theta(i))).$$

Шаг 3. Переход к шагу 1.

Доказательство. Утверждение 3 вытекает непосредственно из метода Ньютона

$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) - \frac{V_N(\hat{\theta}(i))}{\dot{V}_N(\hat{\theta}(i))}$$

Обоснованность использования метода Ньютона следует из того, что $V_N(\theta)$ – непрерывна $\forall \theta \in [0, \lambda_{\min}(N))$, $\dot{V}_N(\theta) < 0$, $\forall \theta \in (-\infty, \lambda_{\min}(N))$ и $\ddot{V}_N(\theta) = -2b^T(\theta)H_{\xi}^*(A_Y^T A_Y - \theta H_{\xi_2}^*)^{-1}H_{\xi_2}^* b(\theta) - 2(\tilde{h}_{\xi_2}^*)^T (H_{\xi_2}^*)^{-1} \tilde{h}_{\xi_2}^* + 3(\tilde{h}_{\xi_2}^*)^T (A_Y^T A_Y - \theta H_{\xi_2}^*)^{-1} \times H_{\xi_2}^* b(\theta) + b^T(\theta)H_{\xi}^*(A_Y^T A_Y - \theta H_{\xi_2}^*)^{-1} \tilde{h}_{\xi_2}^* \leq 0$, $\forall \theta \in [0, \lambda_{\min}(N))$.

На практике вычисления прекращаются, если достигнута заранее заданная точность, т.е. если выполняется условие:

$$\frac{\|V_N(\theta(i+1)) - V_N(\theta(i))\|}{\|V_N(\theta(i+1))\|} \leq \delta$$

где δ – априори задаваемая точность нахождения оценок.

На базе описанного математического алгоритма реализован пакет прикладных программ в среде MathCAD для параметрической идентификации линейных разностных уравнений при наличии локально автокоррелированных помех в выходных сигналах.

В основе программного алгоритма задана тестовая модель авторегрессии (1) со следующими исходными данными:

$r=2$ – порядок авторегрессии; Z_i – вектор выходных значений, где $i=1,2,3\dots$ индекс нумерации дискретных моментов времени;

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.25 \end{pmatrix}$ – вектор “истинных” параметров;

$\xi_1(i)$ – генератор авторегрессии как последовательность независимых случайных величин; $\xi_2(i)$ – автокоррелированная помеха как последовательность зависимых величин. Соответственно уравнение авторегрессии будет представлено выражением:

$$Z_i - \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} Z_{i-m} = \xi_1(i),$$

а наблюдаемый сигнал:

$$y_i = Z_i + \xi_2(i)$$

где $\xi_2(i)$ – аддитивная локальная автокоррелированная помеха выходного сигнала с дисперсией $\sigma_{\xi_2}^2$, которая изменяется в зависимости от γ ($\sigma_Z^2 = \frac{\sigma_{\xi_2}^2}{\gamma}$, σ_Z^2 – дисперсия сигнала Z_i).

Для цели исследования состоятельности оценок использован большой объем выборки $N=500$. Параметр γ дискретно принимает значения 0,5, 1, 2, 3, 4.

Результаты оценок параметров, полученные классическим и модифицированным МНК посредством программных алгоритмов математического пакета, приведены в табл., где

$$\delta = \sqrt{(\hat{b}_1 - b_1)^2 + (\hat{b}_2 - b_2)^2} \times 100\%$$

$$\delta^{MНК} = \sqrt{(\hat{b}_1^{MНК} - b_1)^2 + (\hat{b}_2^{MНК} - b_2)^2} \times 100\%$$

$\hat{b}_{1\bullet}, \hat{b}_{2\bullet}$ – вектора оценок модифицированного МНК;

$\hat{b}_{1\bullet}^{MНК}, \hat{b}_{2\bullet}^{MНК}$ – вектора оценок классического МНК;

$\delta, \delta^{MНК}$ – погрешности оценок параметров.

Из анализа (рис. 2, рис. 3, рис. 4) откло-

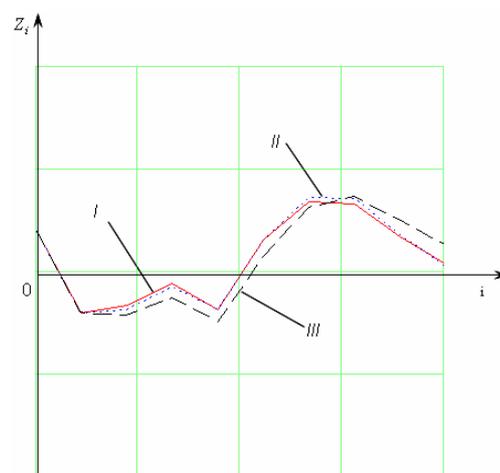


Рис.1. Выходной сигнал Z_p , рассчитанный с параметрами: I – “истинными” $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$; II – нелинейного

МНК $\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix}$; III – стандартного МНК $\begin{pmatrix} \hat{b}^{MНК} \\ \hat{a}^{MНК} \end{pmatrix}$.

Таблица. Сравнение точности векторов оценок параметров авторегрессии по классическому методу МНК и модифицированному МНК при $N=500$, $b_1=1, b_2=-0,25$

$\gamma = \frac{\sigma_{\varepsilon_2}^2}{\sigma_{\varepsilon_1}^2}$	М Н К			М о д и ф и ц и р о в а н н ы й М Н К		
	$\hat{b}_1^{МНК}$	$\hat{b}_2^{МНК}$	$\delta^{МНК} \%$	\hat{b}_1	\hat{b}_2	$\delta \%$
0,5	1,078	-0,268	13,1	1,003	-0,258	3
1	1,111	-0,26	11	0,981	-0,23	4,4
2	1,176	-0,303	23,5	0,965	-0,23	5,2
3	1,249	-0,36	26	0,988	-0,259	7,6
4	1,29	-0,392	34,2	1,006	-0,276	7,2

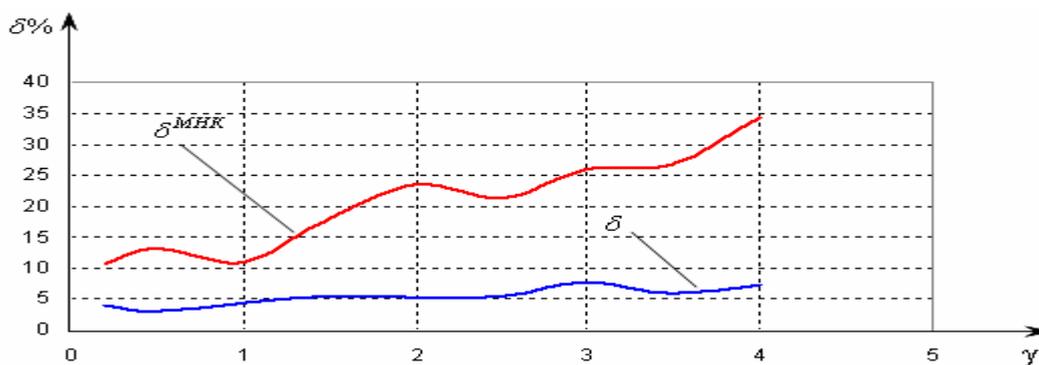


Рис. 2. Сравнение $\delta(\gamma)$, $\delta^{МНК}(\gamma)$ отклонений векторов оценок параметров авторегрессии классическим и модифицированным МНК.

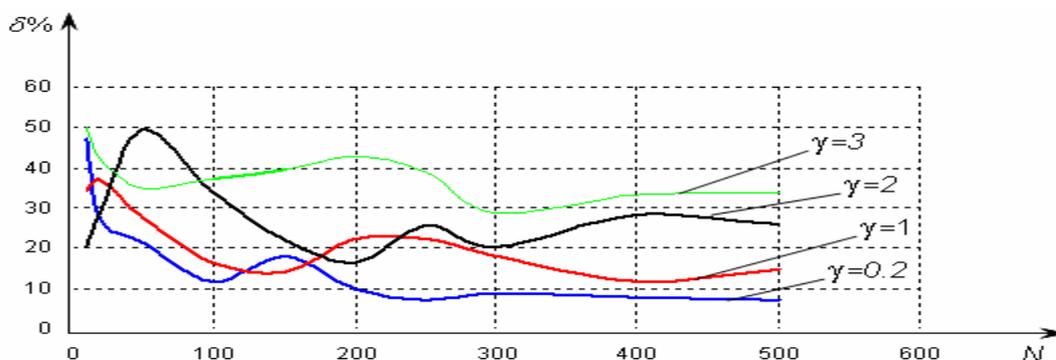


Рис. 3. Сравнение $\delta^{МНК}(\gamma)$ отклонений векторов оценок параметров авторегрессии классическим МНК от векторов "истинных" параметров при $\gamma \in \{0.2, 1, 2, 3\}$.

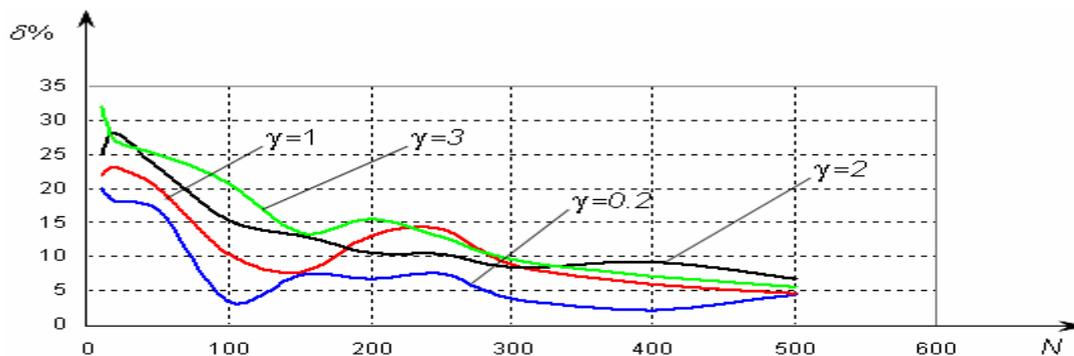


Рис. 4. Сравнение $\delta(\gamma)$ отклонений векторов оценок параметров авторегрессии модифицированным МНК от векторов "истинных" параметров при $\gamma \in \{0.2, 1, 2, 3\}$.

нения оценок от истинных параметров и выхода рассчитанного сигнала от истинного (рис. 1) вытекает, что при большом объеме выборки модифицированный МНК дает удовлетворительные результаты при любых значениях γ . Оценки стандартного МНК ухудшаются с увеличением γ , соответственно с увеличением дисперсии помех наблюдений $\xi_2(i)$ погрешности $\delta^{МНК}$ становятся достаточно значимыми.

Следовательно, на приведенном примере показывается менее точный результат классических оценок МНК при наличии аддитивных ошибок измерений в процессе авторегрессии и состоятельность предлагаемых.

В статье описаны конструктивные методы построения оценок параметров авторегрессии; показаны условия существования и единственности этих оценок. Предложенные вычислительные алгоритмы позволяют находить нелинейные МНК – оценки параметров авторегрессии, используя лишь стандартную процедуру решения линейных алгебраических уравнений, эти алгоритмы приспособлены к обработке больших массивов исходной информации для динамических систем высокого порядка.

Реализован пакет прикладных программ в среде MathCAD для параметрической идентификации авторегрессии при наличии ло-

кально автокоррелированных помехах в выходных сигналах. Получена авторегрессионная модель прогноза состояния пути, которая нашла применение при планировании и производстве путевых работ на железнодорожном транспорте [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кацюба О.А., Тренькин В.М. Численный метод построения оценок параметров авторегрессии для случая аддитивных локально автокоррелированных помех в выходных сигналах // Идентификация систем и задачи управления SICPRO'06. М.: Институт проблем управления РАН, 2006.
2. Кацюба О.А., Тренькин В.М., Спиринов С.А., Волныкин А.Н. Численный метод оценивания параметров линейных разностных уравнений при автокоррелированных помехах во входных и выходных сигналах // Третья международная конференция по проблемам управления. М.: Институт проблем управления РАН, 2006. Т. 1.
3. Тренькин В.М. Алгоритм прогноза состояния железнодорожного пути на основе авторегрессионных моделей // Актуальные проблемы развития железнодорожного транспорта. Самара: СамГАПС, 2005.

PARAMETER EVALUATION OF AUTOREGRESS AT AUTOCORRELATED HINDRANCES OF OUTPUT SIGNALS

© 2006 V.M. Tren'kin

Samara State Academy of Ways of Communication

In the article we study the constant numerical method of minimization of two square-law function ratio that allows to find the estimates of autoregress parameters at the final sample and autocorrelated supervision hindrances.