УДК 519.254

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПО ВХОДУ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2006 А.Н. Волныкин, О.А. Кацюба

Самарская государственная академия путей сообщения

В статье рассматривается задача оценки параметров линейного разностного уравнения с многомерным входом при наличии помех наблюдения во входных и выходных сигналах. Эта задача отличается от стандартной задачи регрессионного оценивания, предложен новый критерий оценивания на основе отношения двух квадратичных форм, обобщающий стандартный метод наименьших квадратов и позволяющий получить состоятельные оценки параметров. Предлагается также численный метод определения оценок параметров линейных разностных уравнений, сводящийся к многократному решению линейных разностных уравнений.

Пусть имеет место стационарная линейная динамическая система, которая описывается следующим стохастическим уравнением заданного порядка с дискретным временем $i = \ldots -1,0,1\ldots$

$$z_i - \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} z_{i-m} = \sum_{j=1}^{d} \sum_{m=0}^{r_j} a_0^{(mj)} x_{i-m}^{(j)}, \qquad (1)$$

$$y_i = z_i + \xi_1(i),\; w_i^{(j)} = x_i^{(j)} + \xi^{(j)}(i),$$

где $\xi_1(i)$ – помеха наблюдения в выходном сигнале, $\xi^{(j)}(i)$ – помеха наблюдения соответственно в j – м входном сигнале.

Применение классического МНК не позволяет получать состоятельные оценки параметров: в самом деле, использование классической процедуры МНК для определения параметров разностного уравнения приводит к минимизации среднего значения величины:

$$e^2(b^{(m)}, a^{(mj)}) = \left[y_i - \sum_{m=1}^{r} b^{(m)} y_{i-m} - \sum_{j=1}^{d} \sum_{m=0}^{r_j} a^{(mj)} w_{i-m}^{(j)} \right]^2.$$

Такая постановка задачи не совпадает с обычной постановкой задачи в регрессионном анализе.

Пусть выполняются следующие условия:

1) Множество $\widetilde{B}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной системы является компактом.

2) Помехи $\xi_1(i), \xi^{(j)}(i),\; j = \overline{1,d}$ статистически независимы и удовлетворяют следующим условиям:

$$E(\xi_1(i+1)/\xi_1(i_0),\ldots\xi_1(i)) = 0 \quad \text{п.н.};$$

$$E((\xi_1)^2(i+1)/\xi_1(i_0),\ldots\xi_1(i)) = C_1(i+1) \le \pi_1 < \infty \quad \text{п.н.};$$

$$E((\xi_1)^4(i)) < \pi_1^{(1)} \text{ п.н.};$$

$$E(\xi^{(j)}(i+1)/\xi^{(j)}(i_0),\ldots\xi^{(j)}(i)) = 0 \quad \text{п.н.};$$

$$E((\xi^{(j)})^2(i+1)/\xi^{(j)}(i_0),\ldots\xi^{(j)}(i)) = C^{(j)}(i+1) \le \pi^{(j)} < \infty$$ п.н.;

$$E((\xi^{(j)})^4(i)) < \pi^{(j1)} \text{ п.н.},$$

где E – оператор математического ожидания.

3) $\left\{x_i^{(1)},\ldots x_i^{(d)}\right\}$ статистически не зависят от $\left\{\xi_1(i)\right\}, \left\{\xi^{(j)}(i)\right\},\, j = \overline{1,d}$.

4) Вектор входных переменных и истинные значения параметров удовлетворяют условиям:

$$N^{-1}\sum_{i=i_0}^{N}(z_r^T(i) \vdots (x_{r_1}^{(1)}(i))^T \vdots \cdots \vdots (x_{r_d}^{(d)}(i))^T)^T (z_r^T(i) \vdots \cdots \vdots (x_{r_d}^{(d)})^T) \underset{N\to\infty}{\overset{П.Н.}{\to}} H^*$$

где

$$z_r(i) = \left(z_{i-1}\ldots z_{i-r}\right)^T,$$

$$x_{r_j}^{(j)} = \left(x_i^{(j)}\ldots x_{i-r_j}^{(j)}\right)^T.$$

Представим уравнение (1) для всех $i = 1,2\ldots n$ в векторной форме в виде системы линейных алгебраических уравнений $\left(i_0 = 1\right)$:

$$z = Zb_0 + Xa_0,$$

где

$$z=\left(z_1\ldots z_N\right)^T,$$

$$Z=\begin{vmatrix} z_0 & \cdots & z_{1-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{N-1} & \ldots & z_{N-r} \end{vmatrix},$$

$$X=\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_{1-r_1}^{(1)} & \vdots & x_1^{(d)} & \cdots & x_{1-r_d}^{(d)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1}^{(1)} & \ldots & x_{N-r_1}^{(1)} & \vdots & x_{N-1}^{(d)} & \ldots & x_{N-r_d}^{(d)} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$b_0=\left(b_0^{(1)}\ldots b_0^{(r)}\right)^T,$$

$$a_0=\left(a_0^{(1)}\vdots\cdots\vdots a_0^{(d)}\right)^T,$$

$$a_0^{(j)}=\left(a_0^{(0j)}\ldots a_0^{(r_j j)}\right)^T.$$

Однако, вместо z, Z, X наблюдается только случайно возмущенный вектор $Y=\left(y_1\ldots y_N\right)^T\in R_N$ и матрицы A_Y и $A_W=\left(A_{W_1}\vdots\cdots\vdots A_{W_{(d)}}\right)$, которые определяются (2), если вместо $z_i\to y_i$, $x_i^{(j)}\to w_i^{(j)}$. Таким образом, задача идентификации параметров $\left(b_0\vdots a_0\right)^T$ сводится к решению стохастических алгебраических уравнений [1,2], определяемых значениями Y, $\left(A_Y\vdots A_W\right)=A_{Y,W}$, вероятностные характеристики которых описываются условиями 1 – 4.

Представим уравнение (1) в виде:

$$y_i=\left(y_r^T(i)\vdots W_{r_1}^{(1)}\vdots\cdots\vdots W_{r_d}^{(d)}(i)\right)\begin{pmatrix} b_0 \\ -- \\ a_0 \end{pmatrix}+\xi_1(i)-\Xi_r^T b_0-\Xi_{r_1}^T a_0^{(1)}\ldots-\Xi_{r_d}^T a_0^{(d)},$$

где

$$\Xi_{r_j}=\left(\xi_i^{(j)}\ldots\xi_{i-r_j}^{(j)}\right)^T\in R_{r_{j+1}}.$$

Введем следующую невязку:

$$e\left(b_0,a_0,i\right)=\xi_1(i)-\Xi_r^T b_0-\Xi_{r_1}^T a_0^{(1)}\ldots-\Xi_{r_d}^T a_0^{(d)}.$$

Тогда из уравнения (2) и леммы 1.1 [1,2], получаем, что средняя дисперсия невязки равна:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{i=i_0}^{N} E\left(e^2\left(b_0,a_0,i\right)\right)=\bar{\sigma}_1^2+\bar{\sigma}_1^2 b_0^T b_0+\left(\bar{\sigma}^{(1)}\right)^2\left(a_0^{(1)}\right)^T a_0^{(1)}+\cdots$$

$$\ldots+\left(\bar{\sigma}^{(d)}\right)^2\left(a_0^{(d)}\right)^T a_0^{(d)}=\bar{\sigma}_1^2\left[1+b_0^T b+\gamma^{(1)}\left(a_0^{(1)}\right)^T a_0^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\gamma^{(d)}\left(a_0^{(d)}\right)^T a_0^{(d)}\right]=\omega\left(b_0,a_0\right)$$

где:

$\bar{\sigma}_1^2$ – средняя дисперсия помехи наблюдения $\xi_1(i)$, $\left(\bar{\sigma}^{(j)}\right)^2$ – средняя дисперсия помехи наблюдения $\xi^{(j)}(i)$,

$$\gamma^{(j)}=\frac{\left(\bar{\sigma}^{(j)}\right)^2}{\bar{\sigma}_1^2}.$$

Тогда определим оценку $\begin{pmatrix} \hat{b}(N) \\ --- \\ \hat{a}(N) \end{pmatrix}$ неизвестных истинных значений параметров $\begin{pmatrix} b_0 \\ -- \\ a_0 \end{pmatrix}$ из условия минимума суммы взвешенных квадратичных отклонений $e(b,a,i)$ с весом $\omega(b,a)$, то есть из:

$$\min_{\begin{pmatrix} b \\ - \\ a \end{pmatrix}\in\tilde{B}} \omega^{-1}\left(b,a^{(1)}\ldots a^{(d)}\right)U_N\left(b,a^{(1)}\ldots a^{(d)}\right), \quad (3)$$

где

$$U_N\left(b,a^{(1)}\ldots a^{(d)}\right)=\left(Y-A_{Y,W}\begin{pmatrix} b \\ - \\ a \end{pmatrix},Y-A_{Y,W}\begin{pmatrix} b \\ - \\ a \end{pmatrix}\right),$$

$(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение.

Утверждение 1. Пусть стационарная динамическая система с нулевыми начальными условиями описывается уравнением (1), и выполняются условия 1 – 4, тогда оценки $\begin{pmatrix} \hat{b}_{(N)} \\ -- \\ \hat{a}_{(N)} \end{pmatrix}$, определяемые выражением (3) при $N\to\infty$ существуют и являются сильно состоятельными оценками, то есть:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}(N) \\ --- \\ \hat{a}(N) \end{pmatrix}\xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}\begin{pmatrix} b_0 \\ -- \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим функцию:

$$\frac{1}{N}U_N(b,a)=N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(z_i+\xi_1(i)-\left(z_r^T(i)+\Xi_r^T\right)b-\left(\left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T+\Xi_{r_1}^T\right)a^{(1)}-\ldots\right.$$

$$\left.-\left(\left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T+\Xi_{r_d}^T\right)a^{(d)}\right)^2=$$

$$= N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_1(i) + z_r^T(i)b_0 + \left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T a_0^{(1)} + \ldots \left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T a_0^{(d)} - z_r^T(i)b - \right.$$

$$\left. - \Xi_r^T b - \left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T a^{(1)} - \Xi_{r_1}^T a^{(1)} - \ldots - \left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T a^{(d)} - \Xi_{r_d}^T a^{(d)}\right)^2 =$$

$$= N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_1(i) - z_r^T(i)\widetilde{b} - \left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T \widetilde{a}^{(1)} - \ldots - \left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T \widetilde{a}^{(d)} - \right.$$

$$\left. - \Xi_r^T b - \Xi_{r_1}^T a^{(1)} - \ldots - \Xi_{r_d}^T a^{(d)}\right)^2 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3,$$

где:

$$\widetilde{b} = b - b_0,$$

$$\widetilde{a}^{(j)} = a^{(j)} - a_0^{(j)}.$$

$$\nu_1 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_1^2(i) + b^T\Xi_r\Xi_r^T b + \left(a^{(1)}\right)^T\Xi_{r_1}\Xi_{r_1}^T a^{(1)} + \ldots + \left(a^{(d)}\right)^T\Xi_{r_d}\Xi_{r_d}^T a^{(d)} + \right.$$

$$+ 2b^T\Xi_r\Xi_{r_1}^T a^{(1)} + \ldots + 2b^T\Xi_r\Xi_{r_d}^T a^{(d)} - 2\xi_1(i)\Xi_r^T b - 2\xi_1(i)\left(\Xi_{r_1}\right)^T a^{(1)} -$$

$$\left. - \ldots - 2\xi_1(i)\left(\Xi_{r_d}\right)^T a^{(d)} + 2\left(a^{(1)}\right)^T\Xi_{r_1}\Xi_{r_2}a^{(2)} + \ldots + 2\left(a^{(d-1)}\right)^T\Xi_{r_{d-1}}\Xi_{r_d}a^{(d)}\right),$$

$$\nu_2 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}\widetilde{b}\\ ---\\ \widetilde{a}^{(1)}\\ ---\\ \vdots\\ ---\\ \widetilde{a}^{(d)}\end{pmatrix}^T\left(z_r^T(i)\vdots\left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T\vdots\cdots\vdots\left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T\right)^T\times$$

$$\times\left(z_r^T(i)\vdots\cdots\vdots\left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T\right)\begin{pmatrix}\widetilde{b}\\ ---\\ \vdots\\ ---\\ \widetilde{a}^{(d)}\end{pmatrix},$$

$$\nu_3 = 2N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(-\xi_1(i)z_r^T(i)\widetilde{b} - \xi_1(i)\left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T\widetilde{a}^{(1)} - \ldots - \xi_1(i)\left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T\widetilde{a}^{(d)} + \right.$$

$$+ b^T\Xi_r z_r^T(i)\widetilde{b} + \left(a^{(1)}\right)^T\Xi_{r_1}z_r^T(i)\widetilde{b} + \ldots + \left(a^{(d)}\right)^T\Xi_{r_d}z_r^T(i)\widetilde{b} +$$

$$+ b^T\Xi_r\left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T\widetilde{a}_1 + \ldots + b^T\Xi_r\left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T\widetilde{a}_d^{(d)} + \left(a^{(1)}\right)^T\Xi_{r_1}\left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T\widetilde{a}^{(1)} +$$

$$\left. + \ldots + \left(a^{(1)}\right)^T\Xi_{r_1}\left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T\widetilde{a}^{(d)} + \ldots + \left(a^{(d)}\right)^T\Xi_{r_d}\left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T\widetilde{a}^{(d)}\right).$$

Тогда из условия 2 по лемме 1.1 [1,2] получаем:

$$\nu_1 \underset{N\to\infty}{\overset{П.Н.}{\longrightarrow}} = \overline{\sigma}_1^2 + \overline{\sigma}_1^2 b^T b + \left(\overline{\sigma}^{(1)}\right)^2\left(a^{(1)}\right)^T a^{(1)} + \ldots + \left(\overline{\sigma}^{(d)}\right)^2\left(a^{(d)}\right)^T a^{(d)},$$

$$\forall\begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix}\in\widetilde{B}.$$

Из условия 4 следует:

$$\nu_2 = \begin{pmatrix}\widetilde{b}\\ \cdot\\ \widetilde{a}\end{pmatrix}^T H^*\begin{pmatrix}\widetilde{b}\\ \cdot\\ \widetilde{a}\end{pmatrix},\ \forall\begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix}\in\widetilde{B}.$$

Слагаемое

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(-\xi_1(i)z_r^T(i)\widetilde{b} - \xi_1(i)\left(x_{r_1}^{(1)}(i)\right)^T\widetilde{a}^{(1)} - \ldots - \xi_1(i)\left(x_{r_d}^{(d)}(i)\right)^T\widetilde{a}^{(d)}\right)$$

в силу условий 2, 3, 4 удовлетворяет условиям леммы 1.2 [1,2] и, следовательно, равно 0.

Заметим, что

$$N^{-1}\sum_{i=1}^{N}b^T\Xi_r z_r^T(i)\widetilde{b} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}b^T\begin{pmatrix}z_{i-1}\xi_1(i-1) & \ldots & z_{i-r}\xi_1(i-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ z_{i-1}\xi_1(i-r) & \ldots & z_{i-r}\xi_1(i-r)\end{pmatrix}\widetilde{b}. \tag{4}$$

Таким образом (4), можно представить в виде r^2 слагаемых, каждое из которых в силу условий 2, 3 по лемме 1.2 [1,2] сходится к нулю. Аналогично можно доказать, что и все остальные слагаемые сходятся к нулю с вероятностью 1 при $N\to\infty$.

Следовательно,

$$\nu_3 \underset{N\to\infty}{\overset{П.Н.}{\longrightarrow}} 0,\ \forall\begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix}\in\widetilde{B}$$

и

$$N^{-1}U_N(b,a) \underset{N\to\infty}{\overset{П.Н.}{\longrightarrow}} \overline{\sigma}_1^2 + \overline{\sigma}_1^2 b^T b + \left(\overline{\sigma}^{(1)}\right)^2\left(a^{(1)}\right)^T a^{(1)} + \ldots$$

$$\ldots + \left(\overline{\sigma}^{(d)}\right)^2\left(a^{(d)}\right)^T a^{(d)} + \begin{pmatrix}\widetilde{b}\\ \cdot\\ \widetilde{a}\end{pmatrix}^T H^*\begin{pmatrix}\widetilde{b}\\ \cdot\\ \widetilde{a}\end{pmatrix} = \overline{U}(b,a).$$

Покажем, что решение задачи

$$\min\omega^{-1}\left(b,a^{(1)}\ldots a^{(d)}\right)\overline{U}(b,a),\ \begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix}\in\widetilde{B} \tag{5}$$

существует и достигается в единственной точке $\begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_0\\ --\\ a_0\end{pmatrix}$.

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$V(b,a,\theta) = \overline{U}(b,a) - \theta\omega\left(b,a^{(1)}\ldots a^{(d)}\right),\quad \theta\in R_1,$$

$$V(\theta) = \min V(b,a,\theta),\ \begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix}\in\widetilde{B}.$$

Тогда

$$V(b,a,\theta) = \overline{\sigma}_1^2 + \begin{pmatrix}b_0\\ --\\ a_0\end{pmatrix}^T H^*\begin{pmatrix}b_0\\ --\\ a_0\end{pmatrix} - 2\left(H^*\begin{pmatrix}b_0\\ --\\ a_0\end{pmatrix}\right)^T\begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix} - \overline{\sigma}_1^2\theta + \begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix}^T\times$$

$$\times\left(\begin{array}{c:c:c} H_{ZZ} + \overline{\sigma}_1^2 I_r - \theta\overline{\sigma}_1^2 I_r & \cdots & H_{ZX^{(d)}}\\ \hdashline \vdots & & \vdots\\ \hdashline H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}} + \left(\overline{\sigma}^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} - \theta\left(\overline{\sigma}^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1}\end{array}\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix}b\\ -\\ a\end{pmatrix},$$

если

$$H^{*}=\left(\begin{array}{c:c:c} H_{ZZ} & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}} \end{array}\right).$$

Дифференцируя $V(b,a,\theta)$ по $\left(\begin{array}{c} b \\ \hdashline a \end{array}\right)$ и приравнивая производную к нулю, получим:

$$\left(\begin{array}{c} b(\theta) \\ \hdashline a(\theta) \end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c:c:c} H_{ZZ}+\bar\sigma_1^2 I_r-\theta\bar\sigma_1^2 I_r & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}}+\left(\bar\sigma^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1}-\theta\left(\bar\sigma^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{array}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(H^{*}\left(\begin{array}{c} b_0 \\ \hdashline a_0 \end{array}\right)\right). \qquad (6)$$

Тогда

$$V(\theta)=\bar\sigma_1^2+\left(\begin{array}{c} b_0 \\ \hdashline a_0 \end{array}\right)^T H^{*}\left(\begin{array}{c} b_0 \\ \hdashline a_0 \end{array}\right)-\bar\sigma_1^2\theta-\left(H^{*}\left(\begin{array}{c} b_0 \\ \hdashline a_0 \end{array}\right)\right)^T\times$$

$$\times\left(\begin{array}{c:c:c} H_{ZZ}+\bar\sigma_1^2 I_r-\theta\bar\sigma_1^2 I_r & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}}+\left(\bar\sigma^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1}-\theta\left(\bar\sigma^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{array}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(H^{*}\left(\begin{array}{c} b_0 \\ \hdashline a_0 \end{array}\right)\right).$$

Если $\lambda_{\min}$ – минимальное характеристическое число регулярного числа форм

$$\left(\begin{array}{c:c:c} H_{ZZ}+\bar\sigma_1^2 I_r & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}}+\left(\bar\sigma^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{array}\right)-$$

$$-\theta\left(\begin{array}{c:c:c:c} \bar\sigma_1^2 I_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & \left(\bar\sigma^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{array}\right),$$

то, следовательно, $\lambda_{\min}>0$, и функция $V(\theta)$ на интервале $(-\infty,\lambda_{\min}+1)$ непрерывна и

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta}=-\sigma_1^2-\left(\begin{array}{c} b \\ \hdashline a \end{array}\right)^T\left(\begin{array}{c:c:c:c} \sigma_1^2 I_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & \left(\sigma^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} b \\ \hdashline a \end{array}\right)$$

отрицательна на интервале $(-\infty,\lambda_{\min}+1)$, отсюда следует, что $V(\theta)=0$ на интервале $(-\infty,\lambda_{\min}+1)$ имеет не более одного корня.

Нетрудно убедится, что $\theta=1$ является корнем уравнения $V(\theta)=0$ и $1<\lambda_{\min}+1$.

Тогда из (6) непосредственно следует справедливость (5).

Введем следующий вектор $\left(1 \,\vdots\, b \,\vdots\, a^{(1)}\dots a^{(d)}\right)=u$ и матрицы $\bar A_{Y,W}=\left(-Y \,\vdots\, A_{Y,W}\right)$,

$$D^{*}=\begin{array}{r} \\ r\{ \\ \\ r_d+1\{ \end{array}\left|\begin{array}{c:c:c:c:c} \bar\sigma_1^2 & \overbrace{0}^{r} & \overbrace{0}^{r_1+1} & \cdots & \overbrace{0}^{r_d+1} \\ \hdashline 0 & \bar\sigma_1^2 I_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(\bar\sigma^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{array}\right|,$$

то (3) можно записать в виде:

$$\min_{u\in\tilde B\subset R_{r+r_1+1+\dots r_d+1}}\frac{u^T\bar A_{Y,W}^T\cdot\bar A_{Y,W}u}{u^T D^{*}u},$$

где $\bar A_{Y,W}^T\bar A_{Y,W}>0$.

Для конкретной выборки обьема N нахождение корня уравнения $V_N(\theta)=0$ (эти корни имеют те же свойства, что и для $V(\theta)=0$) можно записать в следующей форме: $\hat\theta_N=\lambda_{\min}(N)\left[\bar A_{Y,W}^T\bar A_{Y,W}\left(D^{*}\right)^{-1}\right]$ – минимальное характеристическое число пучка квадратичных форм, определяемых $\bar A_{Y,W}^T$, $\bar A_{Y,W}$ и D^{*}. Но $D^{*}\geq 0$, поэтому рассмотрим [3, С. 281]:

$$\lambda_{\min}(N)\left[\bar A_{Y,W}^T\bar A_{Y,W}-\theta D^{*}\right]=\frac{1}{\lambda_{\max}(N)\left[\left(\bar A_{Y,W}^T\bar A_{Y,W}\right)^{-1}D^{*}\right]}.$$

Известно[4, P. 452], что:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{\lambda_{\max}(N)\left[\left(\bar A_{Y,W}^T\bar A_{Y,W}\right)^{-1}D^{*}\right]}\xrightarrow[N\to\infty]{П.Н.}\frac{1}{\lambda_{\max}\left[\left(\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\bar A_{Y,W}^T\bar A_{Y,W}\right)^{-1}D^{*}\right]}=$$

$$\lambda_{\min}\left[\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\bar A_{Y,W}^T\bar A_{Y,W}\right)\left(D^{*}\right)^{-1}\right].$$

Так как нахождение $\lambda_{\min}\left[\left(\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\overline{A}_{Y,W}^{T}\overline{A}_{Y,W}\right)\left(D^{*}\right)^{-1}\right]$ можно интерпретировать как определение корня уравнения $V(\theta)=0$, то $\frac{1}{N}\hat{\theta}_N \underset{N\to\infty}{\overset{П.Н.}{\rightarrow}} \hat{\theta}$.

Далее параметры можно определить, если ввести следующую вспомогательную функцию:

$$V_N(b,a,\theta)=Y^TY-\bar{\sigma}_1^2\theta-2\left(Y^TA_Y \;\vdots\; Y^TA_W\right)\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} A_Y^TA_Y-\theta\bar{\sigma}_1^2 I_r & A_Y^TA_{W_1} & \cdots & A_Y^TA_{W_d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{W_d}^TA_Y & \cdots & \cdots & A_{W_d}^TA_{W_d}-\theta\left(\bar{\sigma}^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя $V_N(b,a,\theta)$ по b и a и приравнивая производную к нулю имеем:

$$\begin{pmatrix} A_Y^TA_Y-\theta\bar{\sigma}_1^2 I_r & A_Y^TA_{W_1} & \cdots & A_Y^TA_{W_d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{W_d}^TA_Y & \cdots & \cdots & A_{W_d}^TA_{W_d}-\theta\left(\bar{\sigma}^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} A_Y^TY \\ A_W^TY \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$V_N(\theta)=Y^TY-\bar{\sigma}_1^2\theta-\begin{pmatrix} A_Y^TY \\ A_W^TY \end{pmatrix}^T\times$$

$$\times\begin{pmatrix} A_Y^TA_Y-\theta\bar{\sigma}_1^2 I_r & A_Y^TA_{W_1} & \cdots & A_Y^TA_{W_d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{W_d}^TA_Y & \cdots & \cdots & A_{W_d}^TA_{W_d}-\theta\left(\bar{\sigma}^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} A_Y^TY \\ A_W^TY \end{pmatrix},$$

и неизвестные параметры могут быть определены из уравнения (7).

Тогда, очевидно

$$\frac{1}{N}\begin{pmatrix} A_Y^TA_Y-\theta\bar{\sigma}_1^2 I_r & A_Y^TA_{W_1} & \cdots & A_Y^TA_{W_d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{W_d}^TA_Y & \cdots & \cdots & A_{W_d}^TA_{W_d}-\theta\left(\bar{\sigma}^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}-$$

$$-\frac{1}{N}\begin{pmatrix} A_Y^TY \\ A_W^TY \end{pmatrix}\underset{N\to\infty}{\overset{П.Н.}{\rightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} H_{ZZ}+\bar{\sigma}_1^2 I_r-\theta\bar{\sigma}_1^2 I_r & \cdots & H_{ZX^{(d)}} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{X^{(d)}Z} & \cdots & H_{X^{(d)}X^{(d)}}+\left(\bar{\sigma}^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1}-\theta\left(\bar{\sigma}^{(d)}\right)^2 I_{r_d+1} \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}-H^{*}\begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Из единственности решения (6) и (7) и последнего выражения следует [5, P. 178], что оценки стремятся к истинным значениям $\begin{pmatrix} \hat{b}(N) \\ \hat{a}(N) \end{pmatrix}\underset{N\to\infty}{\overset{П.Н.}{\rightarrow}}\begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$.

Для получения численного метода вычисления оценок параметров из критерия (3) рассмотрим функцию:

$$V_N(b,a,\theta)=U_N(b,a)-\theta\omega(b,a),$$

$$V_N(\theta)=\min_{\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\in\tilde{B}} V_N(b,a,\theta),$$

тогда:

$$V_N(b,a,\theta)=\left(Y^T-\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T A_{Y,W}^T\right)\left(Y-A_{Y,W}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\right)-$$

$$-\theta\left(1+b^Tb+\gamma^{(1)}\left(a^{(1)}\right)^Ta^{(1)}+\cdots+\gamma^{(d)}\left(a^{(d)}\right)^Ta^{(d)}\right)=$$

$$=Y^TY-2\left(Y^TA_Y \;\vdots\; Y^TA_W\right)\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}-\theta+\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T\times$$

$$\times\begin{vmatrix} A_Y^TA_Y-\theta I_r & A_Y^TA_{W^{(1)}} & \cdots & A_Y^TA_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^TA_Y & A_{W^{(1)}}^TA_{W^{(1)}}-\theta\gamma^{(1)}I_{r_1+1} & \cdots & A_{W^{(1)}}^TA_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^TA_Y & A_{W^{(d)}}^TA_{W^{(!)}} & \cdots & A_{W^{(d)}}^TA_{W^{(d)}}-\theta\gamma^{(d)}I_{r_d+1} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \tag{8}$$

Дифференцируя $V_N(b,a,\theta)$ по b и a и приравнивая производную к нулю имеем:

$$\begin{pmatrix} A_Y^TA_Y-\theta I_r & A_Y^TA_{W^{(1)}} & \cdots & A_Y^TA_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^TA_Y & & \cdots & A_{W^{(1)}}^TA_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^TA_Y & A_{W^{(d)}}^TA_{W^{(!)}} & \cdots & A_{W^{(d)}}^TA_{W^{(d)}}-\theta\gamma^{(d)}I_{r_d+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_Y^TY \\ A_W^TY \end{pmatrix}, \tag{9}$$

откуда

$$V_N(\theta) = Y^T Y - \theta - \begin{pmatrix} A_Y^T Y \\ A_W^T Y \end{pmatrix}^T \times$$

$$\times \begin{pmatrix} A_Y^T A_Y - \theta I_r & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^T A_Y & & \cdots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} - \theta\gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{pmatrix}^{-1} \times$$

(10)

$$\times \begin{pmatrix} A_Y^T Y \\ A_W^T Y \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма: для функции $V_N(\theta)$, связанной с задачей (3) существует следующее утверждение:

1) Все корни уравнения $V_N(\theta) = 0$ не отрицательны;

2) Уравнение (10) на полусегменте $[0, \lambda_{\min}(N))$ имеет не более одного корня $\hat{\theta}(N)$, где $\lambda_{\min}(N)$- минимальное собственное число регулярного пучка форм, то есть наименьший корень уравнения:

$$\det\left\{ \begin{vmatrix} A_Y^T A_Y & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^T A_Y & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. -\theta \begin{vmatrix} I_r & 0_{r,r_1+1} & \cdots & 0_{r,r_d+1} \\ 0_{r,r_1+1}^T & \gamma^{(1)} I_{r_1+1} & \cdots & 0_{r_1+1,r_d+1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0_{r,r_d+1}^T & 0_{r_1+1,r_d+1}^T & \cdots & \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{vmatrix} \right\} = 0;$$

3) Существование корня $\hat{\theta}(N)$ на полусегменте $[0, \lambda_{\min}(N))$ является необходимым и достаточным условием существования и единственности решения (3).

Доказательство леммы. Функция $V_N(\theta)$ на $[0, \lambda_{\min}(N))$ непрерывна, к тому же $\lambda_{\min}(N) \geq 0$ как собственное число неотрицательной определенной матрицы.

Далее,

$$\dot{V}_N(\theta) = -\left(1 + \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T \begin{vmatrix} I_r & 0_{r,r_1+1} & \cdots & 0_{r,r_d+1} \\ 0_{r,r_1+1}^T & \gamma^{(1)} I_{r_1+1} & \cdots & 0_{r_1+1,r_d+1} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0_{r,r_d+1}^T & 0_{r_1+1,r_d+1}^T & \cdots & \gamma^{(d)} I_{r_d+1} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \right) \leq -1.$$

Тогда на интервале $(-\infty, \lambda_{\min}(N))$ $V_N(\theta)$ имеет не более одного корня, если он существует, $V_N(0) \geq 0$ и, следовательно, $V_N(\theta) > 0$ $\forall \theta \in (-\infty, 0)$ (матрица

$$I_N - \begin{pmatrix} A_Y^T \\ A_W^T \end{pmatrix}^T \begin{vmatrix} A_Y^T A_Y & A_Y^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_Y^T A_{W^{(d)}} \\ A_{W^{(1)}}^T A_Y & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_{W^{(1)}}^T A_{W^{(d)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{W^{(d)}}^T A_Y & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(1)}} & \cdots & A_{W^{(d)}}^T A_{W^{(d)}} \end{vmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_Y^T \\ A_W^T \end{pmatrix}$$

идемпотентная).

Отсюда вытекает справедливость утверждений 1, 2 и достаточность 3. Необходимость 3^0 вытекает из экстремальных свойств регулярного пучка форм [3].

Утверждение 2. Пусть выполняются все условия утверждения 1 , тогда с вероятностью 1 при $N \to \infty$ существует корень $\hat{\theta}(N) \in [0, \lambda_{\min}(N)]$ и единственная оценка (9), которая является одновременно решением задачи (3) и $\hat{b}(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} b_0$ п. н.; $\hat{a}(N) \xrightarrow[N\to\infty]{} a_0$ п.н.

Доказательство утверждения 2 следует из утверждения 1 и леммы.

На основании утверждения 2 предлагается численный метод, который позволяет:

ответить на вопрос существует ли единственная оценка $\hat{b}(N)$, $\hat{a}(N)$;

определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационного процесса к единственной оценке $\hat{b}(N)$, $\hat{a}(N)$;

вычислить с любой наперед заданной точностью оценку $\hat{b}(N)$, $\hat{a}(N)$;

Утверждение 3. Пусть последовательность $\{\hat{\theta}'(i)\}$ определяется следующим алгоритмом:

Шаг 0.

$\hat{\theta}'(0)=0$;

Шаг 1.

$$\hat{\theta}'(i)=\frac{\left(\lambda_{\min}+\hat{\theta}'(i-1)\right)}{2};$$

Шаг 2. Вычислить $\hat{b}\left(N,\hat{\theta}'(i)\right)$, $\hat{a}\left(N,\hat{\theta}'(i)\right)$ из системы линейных уравнений (9);

Шаг 3. Вычислить

$$V_N\left(\hat{\theta}'(i)\right)=Y^TY-\theta-\begin{pmatrix} A_Y^TY \\ A_W^TY \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \hat{b}\left(N,\hat{\theta}'(i)\right) \\ \hat{a}\left(N,\hat{\theta}'(i)\right) \end{pmatrix};$$

Шаг 4. Проверить условие $V_N\left(\hat{\theta}'(i)\right)\le 0$.

Тогда если уравнение $V_N\left(\hat{\theta}'(i)\right)=0$ имеет корень $\hat{\theta}_1'(N)\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$, то последовательность $\hat{\theta}'(0),\hat{\theta}'(1),\ldots\hat{\theta}(0)$ – конечна и $\hat{\theta}(0)\in\left[\hat{\theta}_1'(N),\lambda_{\min}(N)\right)$, в противном случае последовательность бесконечна.

Доказательство утверждения непосредственно следует из леммы.

Этот алгоритм позволяет определить начальное приближение $\hat{\theta}(0)$, необходимое для дальнейшего применения метода Ньютона или определить, что корень $\hat{\theta}_1'(N)$ не существует.

Утверждение 4. Пусть существуют $\hat{\theta}(0)\in\left[\hat{\theta}_1'(N),\lambda_{\min}(N)\right)$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty}\hat{\theta}(i)=\hat{\theta}_1'(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty}\hat{b}\left(i,\hat{\theta}(i)\right)=\hat{b}(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty}\hat{a}\left(i,\hat{\theta}(i)\right)=\hat{a}(N)$, где $\hat{\theta}(i)$, $\hat{b}\left(i,\hat{\theta}(i)\right)$ и $\hat{a}\left(i,\hat{\theta}(i)\right)$ определяется совместно со следующим алгоритмом:

Шаг 1. Вычислить $\hat{b}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)$, $\hat{a}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)$ из системы уравнений (9);

Шаг 2. Вычислить

$$\theta(i+1)=\Big(1+\hat{b}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)^T b\left(N,\hat{\theta}(i)\right)+\gamma^{(1)}\left[a^{(1)}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)\right]^T a^{(1)}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)+\ldots$$
$$\ldots+\gamma^{(d)}\left[a^{(d)}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)\right]^T a^{(d)}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)\Big)^{-1}\Big\{Y^TY+\hat{\theta}(i)\Big[\hat{b}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)^T\hat{b}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)+$$
$$+\gamma^{(1)}\left[a^{(1)}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)\right]^T a^{(1)}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)+\ldots+\gamma^{(d)}\left[a^{(d)}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)\right]^T a^{(d)}\left(N,\hat{\theta}(i)\right)\Big]-$$
$$-\begin{pmatrix} A_Y^TY \\ A_W^TY \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{pmatrix}\Big\};$$

Шаг 3. Перейти к шагу 1.

Процесс вычисления заканчивается, если выполняется условие

$$\frac{\left\|V_N\left(\hat{\theta}(i+1)\right)-V_N\left(\hat{\theta}(i)\right)\right\|}{\left\|V_N\left(\hat{\theta}(i+1)\right)\right\|}\le\delta$$

где δ - априорно заданная точность оценок.

Это утверждение непосредственно вытекает из метода Ньютона:

$$\hat{\theta}(i+1)=\hat{\theta}(i)-\frac{V_N\left(\hat{\theta}(i)\right)}{\dot{V}_N\left(\hat{\theta}(i)\right)}$$

Обоснованность использования метода Ньютона следует из того, что $V_N\left(\hat{\theta}\right)$- непрерывна для $\forall\hat{\theta}\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$, $\dot{V}_N\left(\hat{\theta}\right)\le -1$ для $\forall\hat{\theta}\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$ и

$$\ddot{V}_N\left(\hat{\theta}\right)=-2\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T\left|\begin{array}{c:c:c:c} I_r & 0_{r,r_1+1} & \cdots & 0_{r,r_d+1} \\ \hdashline 0^T_{r,r_1+1} & \gamma^{(1)}I_{r_1+1} & \cdots & 0_{r_1+1,r_d+1} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \hdashline 0^T_{r,r_d+1} & 0^T_{r_1+1,r_d+1} & \cdots & \gamma^{(d)}I_{r_d+1} \end{array}\right|\times$$

$$\times\left|\begin{array}{c:c:c:c} A_Y^TA_Y & A_Y^TA_{W^{(1)}} & \cdots & A_Y^TA_{W^{(d)}} \\ \hdashline A^T_{W^{(1)}}A_Y & A^T_{W^{(1)}}A_{W^{(1)}} & \cdots & A^T_{W^{(1)}}A_{W^{(d)}} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline A^T_{W^{(d)}}A_Y & A^T_{W^{(d)}}A_{W^{(!)}} & \cdots & A^T_{W^{(d)}}A_{W^{(d)}} \end{array}\right|^{-1}\times$$

$$\times\left|\begin{array}{c:c:c:c} I_r & 0_{r,r_1+1} & \cdots & 0_{r,r_d+1} \\ \hdashline 0^T_{r,r_1+1} & \gamma^{(1)}I_{r_1+1} & \cdots & 0_{r_1+1,r_d+1} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \hdashline 0^T_{r,r_d+1} & 0^T_{r_1+1,r_d+1} & \cdots & \gamma^{(d)}I_{r_d+1} \end{array}\right|\times\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\le 0$$

для $\forall\hat{\theta}\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$.

На основании предложенного численного алгоритма создано программное обеспечение, позволяющее получать оценки параметров с наперед заданной точностью.

В качестве примера рассмотрена стационарная динамическая система, которая описывается следующим линейным разностным уравнением:

$$z_i-\sum_{m=1}^{r}b_0^{(m)}z_{i-m}=\sum_{j=1}^{d}\sum_{m=0}^{r_j}a_0^{(mj)}x_{i-m}^{(j)},$$

При $d = 2$, $r = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ имеем

$$z_i = z_{i-1} \cdot b_0^{(1)} + z_{i-2} \cdot b_0^{(2)} + x_i^{(1)} \cdot a_0^{(0,1)} + x_{i-1}^{(1)} \cdot a_0^{(1,1)} + x_i^{(2)} \cdot a_0^{(0,2)} + x_{i-1}^{(2)} \cdot a_0^{(1,2)} + x_{i-2}^{(2)} \cdot a_0^{(2,2)}$$

Векторы входных сигналов $X_i = \{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\}$ и векторы помех $\Xi_i = \{\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_1(i)\}$ заданы с помощью генератора случайных чисел:

$$x_i^{(1)} = rnorm(N,0,0.2)$$

$$x_i^{(2)} = rnorm(N,0,0.2)$$

$$\xi_i^{(1)} = rnorm(N,0,0.1)$$

$$\xi_i^{(2)} = rnorm(N,0,0.1)$$

$$\xi_1(i) = rnorm(N,0,0.15)$$

В табл. 1 приведены значения оценок параметров, полученные в результате тестирования на основе предлагаемого численного метода (при числе экспериментов $N = 120$).

Также получено значение среднеквадратичного отклонения сигнала Z_i от $\hat{Z}_i$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Z_i - \hat{Z}_i\right)^2}{N-1}, \qquad \sqrt{\hat{\sigma}^2} = 0{,}018,$$

где $\hat{Z}_i$ - значения выходного сигнала, полученные по рассчитанным оценкам коэффициентов $\hat{b}(N, \hat{\theta}'(i))$, $\hat{a}(N, \hat{\theta}'(i))$.

Таблица 1. Сравнение полученных оценок параметров с истинными значениями.

Параметры	Истинные значения	Полученные оценки
$b^{(1)}$	1	1,018
$b^{(2)}$	-0,5	-0,523
$a^{(0,1)}$	0,5	0,501
$a^{(1,1)}$	0,4	0,381
$a^{(0,2)}$	0,3	0,28
$a^{(1,2)}$	0,6	0,579
$a^{(2,2)}$	0,2	0,203

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кацюба О.А., Жданов А.И.* О состоятельных оценках решений некорректных стохастических алгебраических уравнений при идентификации параметров линейных разностных опрераторов// Изв. Ан. СССР. Техническая кибернетика. 1981. №5.
2. *Кацюба О.А., Жданов А.И.* О состоятельных оценках решений некорректных стохастических алгебраических уравнений при идентификации параметров линейных разностных операторов // Изв. Ан. СССР. Техническая кибернентика. 1981. № 5.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
4. *Stoica P., Soderstrom T.* Bias correction in least – Squares identification // int. J. Control. 1982. Vol. 35. No 3.
5. *Unton F.* Recursive estimator of the solutions of linear equation sequence // IEEE Trans. AuT. Control. 1984. Vol. AC-29. No 2.

IDENTIFICATION OF STATIONARY LINEAR DYNAMIC SYSTEMS MULTIVARIATE ON INPUT

© 2006 A.N. Volnykin, O.A. Katsyuba

Samara State Academy of Ways of Communication

In article the problem of an estimation of parameters linear difference equations with a multivariate input is considered at presence of handicapes of supervision in input and output signals. This task differs from a standard problem regression estimation, the new criterion of estimation is offered on the basis of the relation of two square-law forms, generalizing standard method of the least squares and allowing to receive well-grounded estimations of parameters. The numerical method of definition of estimations of parameters linear difference the equations, reduced to the repeated decision linear difference the equations is offered also.