УДК 519.254

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ ВО ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ

© 2006 О.А. Кацюба, С.А. Спирин

Самарская государственная академия путей сообщения

В статье рассматривается проблема параметрической идентификации многомерных по входу и выходу линейных разностных уравнений с помехами по входу и выходу. Стандартный метод наименьших квадратов не применим. На основе модифицированного нелинейного метода наименьших квадратов доказывается состоятельность матриц параметров линейного разностного уравнения.

Рассмотрим многомерную линейную динамическую систему с дискретным временем, описываемую следующим уравнением:

$$\begin{gathered} Z_{i+1} = G_1^{(0)} Z_i + G_1^{(1)} Z_{i-1} + \ldots \\ \ldots + G_1^{(r)} Z_{i-r} + G_2^{(0)} X_i + \ldots G_2^{(r_1)} X_{i-r_1} \end{gathered} \qquad (1)$$

$$Y_i = Z_i + \Xi_1(i)\,,\; W_i = X_i + \Xi_2(i)\,,$$

где Y_i, Z_i наблюдаемые и ненаблюдаемые векторы выходных сигналов $(Z_i, Y_i \in R^n)$, а X_i, W_i – соответственно наблюдаемые и ненаблюдаемые векторы входных сигналов $(X_i, W_i \in R^m)$.

Требуется определить оценки неизвестных матриц коэффициентов динамического объекта, описываемого уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям $\{Y_i\}, \{W_i\}$.

В [1] рассмотрена задача параметрического оценивания многомерной линейной регрессии для случая определения оценок матриц $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1^0. Вектор входных сигналов X_i и истинные параметры удовлетворяют условию:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \begin{vmatrix} Z_i \\ \hline Z_{i-1} \\ \hline \vdots \\ \hline Z_{i-r} \\ \hline X_i \\ \hline \vdots \\ \hline X_{i-r_1} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \left| Z_i^T \;\vdots\; Z_{i-1}^T \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; Z_{i-r}^T \;\vdots\; X_i^T \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; X_{i-r_1}^T \right| \xrightarrow[N \to \infty]{} H =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{H}_{zz} & \mathrm{H}_{zx} \\ \mathrm{H}_{zx}^T & \mathrm{H}_{xx} \end{vmatrix}, \text{ п.н.}$$

где H положительно определена.

2^0. Случайные последовательности $\{\Xi_1(i)\}$ $\{\Xi_2(i)\}$ независимы в совокупности и удовлетворяют условиям:

$$E(\Xi_1(i)/F_{i-1}) = 0 \qquad \text{п.н.};$$

$$E(\Xi_1(i)\Xi_1^T(i)/F_{i-1}) = D_1 > 0 \qquad \text{п.н.};$$

$$E(\Xi_2(i)/F'_{i-1}) = 0 \qquad \text{п.н.};$$

$$E(\Xi_2(i)\Xi_2^T(i)/F'_{i-1}) = D_2 > 0 \quad \text{п.н.};$$

если $k = k' = 1$, то $j;\ d = \overline{1,n}$; $k = k' = 2$, то $j;\ d = \overline{1,m}$, $k = 1$, $k' = 2$, то $j = \overline{1,n}$, $d = \overline{1,m}$ $k = 2$, $k' = 1$ $j = \overline{1,m}$, $d = \overline{1,n}$,

тогда

$$E(\xi_k^{(j)}(i)\xi_{k'}^{(d)}(i)) < \pi_{jd}^{kk'}\,;$$

$$E\left[\Xi_k(0)\Xi_k^T(0)\right] = D_k > 0,\; k = 1,2,\ldots$$

где $\{F_i\}$ и $\{F'\}$ - неубывающие последовательности σ - алгебры,

$$F_i = \sigma\{\Xi_1(0),\ldots\Xi_1(i)\};$$

и $$F'_i = \sigma\{\Xi_2(0),\ldots\Xi_2(i)\},$$

где E - оператор математического ожидания.

3^0. Множество, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной многомерной системы, является компактом.

4^0. X_i не зависит в совокупности от $\{\Xi_k(i)\}$.

Уравнение (1) можно записать в виде:

$$Y_{i+1} - \Xi_1(i+1) = G_1^{(0)}(Y_i - \Xi_1(i)) + \ldots$$
$$\ldots + G_1^{(r)}(Y_{i-r} - \Xi_1(i-r)) +$$
$$+ G_2^{(0)}(W_i - \Xi_2(i)) + \ldots$$
$$\ldots + G_2^{(r_1)}(W_{i-r_1} - \Xi_2(i-r_1)).$$

$$Y_{i+1} = G_1^{(0)}Y_i + \ldots + G_1^{(r)}Y_{i-r} + G_2^{(0)}W_i + \ldots$$
$$\ldots + G_2^{(r_1)}W_{i-r_1} + \Xi_1(i+1) - G_1^{(0)}\Xi_1(i) - \ldots$$
$$\ldots - G_1^{(r)}\Xi_1(i-r) - G_2^{(0)}\Xi_2(i) - \ldots - G_2^{(r_1)}\Xi_2(i-r_1).$$

Представим уравнение (1) в виде скалярных уравнений: $(j=\overline{1,n})$

$$y_{i+1}^{(j)} = b_{j\bullet}^{(0)}Y_i + \ldots + b_{j\bullet}^{(r)}Y_{i-r} + a_{j\bullet}^{(0)}W_i + \ldots$$
$$\ldots + a_{j\bullet}^{(r_1)}W_{i-r_1} + \xi_1^{(j)}(i+1) - b_{j\bullet}^{(0)}\xi_1\Xi_1(i) - \ldots$$
$$\ldots - b_{j\bullet}^{(r)}\Xi_1(i-r) - a_{j\bullet}^{(0)}\Xi_2(i) - a_{j\bullet}^{(r_1)}\Xi_2(i-r_1); \tag{2}$$

где $b_{j\bullet}^{(0)}$ – j строка матрицы $G_1^{(0)},\ldots,$ $a_{j\bullet}^{(r_1)}$ – j строка матрицы $G_2^{(r_1)}$

Уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$\overline{b}_{j\bullet} = \left| b_{j\bullet}^{(0)} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_{j\bullet}^{(r)} \right|;$$

$$\overline{a}_{j\bullet} = \left| a_{j\bullet}^{(0)} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; a_{j\bullet}^{(r)} \right|;$$

$$Y_r(i) = \left| Y^T{}_i \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; Y^T{}_{i-r} \right|^T;$$

$$W_{r_1}(i) = \left| W^T{}_i \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; W^T{}_{i-r_1} \right|^T;$$

тогда

$$y_{i+1}^{(j)} = \left| \overline{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \overline{a}_{j\bullet} \right| \left(\frac{Y_r(i)}{W_{r_1}(i)} \right) + \xi_1^{(j)}(i+1) - \overline{b}_{j\bullet}\Xi_r - \overline{a}_{j\bullet}\Xi_{r_1},$$

где $\Xi_r = \left| \Xi^T{}_1(i) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \Xi^T{}_1(i-r) \right|^T;$

$$\Xi_{r_1} = \left| \Xi^T{}_2(i) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \Xi^T{}_2(i-r_1) \right|^T;$$

Введём следующую обобщённую ошибку для j - уравнения:

$$e^{(j)}(\overline{b}_{j\bullet}, \overline{a}_{j\bullet}, i+1) = \xi_1^{(j)}(i+1) - \overline{b}_{j\bullet}\Xi_r - \overline{a}_{j\bullet}\Xi_{r_1};$$

Из предпосылки 2^0 следует, что обобщённая ошибка имеет нулевое среднее, а из предпосылки 2 и леммы [1, 2]:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_1^{(j)}(i+1)\Xi_k(i) \xrightarrow[N\to\infty]{п.н} 0,$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Xi_1(i)\Xi_1{}^T(i) = D_1 \qquad \text{п.н.}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Xi_2(i)\Xi_2(i)\Xi_2^T(i) = D_2 \qquad \text{п.н.} \tag{3}$$

$$k = 1,2,\ldots$$

Получаем, что средняя дисперсия обобщённой ошибки равна:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} E\left[e^{(j)}\left(\overline{b}_{j\bullet}^{(0)}, \overline{a}_{j\bullet}^{(0)}, i+1\right)\right]^2 =$$
$$= \sigma_j^2 + \overline{b}_{j\bullet}D\overline{b}_{j\bullet}^T + \overline{a}_{j\bullet}\overline{D}\overline{a}_{j\bullet}^T = \omega(\overline{b}_{j\bullet}, \overline{a}_{j\bullet}),$$

где
$$D = \begin{vmatrix} D_1 & 0_{r,r} & \cdots & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & D_1 & \cdots & 0_{r,r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} & \cdots & D_1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{D} = \left.\begin{vmatrix} D_2 & 0_{r_1+1,r_1+1} & \cdots & 0_{r_1+1,r_1+1} \\ 0_{r_1+1,r_1+1} & D_2 & \cdots & 0_{r_1+1,r_1+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0_{r_1+1,r_1+1} \\ 0_{r_1+1,r_1+1} & 0_{r_1+1,r_1+1} & \cdots & D_2 \end{vmatrix}\right\} r_1+1,$$

Определим оценки $\left| b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet} \right|$ неизвестных истинных значений из условия минимума суммы взвешенных квадратичных отклонений $e^{(j)}$ с весом $\omega\left(b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right)$.

$$\min_{\left(\frac{b_{j\bullet}}{a_{j\bullet}}\right)^T \in \overline{B}} \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_{i+1}^{(j)} - \left| b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet} \right| \left| \frac{Y_r(i)}{W_{r_1}(i)} \right| \right)^2}{\sigma_j^2 + b_{j\bullet}Db_{j\bullet}{}^T + a_{j\bullet}\overline{D}a_{j\bullet}{}^T}. \tag{4}$$

Критерий (4) можно записать в виде:

$$\min_{\left(b_{j\bullet} \,\vdots\, a_{j\bullet}\right)\in\widetilde{B}} \omega^{-1}\left(b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right) \times$$
$$\times \left(Y^{(j)} - \left| A_Y \;\vdots\; A_W \right| \left| b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet} \right|^T, Y^{(j)} - \left| A_Y \;\vdots\; A_W \right| \left| b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet} \right|^T \right) =$$
$$= \min_{\left(b_{j\bullet} \,\vdots\, a_{j\bullet}\right)\in\widetilde{B}} \omega^{-1}\left(b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right)U_N \tag{5}$$

где $(\bullet, \bullet)$ - скалярное произведение.

$$A_Y = \left|\begin{array}{c:c:c:c} Y_0^T & \cdots & \cdots & Y_{1-r}^T \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline Y_{N-1}^T & \cdots & \cdots & Y_{N-r}^T \end{array}\right| ,$$

$$A_W = \left|\begin{array}{c:c:c:c} W_1^T & \cdots & \cdots & W_{1-r_1}^T \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline W_N^T & \cdots & \cdots & W_{N-r_1}^T \end{array}\right|,$$

$$Y^{(j)} = \left|y_1^{(j)}, \ldots, y_N^{(j)}\right|^T ,$$

$$Y_i = \left|y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(n)}\right|^T, W_i = \left|w_i^{(1)}, \ldots, w_i^{(m)}\right|^T,$$

Утверждение 1. Пусть стационарная динамическая система с нулевыми начальными условиями описывается уравнением (1) и выполняются условия 1^0 - 4^0. Тогда оценка $\left|\hat{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \hat{a}_{j\bullet}\right|$, определяемая выражением (4) (при $N \to \infty$) существует и является сильно состоятельной оценкой, т.е

$$\left|\hat{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \hat{a}_{j\bullet}\right| \xrightarrow[N\to\infty]{п.н} \left|\bar{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \bar{a}_{j\bullet}\right|.$$

Доказательство утверждения. Рассмотрим функцию:

$$\frac{1}{N} U_N\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right) = \frac{1}{N}\left(y_{i+1}^{(j)} - \left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right| \left|\begin{array}{c} Y_r(i) \\ \hdashline W_{r_i}(i) \end{array}\right| \right)^2 =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Z_{i+1}^{(j)} + \xi_1^{(j)}(i+1) - \left|Z_r^T(i) + \Xi_r^T(i)\right| b_{j\bullet}{}^T - \right.$$

$$\left. - \left|X_{r_1}^T(i) + \Xi_{r_1}^T(i) a_{j\bullet}{}^T\right|\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_1^{(j)}(i+1) +$$

$$+ Z_r^T(i)(\bar{b}_{j\bullet})^T + X_{r_1}^T(i)(\bar{a}_{j\bullet})^T - \left|Z_r^T(i) + \Xi_r^T(i)\right| b_{j\bullet}{}^T -$$

$$- \left|X_{r_1}^T(i) + \Xi_{r_1}^T(i)\right| a_{j\bullet}^T)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_1^{(j)}(i+1) - Z_r^T(i)(\tilde{b}_{j\bullet}\right)^T -$$

$$- X_{r_1}^T(i)(\tilde{a}_{j\bullet})^T - \Xi_r^T(i)(b_{j\bullet})^T - \Xi_{r_1}^T(i)(a_{j\bullet})^T)^2 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 ,$$

где $\tilde{b} = b_{j\bullet} - \bar{b}_{j\bullet}$; $\tilde{a} = a_{j\bullet} - \bar{a}_{j\bullet}$;

$$\nu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_1^{(j)}(i+1)\right)^2 + b_{j\bullet}\Xi_r\Xi_r^T(b_{j\bullet})^T +$$

$$a_{j\bullet}\Xi_{r_1}(\Xi_{r_1})^T(a_{j\bullet})^T + 2b_{j\bullet}\Xi_r(\Xi_{r_1})^T(a_{j\bullet})^T -$$

$$2\xi_1^{(j)}(i+1)\Xi_r^T(b_{j\bullet})^T - 2\xi_1^{(j)}(i+1)(\Xi_{r_1})^T(a_j)^T;$$

$$\nu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\tilde{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \tilde{a}_{j\bullet}\right|\left|Z_r^T(i) \;\vdots\; X_{r_1}^T(i)\right|^T\left|Z_r^T(i) \;\vdots\; X_{r_1}^T(i)\right|\left|\tilde{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \tilde{a}_{j\bullet}\right|^T.$$

$$\nu_3 = 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(-\xi_1^{(j)}(i+1)Z_r^T(i)(\tilde{b}_{j\bullet})\right)^T -$$

$$-\xi_1^{(j)}(i+1)X_{r_1}^T(i)(\tilde{a}_{j\bullet})^T + +b_{j\bullet}\Xi_r Z_r^T(i)(\tilde{b}_{j\bullet})^T +$$

$$+ b_{j\bullet}\Xi_r X_{r_1}^T(i)(\tilde{a}_{j\bullet})^T + a_{j\bullet}\Xi_{r_1} Z_r^T(i)(\tilde{b}_{j\bullet})^T +$$

$$+ a_{j\bullet}\Xi_{r_1} X_{r_1}^T(i)(\tilde{a}_{j\bullet})^T.$$

Тогда из условия 2^0 и (3) получим, что

$$\nu_1 \xrightarrow[N\to\infty]{п.н} \sigma_j^2 + b_{j\bullet}D(b_{j\bullet})^T + a_{j\bullet}\bar{D}(a_{j\bullet})^T, \forall\left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right|^T \in \tilde{B}$$

Из условия 1^0 следует:

$$\nu_2 \xrightarrow[N\to\infty]{п.н} \left|\tilde{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \tilde{a}_{j\bullet}\right| H \left|\tilde{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \tilde{a}_{j\bullet}\right|^T ,$$

$$\forall\left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right|^T \in \tilde{B}$$

Первые два слагаемых в ν_3 в силу условий 1^0, 2^0, 4^0 удовлетворяют условиям леммы [1, 2] и следовательно:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_1^{(j)}(i+1)Z_r^T(i)(\tilde{b}_{j\bullet})^T \xrightarrow[N\to\infty]{п.н} 0$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_1^{(j)}(i+1)X_{r_1}^T(i)(\tilde{a}_{j\bullet})^T \xrightarrow[N\to\infty]{п.н} 0, \forall\left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right| \in \tilde{B}$$

Заметим,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} b_{j\bullet}\Xi_r Z_r^T(i)\left(\tilde{b}_{j\bullet}\right)^T =$$

$$= N^{-1}\sum_{i=1}^{N} b_{j\bullet} \left|\begin{array}{c:c:c} \Xi_1(i)Z_i^T & \cdots & \Xi_1(i)Z_{i-r}^T \\ \hdashline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hdashline \Xi_1(i-r)Z_i^T & \cdots & \Xi_1(i-r)Z_{i-r}^T \end{array}\right| \left(\tilde{b}_{j\bullet}\right)^T. \qquad (6)$$

Таким образом, (6) можно представить в виде r^2 слагаемых, каждое из которых в силу предположений 1^0-4^0 по лемме [1,2] сходится к нулю.

Аналогично доказывается сходимость к нулю остальных слагаемых.

$$\nu_3 \xrightarrow[N\to\infty]{п.н} 0,\ \forall \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \in \widetilde{B}$$

$$\frac{1}{N}U_N\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{п.н} \sigma_j^2 + b_{j\bullet}D\left(b_{j\bullet}\right)^T +$$
$$+ a_{j\bullet}\overline{D}\left(a_{j\bullet}\right)^T + \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right| H \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right|^T =$$
$$= \overline{U}\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right).$$

Покажем, что решение задачи

$$\min \omega^{-1}\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right)\overline{U}\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right). \qquad (7)$$

существует и достигается в единственной точке. Для этого вместе с задачей (7) рассмотрим функцию

$$V\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta\right) = \overline{U}\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right) - \Theta^{(j)}\omega\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right),$$
$$\Theta^{(j)} \in R_1$$
$$V(\Theta^{(j)}) = \min V(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)});$$
$$\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \in \widetilde{B}$$

Тогда

$$V\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)}\right) = \sigma_j^2 - \Theta^{(j)}\sigma_j^2 + \left|\overline{b}_{j\bullet} \mid \overline{a}_{j\bullet}\right| H \left|\overline{b}_{j\bullet} \mid \overline{a}_{j\bullet}\right|^T +$$
$$+ \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \left|\begin{array}{c|c} H_{ZZ} + D - \Theta^{(j)}D & H_{ZX} \\ \hline H_{ZX}^T & H_{XX} + \overline{D} - \Theta^{(j)}\overline{D} \end{array}\right| \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T -$$
$$- 2\left|\overline{b}_{j\bullet} \mid \overline{a}_{j\bullet}\right| H^T \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T.$$

Дифференцируя $V\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)}\right)$ по $\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|$ и приравнивая производную к нулю, получим

$$\left|b_{j\bullet}\left(\Theta^{(j)}\right) \mid a_{j\bullet}\left(\Theta^{(j)}\right)\right|^T =$$
$$= \left|\begin{array}{c|c} H_{ZZ} + D - \Theta^{(j)}D & H_{ZX} \\ \hline H_{ZX}^T & H_{XX} + \overline{D} - \Theta^{(j)}\overline{D} \end{array}\right| \times \qquad (8)$$
$$\times H \left|\overline{b}_{j\bullet} \mid \overline{a}_{j\bullet}\right|^T.$$

и тогда

$$V\left(\Theta^{(j)}\right) = \sigma_j^2 - \Theta^{(j)}\sigma_j^2 - \left|\overline{b}_{j\bullet} \mid \overline{a}_{j\bullet}\right|^T \times$$
$$\times H \left|\begin{array}{c|c} H_{ZZ} + D - \Theta^{(j)}D & H_{ZX} \\ \hline H_{ZX}^T & H_{XX} + \overline{D} - \Theta^{(j)}\overline{D} \end{array}\right|^{-1} \times$$
$$\times H \left|\overline{b}_{j\bullet} \mid \overline{a}_{j\bullet}\right|^T.$$

Если $\lambda_{\min}$ - минимальное характеристическое число регулярного пучка форм, определяемых положительными матрицами $H_{ZZ} + D$; $H_{XX} + \overline{D}$, то $\lambda_{\min} > 0$. Функция $V\left(\Theta^{(j)}\right)$на интервале $\left(-\infty; \lambda_{\min} + 1\right)$ непрерывная и

$$\frac{dV\left(\Theta^{(j)}\right)}{d\Theta^{(j)}} = -\left(\sigma_j^2 + \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \left|\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & \overline{D} \end{array}\right| \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T\right) < 0.$$

на $\left(-\infty; \lambda_{\min} + 1\right)$.

Из чего следует, что на этом интервале $V(\Theta^{(j)}) = 0$ имеет не более одного корня. Нетрудно убедится, что $\Theta^{(j)} = 1$ является корнем этого уравнения. Тогда из (8) непосредственно следует справедливость (7). В дальнейшем ход доказательства практически полностью аналогичен доказательству при условии, что $n = m = 1$ [1,2].

Для получения численного метода вычисления оценок параметров из критерия (5) рассмотрим функцию:

$$V_N\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)}\right) = U_N\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right) - \Theta^{(j)}\omega\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right) \qquad (9)$$

$$V_N\left(\Theta^{(j)}\right) = \min_{\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}\right) \in \widetilde{B}} V_N\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)}\right),$$

тогда

$$V_N\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)}\right) = \left(\left(Y^{(j)}\right)^T - \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \left|A_Y \mid A_W\right|^T\right) \times$$
$$\times \left(Y^{(j)} - \left|A_Y \mid A_W\right| \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T\right) -$$
$$- \Theta^{(j)}\left(\sigma_j^2 + b_{j\bullet}Db_{j\bullet}^T + a_{j\bullet}\overline{D}a_{j\bullet}^T\right) = \left(Y^{(j)}\right)^T Y^{(j)} - 2\left(Y^{(j)}\right)^T \times$$
$$\times \left|A_Y \mid A_W\right| \left|b_j \mid a_j\right|^T - \Theta^{(j)}\sigma_j^2 + \left|b_j \mid a_j\right| \times$$
$$\times \left|\begin{array}{c|c} A_Y^T A_Y - \Theta^{(j)}D & A_Y^T A_W \\ \hline A_W^T A_Y & A_W^T A_W - \Theta^{(j)}\overline{D} \end{array}\right| \left|b_j \mid a_j\right|^T$$

Дифференцируя $V_N\left(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \Theta^{(j)}\right)$ по $b_{j\bullet}, a_{j\bullet}$ и приравнивая производную к нулю имеем:

$$\left|\begin{array}{c} A_Y^T Y^{(j)} \\ \hline A_W^T Y^{(j)} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A_Y^T A_Y - \Theta^{(j)}D & A_Y^T A_W \\ \hline A_W^T A_Y & A_W^T A_W - \Theta^{(j)}\overline{D} \end{array}\right| \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T \qquad (10)$$

$$V_N\left(\Theta^{(j)}\right)=\left(Y^{(j)}\right)^T Y^{(j)}-\Theta^{(j)}\sigma_j^2-\left(Y^{(j)}\right)^T\left|A_Y \;\vdots\; A_W\right|\times$$
$$\times\left|\begin{array}{c:c} A_Y^T A_Y-\Theta^{(j)}D & A_Y^T A_W \\ \hdashline A_W^T A_Y & A_W^T A_W-\Theta^{(j)}\overline{D}\end{array}\right|^{-1}\left|\begin{array}{c} A_Y^T Y^{(j)} \\ \hdashline A_W^T Y^{(j)}\end{array}\right| \quad (11)$$

Имеет место следующая лемма:

Лемма. Для функции $V_N\left(\Theta^{(j)}\right)$, связанной с задачей (5) существует следующее утверждение:

1. Все корни уравнения $V_N\left(\Theta^{(j)}\right)=0$ неотрицательны.

2. Уравнение (11) на полусегменте $\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$ имеет не более одного корня $\hat{\Theta}^{(j)}(N)$, где $\lambda_{\min}$ - минимальное собственное число регулярного пучка форм, то есть наименьший корень уравнения:

$$\det\left\{\left|\begin{array}{c:c} A_Y^T A_Y & A_Y^T A_W \\ \hdashline A_W^T A_Y & A_W^T A_W\end{array}\right|-\right.$$
$$\left.-\Theta\times\left|\begin{array}{c:c} D & 0_{n\times r,m\times(r_1+1)} \\ \hdashline 0_{m\times(r_1+1),n\times r} & \overline{D}\end{array}\right|\right\}=0$$

3. Существование корня $\hat{\Theta}^{(j)}(N)$ на полусегменте $\left[0,\lambda_{\min}\right)$ является необходимым и достаточным условием существования, единственности решения (5).

Доказательство. Функция $V_N(\Theta)$ на $\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$ непрерывна, к тому же $\lambda_{\min}(N)\geq 0$ как собственное число неотрицательно определённой матрицы. Далее,

$$\dot{V}_N(\Theta)=-\left(\sigma_j^2+\left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right|\times\right.$$
$$\left.\times\left|\begin{array}{c:c} D & 0 \\ \hdashline 0 & \overline{D}\end{array}\right|\times\left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right|^T\right)\leq-\sigma_j^2$$

Тогда на интервале $\left[-\infty,\lambda_{\min}(N)\right)$ $V_N(\Theta)$ имеется не более одного корня, если он существует, $V_N(0)\geq 0$ и, следовательно, $V_N\left(\Theta^{(j)}\right)>0$

(матрица

$$I_N-\left(Y^{(j)}\right)^T\left|A_Y \;\vdots\; A_W\right|\left|\begin{array}{c:c} A_Y^T A_Y-\Theta^{(j)}D & A_Y^T A_W \\ \hdashline A_W^T A_Y & A_W^T A_W-\Theta^{(j)}\overline{D}\end{array}\right|^{-1}\times$$
$$\times\left|\begin{array}{c} A_Y^T Y^{(j)} \\ \hdashline A_W^T Y^{(j)}\end{array}\right| \text{ идемпотентная)}$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения 1, 2 и достаточность 3. Необходимость 3 вытекает из экстремальных свойств характеристик регулярного пучка форм. [3]

Утверждение 2. Пусть выполняются все условия 1^0-4^0, тогда с вероятностью 1 при $N\to\infty$ существует корень $\hat{\Theta}^{(j)}(N)\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$ и единственное решение (10) которое является одновременно решением задачи (10) и

$$\hat{b}_{j\bullet}(N)\underset{N\to\infty}{\overset{П.Н}{\to}}b_{j\bullet} \quad ; \quad \hat{a}_{j\bullet}(N)\underset{N\to\infty}{\overset{П.Н}{\to}}a_{j\bullet}$$

Доказательство утверждения 2 следует из утверждения 1 и леммы.

На основании утверждения 2 может быть получен численный метод, который позволяет:

ответить на вопрос, существует ли единственная оценка $\left|\hat{b}_{j\bullet} \;\vdots\; \hat{a}_{j\bullet}\right|$;

определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационного процесса к единственной оценке $\hat{b}_{j\bullet}(N)$, $\hat{a}_{j\bullet}(N)$;

вычислить с любой наперёд заданной точностью оценку $\hat{b}_{j\bullet}(N)$, $\hat{a}_{j\bullet}(N)$.

Утверждение 3. Пусть последовательность $\left\{\hat{\Theta}_1^{(j)}(i)\right\}$ определяется следующем алгоритмом:

Шаг 0. $\Theta_1^{(j)}(0)=0$

Шаг 1. $\Theta_1^{(j)}(i)=\dfrac{\left(\lambda_{\min}+\Theta_1^{(j)}(i-1)\right)}{2}$

Шаг 2. Вычислить $\hat{b}_{j\bullet}\left(N,\Theta_1^{(j)}(i)\right)$, $\hat{a}_{j\bullet}\left(N,\Theta_1^{(j)}(i)\right)$ из системы линейных уравнений (10)

Шаг 3. Вычислить

$$V_N\left(\Theta_1^{(j)}(i)\right)=\left(Y^{(j)}\right)^T Y^{(j)}-\Theta_1^{(j)}\sigma_j^2-\left(Y^{(j)}\right)^T\times$$
$$\times\left|A_Y \;\vdots\; A_W\right|\left|\hat{b}\left(N,\Theta_1^{(j)}(i)\right) \;\vdots\; \hat{a}\left(N,\Theta_1^{(j)}(i)\right)\right|$$

Шаг 4. Проверить условие $V_N\left(\hat{\Theta}_1^{(j)}\right)\le 0$.

Тогда если уравнение $V_N\left(\Theta_1^{(j)}\right)=0$ имеет корень $\hat{\Theta}_1^{(j)}(N)\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$ то последовательность $\Theta_1^{(j)}(0),\Theta_1^{(j)}(1),\ldots\Theta^{(j)}(0)$ конечна и $\Theta^{(j)}(0)\in\left[\hat{\Theta}_1^{(j)}(N),\lambda_{\min}(N)\right)$, в противном случае последовательность бесконечна. Доказательство утверждения немедленно следует из леммы.

Этот алгоритм позволяет определить начальное приближение $\Theta^{(j)}(0)$, необходимое для дальнейшего применения метода Ньютона, или определить, что корень $\hat{\Theta}_1^{(j)}(N)$ не существует.

Утверждение 4. Пусть существует $\Theta^{(j)}(0)\in\left[\hat{\Theta}_1^{(j)}(N),\lambda_{\min}(N)\right]$, тогда

$$\lim_{i\to\infty}\Theta^{(j)}(i)=\Theta^{(j)}(N),$$

$$\lim_{i\to\infty}\hat{b}_{j\bullet}\left(i,\Theta^{(j)}(i)\right)=\hat{b}_{j\bullet}(N),$$

$$\lim_{i\to\infty}\hat{a}_{j\bullet}\left(i,\Theta(i)\right)=\hat{a}_{j\bullet}(N),$$

где $\Theta^{(j)}(i)$, $\hat{b}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right)$, $\hat{a}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right)$ определяется совместно следующим алгоритмом:

Шаг 1. Вычислить

$\hat{b}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right),\hat{a}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right)$ из системы уравнений (10).

Шаг 2. Вычислить

$$\Theta^{(j)}(i+1)=\left(\sigma_j^2+\left|\hat{b}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right) \;\vdots\; \hat{a}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right)\right|\times\right.$$
$$\left.\times\left|\begin{array}{c:c}D & 0\\ \hdashline 0 & \overline{D}\end{array}\right|\left|\hat{b}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right) \;\vdots\; \hat{a}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right)\right|^T\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left(Y^{(j)}\right)^T Y^{(j)}+\Theta^{(j)}(i)\times\right.$$
$$\times\left[\left|\hat{b}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right) \;\vdots\; \hat{a}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right)\right|\left|\begin{array}{c:c}D & 0\\ \hdashline 0 & \overline{D}\end{array}\right|\times\right.$$
$$\left.\times\left|\hat{b}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right) \;\vdots\; \hat{a}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right)\right|^T\right]-$$
$$\left.-\left(Y^{(j)}\right)^T\left|A_Y \;\vdots\; A_W\right|\left|\hat{b}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right) \;\vdots\; \hat{a}_{j\bullet}\left(N,\Theta^{(j)}(i)\right)\right|^T\right\}$$

Шаг 3. Переход к шагу 1.

Вычисления заканчиваются если выполняется условие:

$$\frac{\left\|V_N\left(\Theta^{(j)}(i+1)-V_N\left(\Theta^{(j)}(i)\right)\right)\right\|}{\left\|V_N\left(\Theta^{(j)}(i+1)\right)\right\|}\le\delta,$$

где δ - априорно заданная точность нахождения оценок.

Это утверждение непосредственно следует из метода Ньютона:

$$\Theta^{(j)}(i+1)=\Theta^{(j)}(i)-\frac{V_N\left(\Theta^{(j)}(i)\right)}{\dot{V}_N\left(\Theta^{(j)}(i)\right)}$$

Обоснованность использования метода Ньютона вытекает из того что $V_N\left(\Theta^{(j)}\right)$ – непрерывна на $\forall\,\Theta^{(j)}\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$

и $\dot{V}_N\left(\Theta^{(j)}\right)\le-\sigma_j^2$ для $\forall\,\Theta^{(j)}\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$,

$$\ddot{V}\left(\Theta^{(j)}\right)=-2\left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right|\left|\begin{array}{c:c}D & 0\\ \hdashline 0 & \overline{D}\end{array}\right|\times$$
$$\times\left|\begin{array}{c:c}A_Y^T A_Y-\Theta^{(j)}D & A_Y^T A_W\\ \hdashline A_W^T A_Y & A_W^T A_W-\Theta^{(j)}\overline{D}\end{array}\right|^{-1}\times$$
$$\times\left|\begin{array}{c:c}D & 0\\ \hdashline 0 & \overline{D}\end{array}\right|\left|b_{j\bullet} \;\vdots\; a_{j\bullet}\right|^T\le 0,\qquad\forall\Theta\in\left[0,\lambda_{\min}(N)\right)$$

На основании описанных выше алгоритмов создано программное обеспечение, позволяющее получать оценки параметров с наперёд заданной точностью.

В качестве примера рассмотрена стационарная динамическая система, которая описывается следующим линейным разностным уравнением: $\left(r=2,\ r_1=1, m=2, n=2\right)$

$$G_1^{(0)}=\left|\begin{array}{c:c}-0.38 & 0.24\\ \hdashline -0.35 & -0.55\end{array}\right|$$

$$G_1^{(1)} = \left|\begin{array}{c:c} -0.15 & 0.63 \\ \hdashline -0.34 & -0.25 \end{array}\right|$$

$$G_2^{(0)} = \left|\begin{array}{c:c} -0.433 & 0.644 \\ \hdashline -0.53 & 0.344 \end{array}\right|$$

$$G_2^{(1)} = \left|\begin{array}{c:c} -0.474 & 0.556 \\ \hdashline -0.374 & -0.656 \end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c} z_{i+1}^{(1)} \\ \hdashline z_{i+1}^{(2)} \end{array}\right| = G_1^{(0)} \left|\begin{array}{c} z_i^{(1)} \\ \hdashline z_i^{(2)} \end{array}\right| + G_1^{(1)} \left|\begin{array}{c} z_{i-1}^{(1)} \\ \hdashline z_{i-1}^{(2)} \end{array}\right| + G_2^{(0)} \left|\begin{array}{c} x_i^{(1)} \\ \hdashline x_i^{(2)} \end{array}\right| + G_2^{(1)} \left|\begin{array}{c} x_{i-1}^{(1)} \\ \hdashline x_{i-1}^{(2)} \end{array}\right|$$

Векторы входных сигналов $X_i = \left\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\right\}$, а также векторы помех $\Xi_1(i) = \left\{\xi_1^{(1)}(i), \xi_2^{(1)}(i)\right\}$, $\Xi_2(i) = \left\{\xi_1^{(2)}(i), \xi_2^{(2)}(i)\right\}$ реализованы на основе программы Mathcad 11 с помощью генератора случайных чисел.

$$\xi_1^{(1)} = rnorm(N,0,0.5)$$

$$\xi_2^{(1)} = rnorm(N,0,0.5)$$

$$\xi_1^{(2)} = rnorm(N,0,0.5) \quad \xi_2^{(2)} = rnorm(N,0,0.5)$$

$$x_i^{(1)} = rnorm(N,0,0.7)$$

$$x_i^{(2)} = rnorm(N,0,0.7)$$

В результате тестирования получены следующие значения среднеквадратичных отклонений истинного выходного сигнала, полученные на основании оценок матриц параметров.

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{\overline{Z}}{}_i^{(1)} - \overline{\overline{\hat{Z}}}{}_i^{(1)}\right)^2}{N-1} \qquad \sqrt{\hat{\sigma}_1^2} = 0.015$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(Z_i^{(2)} - \hat{Z}_i^{(2)}\right)^2}{N-1} \qquad \sqrt{\hat{\sigma}_2^2} = 0.02$$

где $\hat{Z}_i^{(j)}$ – значения выходного сигнала полученные по рассчитанным коэффициентам $\hat{b}_{j\bullet}(N, \Theta(i))$, $\hat{a}_{j\bullet}(N, \Theta(i))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кацюба О.А. , Жданов А.И.* О состоятельных оценках решений некорректных стохастических алгебраических уравнений при идентификации параметров линейных разностных операторов // Изв. Ан. СССР. Техническая кибернетика. 1981. № 5.
2. *Кацюба О.А., Жданов А.И.* Идентификация методом наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. №2.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

DEFINITION OF PARAMETERS OF MULTIVARIATE LINEAR STATIONARY DYNAMIC SYSTEM AT PRESENCE OF HANDICAPES IN ENTRANCE AND TARGET SIGNALS

© 2006 O.A. Katcuba, S.A. Spirin

Samara State Academy of Ways of Communication

In clause the problem of parametrical identification multivariate on an input and an output linear difference equations with handicapes on an input and an output is considered. A standard method of the least squares we shall not apply. On the basis of the modified nonlinear method of the least squares the solvency of matrixes of parameters linear difference equations is proved.