УДК 519.2

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ НЕЛИНЕЙНЫМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

© 2006 А.В. Гущин

Самарская государственная академия путей сообщения

В данной статье рассматривается критерий состоятельности оценок параметров многомерной линейной авторегрессии на основе нелинейного метода наименьших квадратов. Приведено доказательство состоятельности оценок лишь при априорном знании отношения дисперсий помех во входном и выходном сигналах.

Рассмотрим многомерную линейную динамическую систему с дискретным временем, описываемую уравнениями: $i = \ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots$

$$Z_{i+1} = G_0 Z_i + G_0^{(1)} X_i,$$

$$Y_i = Z_i + \Xi_1(i),$$

$$W_i = X_i + \Xi_2(i),$$

где Z_i, Y_i – ненаблюдаемый и наблюдаемый векторы состояний системы соответственно $Z_i, Y_i \in R_{p_2}$, а X_i, W_i – соответственно ненаблюдаемый и наблюдаемый векторные входные сигналы $X_i \in R_{p_1}$. Требуется определить оценки $\hat{G}_N$, $\hat{G}_N^1$ по $\{Y_i\}$, $\{W_i\}$.

Утверждение. Пусть выполняются следующие условия:

1^0. Вектор входных сигналов X_i и истинные параметры удовлетворяют условию:

$$N^{-1}\sum_{i=i_0}^{N}\left|\frac{Z_i}{X_i}\right|\left|Z_i^T \;\vdots\; X_i^T\right| \underset{N\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} H_1^*,$$

где H_1^* – положительно определена.

2^0. Случайные последовательности $\{\Xi_1(i)\}$ и $\{\Xi_2(i)\}$ независимы в совокупности и удовлетворяют условиям:

$$E(\Xi_1(i)/F_{i-1}) = 0 \text{ п.н.}$$

$$E(\Xi_1(i)\Xi_1^T(i)/F_{i-1}) = D_1 > 0 \text{ п.н.}$$

$$E(\Xi_2(i)/F'_{i-1}) = 0 \text{ п.н.}$$

$$E(\Xi_2(i)\Xi_2^T(i)/F'_{i-1}) = D_2 > 0 \text{ п.н.};$$

если $k = k' = 1$ то $j,\ d = \overline{1, p_2}$, $k = k' = 2$ то $j,\ d = \overline{1, p_1}$, $k = 1$, $k' = 2$, $j = \overline{1, p_2}$, $d = \overline{1, P_1}$,

$k = 2,\ k' = 1,\ j = \overline{1, p_1},\ d = \overline{1, p_2},$

тогда

$$E(\xi_k^{(j)}(i)\xi_{k'}^{(d)}(i)) < \pi_{jd}^{(kk')},$$

$$E\left[\Xi_k(0)\Xi_k^T(0)\right] = D_k > 0,$$

k=1, 2, где $\{F_i\}$ и $\{F'_i\}$ - неубывающие последовательности у – алгебр

$$F_i = \sigma\{\Xi_1(0),\ldots,\Xi_1(i)\},$$

$$F'_i = \sigma\{\Xi_2(0),\ldots,\Xi_2(i)\}.$$

3^0. Собственные числа матрицы G_0 по модулю меньше 1.

4^0. X_i не зависит в совокупности от $\Xi_k(i)$.

Тогда оценки $\left(\frac{\hat{b}_{j\bullet}(N)}{\hat{a}_{j\bullet}(N)}\right)$ можно определить из критерия:

$$\min_{b_{j\bullet},a_{j\bullet},\in\widetilde{B}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(Y_{i+1}^{(j)}-b_{j\bullet}Y_i-a_{j\bullet}W_i\right)^2}{\sigma_j^2+b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T+a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T} \quad (1)$$

и они сильно состоятельны, где $b_{j\bullet}-j$ строка матрицы G, $a_{j\bullet}-j$ строка матрицы G^1, $\widetilde{B}$ – компактное множество

Рассмотрим модель $j\bullet$ выхода стационарной динамической системы, которая описывается $j\bullet$ столбцом G. Т.е. имеет место линейное разностное уравнение 1-го порядка:

$$Z_{i+1}^{(j)}-b_{j\bullet}^{(0)}Z_i=a_{j\bullet}^{(0)}X_i\,, \quad (2)$$

где $i=\overline{1,N}$. Выходная Z_i и входная X_i переменные наблюдаются с аддитивными помехами в виде:

$$Y_{i+1}^{(j)}=Z_{i+1}^{(j)}+\xi_1^{(j)}(i+1)\,; \quad (3)$$

$$Z_{i+1}^{(j)}=Y_{i+1}^{(j)}-\xi_1^{(j)}(i+1)\,;$$

$$W_i^{(d)}=X_i^{(d)}+\xi_2^{(d)}(i)\,; \quad (4)$$

$$X_i^{(d)}=W_i^{(d)}-\xi_2^{(d)}(i)\,,$$

где $j=\overline{1,p_2}$, $d=\overline{1,p_1}$.

Представим уравнение (2), с учетом (3) и (4) в виде:

$$Y_{i+1}^{(j)}-\xi_1^{(j)}(i+1)-b_{j\bullet}^{(0)}(Y_i-\Xi_1(i))=$$
$$=a_{j\bullet}^{(0)}(W_i-\Xi_2(i))\,; \quad (5)$$

$$Y_{i+1}^{(j)}=b_{j\bullet}^{(0)}(Y_i-\Xi_1(i))+a_{j\bullet}^{(0)}(W_i-\Xi_2(i))+$$
$$+\xi_1^{(j)}(i+1)=b_{j\bullet}^{(0)}Y_i-b_{j\bullet}^{(0)}\Xi_1(i)+$$
$$+a_{j\bullet}^{(0)}W_i-a_{j\bullet}^{(0)}\Xi_2(i)+\xi_1^{(j)}(i+1)$$

Введем следующую невязку:

$$e(b_{j\bullet}^{(0)},a_{j\bullet}^{(0)},i+1)=$$
$$=\xi_1^{(j)}(i+1)-b_{j\bullet}^{(0)}\Xi_1(i)-a_{j\bullet}^{(0)}\Xi_2(i)$$

Тогда из условия 2^0 и леммы 1 [3] следует, что:

$$\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{i=i_0}^{N}(e^2(b_{j\bullet}^{(0)},a_{j\bullet}^{(0)},i+1))=$$
$$=\sigma_j^2+b_{j\bullet}^{(0)}D_1(b_{j\bullet})^T+a_{j\bullet}^{(0)}D_1(a_{j\bullet})^T.$$

Определим оценку $\begin{pmatrix}\hat{b}_{j\bullet}(N)\\ \hat{a}_{j\bullet}(N)\end{pmatrix}$ неизвестных истинных значений параметров $\begin{pmatrix}b_{j\bullet}\\ a_{j\bullet}\end{pmatrix}$ из условия минимума суммы взвешенных квадратичных отклонений:

$$\min_{b_{j\bullet},a_{j\bullet},\in\widetilde{B}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(Y_{i+1}^{(j)}-b_{j\bullet}Y_i-a_{j\bullet}W_i\right)^2}{\sigma_j^2+b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T+a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T}.$$

Тогда оценка $\begin{pmatrix}\hat{b}_{j\bullet}(N)\\ \hat{a}_{j\bullet}(N)\end{pmatrix}$, определяемая выражением (1) (при $N\to\infty$) существует и является сильно состоятельной оценкой, т.е.

$$\begin{pmatrix}\hat{b}_{j\bullet}(N)\\ \hat{a}_{j\bullet}(N)\end{pmatrix}\xrightarrow[N\to\infty]{п.н.}\begin{pmatrix}b_{j\bullet}^{(0)}\\ a_{j\bullet}^{(0)}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для доказательства рассмотрим функцию:

$$\frac{1}{N}U_N(b_{j\bullet},a_{j\bullet})=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_{i+1}^{(j)}+b_{j\bullet}Y_i-G_0W_i)^2=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Z_{i+1}^{(j)}+\xi_1^{(j)}(i+1)-$$
$$-b_{j\bullet}(Z_i+\Xi_1(i))-a_{j\bullet}(X_i+\Xi_2(i)))^2=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_1^{(j)}(i+1)+b_{j\bullet}^{(0)}Z_i+a_{j\bullet}^{(0)}X_i-$$
$$-b_{j\bullet}(Z_i+\Xi_1(i))-a_{j\bullet}(X_i+\Xi_2(i)))^2=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_1^{(j)}(i+1)+b_{j\bullet}^{(0)}Z_i+a_{j\bullet}^{(0)}X_i-$$
$$-b_{j\bullet}Z_i-b_{j\bullet}\Xi_1(i)-a_{j\bullet}X_i-a_{j\bullet}\Xi_2(i))^2=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_1^{(j)}(i+1)-(b_{j\bullet}-b_{j\bullet}^{(0)})Z_i-$$
$$-(a_{j\bullet}-a_{j\bullet}^{(0)})X_i-b_{j\bullet}\Xi_1(i)-a_{j\bullet}\Xi_2(i))^2=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_1^{(j)}(i+1)-\widetilde{b}_{j\bullet}Z_i-\widetilde{a}_{j\bullet}X_i-$$
$$-b_{j\bullet}\Xi_1(i)-a_{j\bullet}\Xi_2(i))^2=V_1+V_2+V_3\,,$$

где

$$\widetilde{b}_{j\bullet} = b_{j\bullet} - b_{j\bullet}^{(0)},\ \widetilde{a}_{j\bullet} = a_{j\bullet} - a_{j\bullet}^{(0)};$$

$$V_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\xi_1^{(j)}(i+1))^2 + \Xi_1^T b_{j\bullet}^T b_{j\bullet}(i)\Xi_1(i) +$$

$$+\Xi_2^T a_{j\bullet}^T a_{j\bullet}(i)\Xi_2(i) + 2\Xi_1^T b_{j\bullet}^T a_{j\bullet}(i)\Xi_2(i) -$$

$$-2\xi_1^{(j)}(i+1)b_{j\bullet}\Xi_1(i) - 2\xi_1^{(j)}(i+1)a_{j\bullet}\Xi_2(i),$$

$$V_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{Z_i}{X_i}\right|^T \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right|^T \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right| \left|\frac{Z_i}{X_i}\right|;$$

$$V_3 = 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(-\xi_1^{(j)}(i+1)\widetilde{b}_{j\bullet}Z_i) -$$

$$-(-\xi_1^{(j)}(i+1)\widetilde{a}_{j\bullet}X_i) + \Xi_1^T(i)b_{j\bullet}^T\widetilde{b}_{j\bullet}Z_i +$$

$$+Z_i^T\widetilde{b}_{j\bullet}^T a_{j\bullet}\Xi_2^T(i) + X_i^T\widetilde{a}_{j\bullet}^T b_{j\bullet}\Xi_1^T(i) +$$

$$+X_i^T\widetilde{a}_{j\bullet}^T\widetilde{a}_{j\bullet}\Xi_2(i).$$

Тогда из условия 2^0 и леммы 1 [3] получаем, что:

$$V_1 \underset{N\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} \sigma_j^2 + b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T + a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T,$$

$$\forall\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet}\end{pmatrix} \in \widetilde{B},$$

а из условия 1^0 следует

$$V_2 \underset{N\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right| H^* \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right|^T,$$

$$\forall\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet}\end{pmatrix} \in \widetilde{B}.$$

Первые два слагаемых в сумме V_3 в силу условий 1^0, 2^0, 4^0 удовлетворяют условиям леммы 1.2 [3, с.32]:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_1^{(j)}(i+1)\widetilde{b}_{j\bullet}Z_i \underset{N\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} 0,$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_1^{(j)}(i+1)\widetilde{a}_{j\bullet}X_i \underset{N\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} 0,$$

$$\forall\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet}\end{pmatrix} \in \widetilde{B}.$$

Заметим, что
(6)

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Xi_1^T(i)b_{j\bullet}^T\widetilde{b}_{j\bullet}Z_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}b_{j\bullet}\Xi_1(i)Z_i^T\widetilde{b}_{j\bullet}^T =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}b_{j\bullet}\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)}(i)Z_i^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(1)}(i)Z_i^{(p_2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^{(p_2)}(i)Z_i^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(p_2)}(i)Z_i^{(p_2)}\end{pmatrix}\widetilde{b}_{j\bullet}^T.$$

Таким образом, (6) можно представить в виде p_2^2 слагаемых, каждое из которых в силу предположений 2^0, 4^0 сходится к нулю.

Аналогично (6) можно доказать, что и все остальные слагаемые в V_3 сходятся к нулю с вероятностью 1 при $N \to \infty$. Следовательно,

$$V_3 \underset{N\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} 0,\ \forall\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet}\end{pmatrix} \in \widetilde{B}$$

и

$$\frac{1}{N}U_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) \underset{N\to\infty}{\overset{п.н.}{\to}} \sigma_j^2 + b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T +$$

$$+a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T + \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right| H^* \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right|^T =$$

$$= \overline{U}(b_{j\bullet}, a_{j\bullet});$$

Покажем, что решение задачи (1) существует и достигается

в единственной точке $\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{j\bullet}^{(0)} \\ \hdashline a_{j\bullet}^{(0)}\end{pmatrix}$.

Для этого, вместе с задачей (1) рассмотрим функции:

$$V(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \theta) = \overline{U}(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) -$$

$$-\theta\omega(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}),\ \theta \in R_1,$$

где

$$\omega = \sigma_j^2 + b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T + a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T;$$

$$V(\theta) = \min_{\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet}\end{pmatrix} \in \widetilde{B}CR_{p_1+p_2}} V(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \theta);$$

Тогда

$$V(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \theta) = \sigma_j^2 + b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T +$$

$$+a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T + \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right| H^* \left|\widetilde{b}_{j\bullet} \mid \widetilde{a}_{j\bullet}\right|^T -$$

$$-\theta(\sigma_j^2 + b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T + a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T) =$$

$$= C - \theta\sigma_j^2 - 2\left|b_{j\bullet}^{(0)} \mid a_{j\bullet}^{(0)}\right| H^* \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T +$$

$$+\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \cdot$$

$$\cdot\left|\begin{array}{c|c} Z_iZ_i^T + D_1 - \theta D_1 & Z_iX_i^T \\ \hline X_iZ_i^T & X_iX_i^T + D_2 - \theta D_2 \end{array}\right| \cdot$$

$$\cdot\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T,$$

где

$$C = \sigma_j^2 + \left|b_{j\bullet}^{(0)} \mid a_{j\bullet}^{(0)}\right| H^* \left|b_{j\bullet}^{(0)} \mid a_{j\bullet}^{(0)}\right|^T.$$

Дифференцируя $V\ (b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \theta)$ по $\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet} \end{pmatrix}$ и приравнивая производные к нулю, находим:

$$\left|b_{j\bullet}(\theta) \mid a_{j\bullet}(\theta)\right|^T =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} Z_iZ_i^T + D_1 - \theta D_1 & Z_iX_i^T \\ \hline X_iZ_i^T & X_iX_i^T + D_2 - \theta D_2 \end{array}\right|^{-1} \cdot$$

$$\cdot H^* \left|b_{j\bullet}^{(0)} \mid a_{j\bullet}^{(0)}\right|^T, \qquad (7)$$

и тогда

$$V(\theta) = C - \theta\sigma_j^2 - \left|b_{j\bullet}^{(0)} \mid a_{j\bullet}^{(0)}\right| H^* \cdot$$

$$\cdot\left|\begin{array}{c|c} Z_iZ_i^T + D_1 - \theta D_1 & Z_iX_i^T \\ \hline X_iZ_i^T & X_iX_i^T + D_2 - \theta D_2 \end{array}\right|^{-1} \cdot$$

$$\cdot H^* \left|b_{j\bullet}^{(0)} \mid a_{j\bullet}^{(0)}\right|^T. \qquad (8)$$

Тогда, если $\Lambda_{\min}$ – минимальное характеристическое число регулярного пучка форм:

$$\left|\begin{array}{c|c} Z_iZ_i^T + D_1 & Z_iX_i^T \\ \hline X_iZ_i^T & X_iX_i^T + D_2 \end{array}\right| - \theta\left|\begin{array}{c|c} D_1 & 0_{p_2,p_1} \\ \hline 0_{p_2,p_1}^T & D_2 \end{array}\right|$$

то, следовательно, $\Lambda_{\min} > 0$. Функция $V(\theta)$ на интервале $(\infty, \Lambda_{\min} + 1)$ непрерывна и нетрудно видеть из (8), что $\dfrac{dV(\theta)}{d\theta}$ отрицательно для $\forall\theta \in (-\infty, \Lambda_{\min} + 1)$, отсюда следует, что

$$V(\theta) = 0 \qquad (9)$$

на интервале $(\infty, \Lambda_{\min} + 1)$ имеет не более одного корня. Нетрудно убедиться, что $\theta = 1$ и является корнем уравнения (9) и $\theta < \Lambda_{\min} + 1$. Тогда из (7) непосредственно следует справедливость утверждения.

Поскольку, как $\widetilde{B}$ – компакт и $\widetilde{B} \in R_{p_2+p_1}$, то $\widetilde{B}$ - замкнуто и ограничено; U_N и $\omega(b_{j\bullet}, a_{j\bullet})$ – непрерывны $\forall\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet} \end{pmatrix} \in \widetilde{B}$; $\omega(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) > 0$, $\forall\begin{pmatrix} b_{j\bullet} \\ \hdashline a_{j\bullet} \end{pmatrix} \in \widetilde{B}$; то решение задачи (1) всегда существует [4], т.е. всегда существует оценка (1) (хотя для произвольной конечной выборки она и не обязана быть единственной).

Для доказательства практической состоятельности решения нелинейным методом наименьших квадратов оценок линейных разностных уравнений многомерной авторегрессии из критерия (1) введем следующие обозначения:

$$Y^{(j)} = \left|Y_2^{(j)} \ \ \ldots \ \ Y_{N+1}^{(j)}\right|^T;$$

$$A_{y^{(j)}} = \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(p_2)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_N^{(1)} & \cdots & y_N^{(p_2)} \end{vmatrix};$$

$$A_W = \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & \cdots & W_1^{(p_1)} \\ \vdots & & \vdots \\ W_N^{(1)} & \cdots & W_N^{(p_1)} \end{vmatrix};$$

$$A_{y^{(j)},W} = \left|\begin{array}{ccc:ccc} y_1^{(1)} & \cdots & y_1^{(p_2)} & W_1^{(1)} & \cdots & W_1^{(p_1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_N^{(1)} & \cdots & y_N^{(p_2)} & W_N^{(1)} & \cdots & W_N^{(p_1)} \end{array}\right|.$$

Тогда $U_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet})$ можно записать в следующем виде:

$$U_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) = \Big(Y^{(j)} - A_{Y^{(j)},W}\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T,$$

$$Y^{(j)} - A_{Y^{(j)},W} \cdot \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T\Big).$$

Для получения конструктивного метода вычисления оценок из критерия (1) рассмотрим следующее выражение

$$V_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \hat{\theta}) = U_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) - \hat{\theta}\omega(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) =$$

$$= \Big[(Y^{(j)})^T - \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \cdot A^T_{Y^{(j)},W}\Big] \cdot$$

$$\cdot \left[Y^{(j)} - A^T_{Y^{(j)},W}\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T\right] - \hat{\theta}\omega(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}) =$$

$$= (Y^{(j)})^T Y^{(j)} + \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \cdot A^T_{Y^{(j)},W} \cdot A_{Y^{(j)},W} \cdot$$

$$\cdot \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T - 2(Y^{(j)})^T A_{Y^{(j)},W}\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T -$$

$$- \hat{\theta}\left(\sigma_j^2 + b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T + a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T\right) =$$

$$= (Y^{(j)})^T Y^{(j)} + \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c:c} A^T_{Y^{(j)}}A_{Y^{(j)}} & A^T_{Y^{(j)}}A_W \\ \hdashline A^T_W A_{Y^{(j)}} & A^T_W A_W \end{array}\right| \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T -$$

$$- 2(Y^{(j)})^T A_{Y^{(j)},W}\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T -$$

$$- \hat{\theta}\left(\sigma_j^2 + b_{j\bullet}D_1(b_{j\bullet})^T + a_{j\bullet}D_2(a_{j\bullet})^T\right) =$$

$$= Y^{(j)})^T Y^{(j)} - \hat{\theta}\sigma_j^2 + \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right| \cdot$$

$$\cdot \left|\begin{array}{c:c} A^T_{Y^{(j)}}A_{Y^{(j)}} - \hat{\theta}D_1 & A^T_{Y^{(j)}}A_W \\ \hdashline A^T_W A_{Y^{(j)}} & A^T_W A_W - \hat{\theta}D_2 \end{array}\right| \cdot \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T -$$

$$- 2(Y^{(j)})^T A_{Y^{(j)},W}\left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T.$$

Дифференцируя $V_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \hat{\theta})$ по $b_{j\bullet}$, $a_{j\bullet}$ и приравнивая производную к нулю, имеем

$$\left|\begin{array}{c:c} A^T_{Y^{(j)}}A_{Y^{(j)}} - \hat{\theta}D_1 & A^T_{Y^{(j)}}A_W \\ \hdashline A^T_W A_{Y^{(j)}} & A^T_W A_W - \hat{\theta}D_2 \end{array}\right| \cdot \left|b_{j\bullet} \mid a_{j\bullet}\right|^T =$$

$$= A^T_{Y^{(j)},W} Y^{(j)}, \qquad (10)$$

отсюда

$$V_N(\hat{\theta}) = \min_{\binom{b_{j\bullet}}{a_{j\bullet}} \in \widetilde{B}CR_{p1+p2}} V_N(b_{j\bullet}, a_{j\bullet}, \hat{\theta}) =$$

$$= (Y^{(j)})^T Y^{(j)} - \hat{\theta}\sigma_j^2 - \left(A^T_{Y^{(j)},W} \cdot Y^{(j)}\right)^T.$$

(11)

$$\cdot \left|\begin{array}{c:c} A^T_{Y^{(j)}}A_{Y^{(j)}} - \hat{\theta}D_1 & A^T_{Y^{(j)}}A_W \\ \hdashline A^T_W A_{Y^{(j)}} & A^T_W A_W - \hat{\theta}D_2 \end{array}\right| \cdot A^T_{Y^{(j)},W} Y^{(j)}.$$

Для функции $V_N(\hat{\theta})$ справедливо следующее утверждение:

1. Все корни уравнения $V_N(\hat{\theta}) = 0$ (если они существуют) неотрицательны.

2. Уравнение (11) на полусегменте $[0, \Lambda_{\min}(N)]$ имеет не более одного корня $\hat{\theta}(N)$, где $\Lambda_{\min}$ – минимальное собственное обобщенное число регулярного пучка форм, т.е. находятся корни уравнения

$$\det\left\{\left(\begin{array}{c:c} A^T_{Y^{(j)}}A_{y^{(j)}} & A^T_{Y^{(j)}}A_W \\ \hdashline A^T_W A_{Y^{(j)}} & A^T_W A_W \end{array}\right) - \theta\left(\begin{array}{c:c} D_1 & 0 \\ \hdashline 0 & D_2 \end{array}\right)\right\} = 0. \qquad (12)$$

3. Существование корней $\hat{\theta}(N)$ на $[0, \Lambda_{\min}(N)]$ является необходимым и достаточным условием существования единственности решения (1), причем $(\hat{b}_{j\bullet}, \hat{a}_{j\bullet})^T$ определяются по формуле (10):

$$\left|\hat{b}_{j\bullet} \mid \hat{a}_{j\bullet}\right|^T =$$

$$= \left|\begin{array}{c:c} A^T_{Y^{(j)}}A_{Y^{(j)}} - \hat{\theta}(N)D_1 & A^T_{Y^{(j)}}A_W \\ \hdashline A^T_W A_{Y^{(j)}} & A^T_W A_W - \hat{\theta}(N)D_2 \end{array}\right|^{-1} \cdot$$

$$\cdot A^T_{Y^{(j)},W} Y^{(j)}. \qquad (13)$$

Особенности численной реализации алгоритма:

- эти численные методы позволяют ответить на вопрос "существует или не существует" единственная оценка $\hat{b}_{j\bullet}(N), \hat{a}_{j\bullet}(N)$;

- определить начальное приближение, гарантирующее сходимость итерационной процедуры к единственной оценке $\hat{b}_{j\bullet}(N), \hat{a}_{j\bullet}(N)$;

- вычислить с любой наперед заданной точностью оценки $\hat{b}_{j\bullet}, \hat{a}_{j\bullet}$.

Последовательность $\{\hat{\theta}(i)\}$ определяется следующим алгоритмом:

Шаг$_1$ 0. $\hat{\theta}'(0) = 0$.

Шаг$_1$ 1. $\hat{\theta}'(i) = (\Lambda_{\min} + \hat{\theta}'(i-1))/2$, где $\Lambda_{\min}$ из (12).

Шаг$_1$ 2. Вычислить $b_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}'(i)\right)$, $a_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}'(i)\right)$ из (13).

Шаг$_1$ 3. Вычислить $V_N\left(\hat{\theta}'(i)\right)$ из (11).

Шаг$_1$ 4. Если $V_N\left(\hat{\theta}'(i)\right) \le 0$, тогда если уравнение $V_N\left(\hat{\theta}\right) = 0$ имеет корень $\hat{\theta}_1(N) \in \left[0, \Lambda_{\min}(N)\right)$, то последовательность $\hat{\theta}'(0), \ldots, \hat{\theta}(0)$ конечна и $\hat{\theta}(0) \in \left[\hat{\theta}_1(N), \Lambda_{\min}(N)\right)$, иначе перейти к Шагу$_1$ 1.

Существует $\hat{\theta}(0) \in \left[\hat{\theta}_1(N), \Lambda_{\min}(N)\right)$, и $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{\theta}(i) = \hat{\theta}_1(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{b}_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}(i)\right) = \hat{b}_{j\bullet}(N)$, $\lim\limits_{i\to\infty} \hat{a}_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}(i)\right) = \hat{a}_{j\bullet}(N)$, где $\hat{\theta}(i)$, $\hat{b}_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}(i)\right)$, $\hat{a}_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}(i)\right)$ определяется следующим алгоритмом:

Шаг$_2$ 1. Вычислить $\hat{b}_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}(i)\right)$, $\hat{a}_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}(i)\right)$ из уравнения (13).

Шаг$_2$ 2. Вычислить

$$\hat{\theta}(i+1) = \hat{\theta}(i) + \Big((Y^{(j)})^T Y^{(j)} - \hat{\theta}(i)\sigma_j^2 - (A^T_{Y^{(j)},W} Y^{(j)}) \cdot$$

$$\cdot \left|b_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}(i)\right) \,\vdots\, a_{j\bullet}\left(N, \hat{\theta}(i)\right)\right|^T \Big) \Big/$$

$$\Big/ \Big(\sigma_j^2 + b_{j\bullet}(N, \hat{\theta}(i)) D_1 b^T_{j\bullet}(N, \hat{\theta}(i)) +$$

$$+ a_{j\bullet}(N, \hat{\theta}(i)) D_2 a^T_{j\bullet}(N, \hat{\theta}(i))\Big).$$

Шаг$_2$ 3. Перейти к Шагу$_2$ 1. На практике вычисления прекращаются, если достигается заданная точность, т.е. выполняются условия

$$\left\| \left\| V_N(\hat{\theta}(i+1)) - V_N(\hat{\theta}(i)) \right\| \Big/ \left\| V_N(\hat{\theta}(i+1)) \right\| \right\| \le \delta ,$$

где δ – априори задаваемая точность нахождения оценок.

Для подтверждения теоретических исследований были проведены практические эксперименты по реализации численных методов стандартного и модифицированного методов наименьших квадратов. Тексты программ оформлены в виде файлов данных системы Mathcad, функционирование программного обеспечения происходит на персональных компьютерах типа IBM PC не ниже класса Pentium при поддержке операционных систем Windows 98, 2000, XP. В основе программного алгоритма заданна тестовая модель 2-х мерной авторегрессии

$$Z^{(j)}_{i+1} - b^{(0)}_{j\bullet} Z_i = \xi^{(j)}_1(i+1), \quad i = \overline{1, N},$$

$$Y^{(j)}_{i+1} = Z^{(j)}_{i+1} + \xi^{(j)}_2(i+1)$$

со следующими исходными параметрами: r=1 – порядок авторегрессии; p_2=2 – количество выходов, $j = \overline{1, p_2}$; $Z_i = \begin{vmatrix} z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} \end{vmatrix}$ – вектор выходных значений, где $i = 1,2,3,\ldots$ индекс нумерации дискретных моментов времени; $G_0 = \begin{vmatrix} 1 & -0.25 \\ 1.2 & -0.55 \end{vmatrix}$ – матрица "истинных" параметров, где $b^{(0)}_{1\bullet} = (1,-0.25)$, $b^{(0)}_{2\bullet} = (1.2,-0.55)$ – вектора "истинных" параметров согласно числу выходов p_2; $\Xi_1(i) = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)}(i) \\ \xi_1^{(2)}(i) \end{vmatrix}$ – генерирующий шум авторегрессии как последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на интервале [-1;1], дисперсионная матрица $D_1 = \begin{vmatrix} d_1^{(1)} & 0 \\ 0 & d_2^{(1)} \end{vmatrix}$, где $d_{j\bullet}^{(1)} = \dfrac{1}{3}$. Соответственно уравнение авторегрессии будет представлено выражением

$$Z_{i+1} = G_0 Z_{i-1} + \Xi_1(i),$$

а наблюдаемый сигнал

$$Y_i = Z_i + \Xi_2(i), \quad \begin{vmatrix} y_i^{(1)} \\ y_i^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} \end{vmatrix} + \Xi_2(i)$$

где $\Xi_2(i) = \begin{vmatrix} \xi_2^{(1)}(i) \\ \xi_2^{(2)}(i) \end{vmatrix}$ – помеха наблюдения выходного сигнала с дисперсией $D_2 = \begin{vmatrix} d_1^{(2)} & 0 \\ 0 & d_2^{(2)} \end{vmatrix}$, которая изменяется в зависимости от g*g*, т.е. $d_{j\bullet}^{(2)} = \dfrac{d_{j\bullet}^{(1)}}{\gamma}$. Для цели исследования состоятельности оценок использован большой объем выборки *N*=1000. Параметр g*g* дискретно принимает значения 1000, 4, 1, 0.25. Результаты тестов оценок параметров, полученных классическим и модифицированным МНК, приведены на рис.1-2.

Разработанный критерий оценки ошибки "малости" предсказания путем минимизации отношения двух квадратичных форм относится к методам параметрической идентификации линейных динамических объектов, где параметры оцениваются в условиях априорной неопределенности. Предложенный итерационный алгоритм минимизации критериев, получаемых на основе пошагового оценивания до заданной точности матрицы параметров уравне-ния многомерной авторегрессии на основе стохастического градиентного алгоритма ми-нимизации функционала, позволяет получать состоятельные оценки лишь при априорном знании отношения дисперсий помех во входном и выходном сигналах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кацюба О.А., Гущин А.В.* О состоятельности оценок параметров многомерной регрессии на основе нелинейного метода наименьших квадратов // Сб. тр. IV Меж-

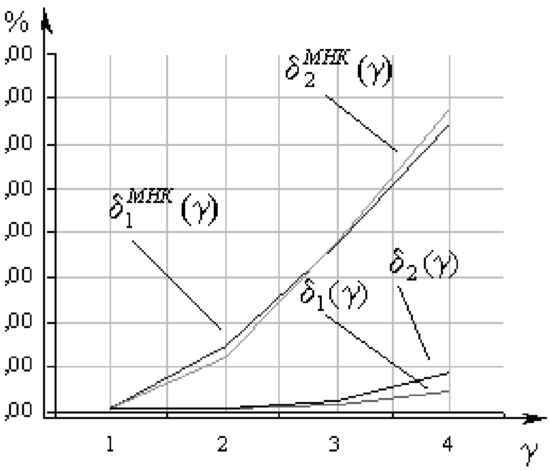

Рис. 1. Сравнение погрешности отклонения оценок вектора параметров авторегрессии модифицированного ($\delta_1(\gamma)$, $\delta_2(\gamma)$) и классического МНК ($\delta_1^{МНК}(\gamma)$, $\delta_2^{МНК}(\gamma)$) от вектора "истинных" параметров при γ ={1000, 4, 1, 0.25}

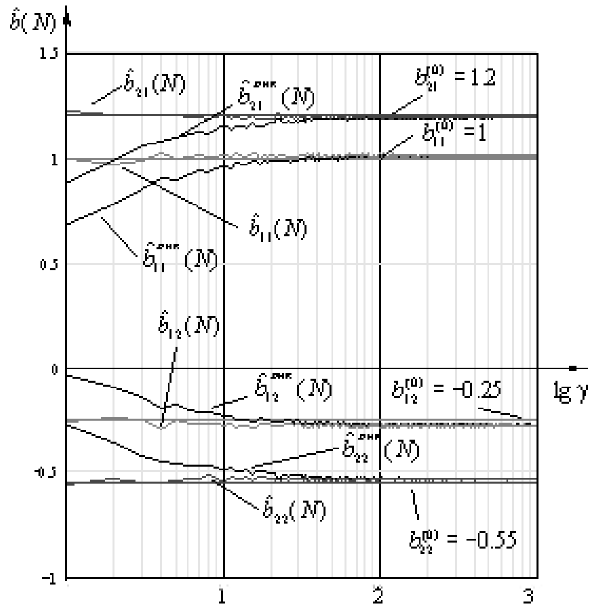

Рис 2. Сравнение точности оценивания векторов параметров авторегрессии классическим ($\hat{b}_{1\bullet}^{МНК}, \hat{b}_{2\bullet}^{МНК}$) и модифицированным МНК ($\hat{b}_{1\bullet}, \hat{b}_{2\bullet}$) с истинными параметрами $b_{1\bullet}^{(0)}, b_{2\bullet}^{(0)}$; *N*=1000, γ =0,25..1000)

дунар. науч. конф. ИПУ РАН. 2005.
2. *Кацюба О.А., Гущин А.В.* Численные методы определения оценок параметров многомерного линейного разностного уравнения // Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-18): Сб. тр. XVIII Междунар. науч. конф. Казань, 2005. Т. 2.
3. *Кацюба О.А., Жданов А.И.* Идентификация методом наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. Вып. 2.
4. *Шепилов И.А.* О методах решения дробных задач математического программирования // Изв. АН УССР. Кибернетика. 1980. Вып. 1.

THE IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF THE DYNAMIC MODEL BASED ON THE MULTIDIMENSIONAL LINEAR AUTOREGRESSION WITH THE HELP OF THE NONLINEAR LEAST-SQUARES METHOD

© 2006 A.V. Gushchin

Samara State Academy of Ways of Communication

In this article investigate the criterion of the consistency of estimator of the parameters of the multidimensional linear regression based on the nonlinear least-squares method. The demonstration of the consistency of estimator, only in the case of the a priori known ratio of variances of the disturbances in the input and output signals, is made.