УДК.691+519.8

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗЕРНОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

© 2006 В.Б. Чупшев

Инвестиционно-строительная компания “Средневолжскстрой”

В статье дана математическая модель описания зерновых характеристик сыпучих строительных материалов. Предложены формулы для определения удельной поверхности числа частиц в единице массы и пористости. Правильность расчетов подтверждается практикой их использования в лабораторных условиях.

При изучении ряда процессов, происходящих в пористой среде, как-то: движение газов или жидкостей через слой, перепад давлений в неподвижном слое, переход неподвижного слоя в псевдоожиженное состояние, теплообмен в слое, скорость витания отдельных частиц и многих других практически важных задач, приходится определять гранулометрический состав сыпучего материала.

Обработка опытных данных по ситовому анализу керамзитового гравия и песка приводит к известному уравнению:

$$R_x = 100 l^{-bx^n}\,\%, \qquad (1)$$

где R_x – полный остаток на сите с размером отверстия х, мм; n и b – постоянные коэффициенты, зависящие от технологического процесса производства керамзитового гравия; l – основание натуральных логарифмов.

В уравнении (1) неизвестными являются константы n и b, которые можно определить, если произвести просеивание материала через два сита с отверстиями a_1 и a_2 мм. Из уравнения (1) получим:

$$R_{a_1} = 100 l^{-ba_1^n}, \qquad (2)$$

$$R_{a_2} = 100 l^{-ba_2^n}. \qquad (3)$$

После логарифмирования имеем:

$$\ln R_{a_1} = \ln 100 - ba_1^n, \qquad (4)$$

$$\ln R_{a2} = \ln 100 - ba_2^n, \qquad (5)$$

Из (4) находим:

$$b = \frac{1}{a_1^n} \cdot \ln \frac{100}{Ra_1}. \qquad (6)$$

Из (5) следует:

$$b = \frac{1}{a_2^n} \cdot \ln \frac{100}{Ra_2}. \qquad (7)$$

Приравнивая уравнения (6) и (7), получаем:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n = \frac{\ln 100 - \ln Ra_2}{\ln 100 - \ln Ra_1} = \frac{4,6052 - \ln Ra_2}{4,6052 - \ln Ra_1}.$$

Вторичное логарифмирование дает:

$$n \ln \cdot \frac{a_2}{a_1} = \ln \frac{4,6052 - \ln Ra_2}{4,6052 - \ln Ra_1},$$

откуда

$$n = \frac{1}{\ln a_2 - \ln a_1} \cdot \ln \frac{4,6052 - \ln Ra_2}{4,6052 - \ln Ra_1}. \qquad (8)$$

Зная полные остатки на ситах Ra_1 и Ra_2, из выражения (8) определяется n, затем из (7) коэффициент b.

Подставляя найденные значения n и b в уравнение (2) можно подсчитать полные остатки на ситах для любых значений x.

Если в выражение (2) подставить значение b из (7), то после логарифмирования получим удобную для подсчетов формулу:

$$100\left(\frac{Ra_1}{100}\right)^{\left(\frac{x}{a_1}\right)^n},\% \qquad (9)$$

Если задаться максимальным размером зерна x_{max} , причем считать, как обычно, полный остаток на сите Rx_{max}=0,1%, то по формуле (9) получим:

$$Rx_{\max}=\frac{1}{10}=100\left(\frac{Ra_1}{100}\right)\left(\frac{x_{\max}}{a_1}\right)^n,$$

откуда $$\frac{1}{100}=\left(\frac{Ra_1}{100}\right)^{\left(\frac{x_{\max}}{a_1}\right)^n}.$$

После логарифмирования находим:

$$-\ln\cdot 1000=\left(\frac{x_{\max}}{a_1}\right)^n\cdot\ln\frac{Ra_1}{100}.$$

Далее следует:

$$6,9078=\left(\frac{x_{\max}}{a_1}\right)^n\cdot\ln\frac{Ra_1}{100},$$

откуда получаем:

$$x_{\max}=a_1\sqrt{\frac{6,9078}{4,6052-\ln Ra_1}}. \qquad (10)$$

Зерновая характеристика материала по остаткам на ситах дает возможность определить, какое количество частиц данного размера x содержится в единице массы материала и процентное содержание частиц, лежащих в любом интервале от x_1, до x_2.

Теоретическое определение числа частиц в единице массы

Если принять, что частицы любого сыпучего материала имеют сферическую форму, то количество частиц, имеющих размер x, составляет:

$$n_x=\frac{6y}{\pi\gamma x^3}.$$

Общее числовое количество зерен в единице массы (1кг) составит:

$$N=n_1+n_2+n_3+\ldots n_k=\sum^k ni-\frac{6}{\pi\gamma}\cdot\frac{\sum^k}{i=1}\frac{yi}{x^3i},$$

шт/кг.

При непрерывном изменении x от x_{min} до x_{max} можно записать:

$$N=\frac{6}{\pi\gamma}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\frac{y_x d_x}{x^3}, \text{ шт/кг.}$$

Функция $y=f(x)$ определяет процент содержания в единице массы зерен определенного размера.

Подставляя вместо y его значения равное nbx^{n-1} и полагая $nbx^{n-1}=Z$ получим:

$$N=\frac{6}{\pi\gamma}b^{\frac{3}{n}}\int_c^a\frac{l^{-z}}{z^{\frac{3}{n}}}dz, \text{ шт/кг,} \qquad (11)$$

где $c=bx^n_{min}$ и $a=bx^n_{max}$, n и b – постоянные коэффициенты.

Ниже приводятся вычисленные интегралы для некоторых значений "n":

$$N_{n=\frac{2}{3}}=\frac{6}{\pi\gamma}b^2\left[-\frac{l^{-a}}{a}+\frac{l^{-c}}{c}-Ei(-a)+Ei(-c)\right], \text{ шт/кг} \qquad (12)$$

Так как первый и третий члены в квадратных скобках малы, по сравнению со вторым и четвертым, то, пренебрегая ими, получим:

$$N_{n=\frac{3}{2}}=\frac{6}{\pi\gamma}b^2\left[\frac{l^{-c}}{c}+Ei(-c)\right], \text{ шт/кг} \qquad (13)$$

В дальнейшем, пренебрегая малыми членами, получим формулы для определения количества частиц, находящихся в единице массы (1кг):

$$N_{n=1}=\frac{3b^3}{\pi\gamma}\left[\frac{l^{-c}}{c}\left(\frac{1}{c}-1\right)-Ei(-c)\right]. \qquad (14)$$

$$N_{n=\frac{3}{4}}=\frac{2b^4}{\pi\gamma}\left\{\frac{l^{-c}}{c^3}-\frac{1}{2}\left[\frac{l^{-c}}{c}\left(\frac{1}{c}-1\right)-Ei(-c)\right]\right\}. \text{ шт/кг} \qquad (15)$$

$$N_{n=2}=\frac{12b^{\frac{3}{2}}}{\pi\lambda}\left\{\frac{l^{-c}}{\sqrt{c}}-\frac{l^{-a}}{\sqrt{a}}-\sqrt{\pi}\left[\Phi\left(\sqrt{a}\right)-\Phi\left(\sqrt{c}\right)\right]\right\}. \text{ шт/кг} \qquad (16)$$

Для промежуточных значений n вычисление интеграла (1) можно выполнить приближенными методами.

Определение удельной поверхности сыпучего материала

Под удельной поверхностью песка или гравия понимают сумму поверхностей всех частиц, находящихся в единице массы S м²/кг, S см²/г и т.д. При теоретическом определении удельной поверхности предполагается, что форма частиц шарообразная. Конечно, частицы естественного материала далеки от шаровой формы, но точная оценка действительной формы частиц вряд ли возможна. Поэтому в результате подсчетов получается некоторая условная поверхность, меньшая, чем действительная, так как форма шара является идеальной геометрической формой, имеющей максимальный объем при минимальной поверхности.

Поэтому $S_{действ.}=KS$, *где* $K>1$ и этот коэффициент должен быть определен экспериментально:

Пусть V_x – объем одной частицы в мм³;

S_x – боковая поверхность частицы в мм³;

γ – плотность частицы в кг/м³;

n_x – количество одинаковых по размеру частиц в 1 кг.

В единице массы материала находится y_x долей по массе частиц, имеющих одинаковый размер. Масса этих одинаковых частиц будет равна:

$$y_x = V_x \gamma n_x, \tag{17}$$

откуда (учитывая размерность) получим:

$$n_x = \frac{y_x 10^9}{V_x \gamma}. \tag{18}$$

Общая поверхность одинаковых частиц составляет:

$$n_x S_x = \frac{y_x 10^9}{\gamma} \cdot \frac{S_x}{V_x}. \tag{19}$$

Для сферической частицы:

$$\frac{S_x}{V_x} = \frac{\pi x^2}{\frac{\pi x^3}{6}} = \frac{6}{x}, \tag{20}$$

где x – диаметр частицы. Общая удельная поверхность частиц в 1 кг материала, выраженная в м², будет равна:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \frac{6 \cdot 10^3}{\gamma} \cdot \frac{y_x}{x} dx, \text{ м}^2/\text{кг}. \tag{21}$$

Полагая $y = l^{-bx^n} \cdot nbx^{n-1}$ получим:

$$S = \frac{6 \cdot 10^3}{\gamma} \int_{x_2}^{x_1} l^{-bx^n} \cdot nbx^{n-1} d, \text{ м}^2/\text{кг}. \tag{22}$$

Сделаем подстановку:

$$bx^n = z \quad ,$$

тогда

$$x = \frac{Z^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}, dx \frac{1}{b^{\frac{1}{n}} n} \cdot z^{\frac{1}{n-1}} dZ, \tag{23}$$

$$x^{n-1} = \frac{z^{1-\frac{2}{n}}}{b^{1-\frac{2}{n}}}. \tag{24}$$

Новые пределы интегрирования будут:

при $x=x_1$, $Z=bx^n_1=c$.

при $x=x_2$, $Z=bx^n_2=a$.

Подставляя эти значения в выражение (22), получим:

$$S = \frac{6 \cdot 10^3}{\gamma} \cdot b^{\frac{1}{n}} \int_c^a \frac{l^{-z}}{Z^{\frac{1}{n}}} \cdot dZ, \text{ м}^2/\text{кг}. \tag{25}$$

Интеграл (25) может быть выражен через изученные функции только для некоторых частных значений показателей *n*. При других значениях *n* вычисление этого интеграла может быть выполнено известными приближенными методами. Если *n=1,* то интеграл выражается через интегральную показательную функцию:

$$S = \frac{6 \cdot 10^3}{\gamma} \cdot b^{\frac{1}{n}} \int_c^a \frac{l^{-z}}{Z^{\frac{1}{n}}} \cdot dZ, \quad \text{м}^2/\text{кг}. \tag{26}$$

Для функции $Ei(-u)$ $Ei(-u)$:

$$Ei(-u) = 0,5772 + \ln/u/ - \frac{u}{1,1} + \frac{u^2}{2,2} + \frac{u^3}{3,3} + ...$$

Здесь C=0,5772 – постоянная Эйлера.

Если *n=2*, то интеграл приводится к функции Крампа (интеграл вероятности):

$$\int_c^a \frac{l^{-z}}{\sqrt{z}} = \sqrt{\pi}\left[\Phi\left(\sqrt{a}\right) - \Phi\left(\sqrt{c}\right)\right]. \qquad (27)$$

При $n>1$ в формуле (25) расширим пределы интегрирования, $c=0$ и $a=\infty$.

В этом случае интеграл приводится к функциям Гамма:

$$\int_0^\infty \frac{l^{-z}}{Z^{\frac{1}{n}}} \cdot dZ = \int_0^\infty l^{-z} \cdot Z^{\left(1-\frac{1}{n}\right)-1} \cdot dZ = \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(2-\frac{1}{n}\right)}{1-\frac{1}{n}}. \qquad (28)$$

Из формулы (28) следует, что при $n=1$ удельная поверхность $S=\infty$. Это следует из того обстоятельства, что пределы интегрирования выбраны 0 и ∞.

В этом случае необходимо пользоваться формулой (26).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чупшев В.Б., Эльконюк А.А.* Строительные материалы и изделия. М.: Российская инженерная Академия, 2004.
2. *Чупшев В.Б., Эльконюк А.А.* Строительные материалы и изделия. М.: Российская инженерная Академия, 2004.
3. *Чупшев В.Б., Эльконюк А.А.* Строительные материалы и изделия (технология и оборудование специального назначения). М.: Российская инженерная Академия, 2004.

MATHEMATICAL METHOD OF DETERMINATION OF GRANULAR MATERIALS' GRAIN CHARACTERISTICS

© 2006 V.E. Tchoupshev

Investment Building Corporation "Srednevolzhskstroy"

A mathematical model for description of granular construction materials' grain characteristics is presented in the article. Laws for estimation of porosity of materials and specific surface of elements in a mass unit are given. Accuracy of the calculations has been confirmed in laboratory environment.