УДК 535.42

РАСЧЕТ ЭЙКОНАЛА СВЕТОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ ЗАДАННОГО МАСШТАБИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСВЕЩЕННОСТИ

© 2006 Л.Л. Досколович[1], Н.Л. Казанский[1], М.А. Моисеев[2]

[1]Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара
[2]Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассмотрен численный метод расчета функции эйконала светового поля для выполнения операции масштабирования входного распределения освещенности в непараксиальном приближении. Метод основан на представлении функции эйконала в виде системы бикубических сплайнов. Параметры сплайнов определяются численно из условия реализации заданного преобразования масштаба с минимальной ошибкой. Приведены результаты расчета функции эйконала для масштабирования прямоугольной и круглой областей с различными коэффициентами масштабирования по осям координат.

Введение

Задача расчета оптических элементов для преобразования и фокусировки светового пучка в заданную область является актуальной для широкого круга прикладных задач, включающего задачи светотехники и лазерной оптики. Задача расчета оптического элемента состоит в расчете формы оптической поверхности элемента из условия выполнения заданного преобразования входного освещающего пучка.

Ряд методов решения задач данного класса в приближении геометрической оптики разработан для дифракционных оптических элементов [1-6]. В этом случае задача ставится как задача расчета эйконала светового поля в некоторой плоскости из условия выполнения заданного преобразования координат или фокусировки в требуемую область в плоскости, отстоящей от исходной плоскости на заданном расстоянии. При этом форма поверхности дифракционного элемента может быть однозначно восстановлена по распределению эйконала в плоскости.

В общем случае задача расчета эйконала из условия фокусировки в заданную двумерную область сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных, известного как уравнение Монже-Ампера. Аналитическое решение данного уравнения возможно только для тривиальных задач, обладающих радиальной или цилиндрической симметрией [1].

В данной работе в приближении геометрической оптики рассмотрен численный метод нахождения функции эйконала, обеспечивающей в заданной плоскости различное масштабирование по осям координат входного распределения освещенности. Метод разработан для случая непараксиального приближения и основан на представлении функции эйконала в виде системы бикубических сплайнов. Параметры сплайнов определяются с использованием метода оптимизации из условия реализации заданного преобразования координат.

Постановка задачи

Требуется найти для произвольных коэффициентов масштабирования по осям k_1 и k_2 функцию эйконала $\Psi(u,v)$, определенную в плоскости $z=0$ и обеспечивающую масштабирование распределения освещенности в выходной плоскости $z=f$. В этом случае, требуемое лучевое преобразование координат имеет вид

$$\begin{cases} x(u,v) = k_1 u \\ y(u,v) = k_2 v \end{cases},$$

где (u,v) – координаты точки выхода луча в плоскости $z=0$, а (x,y) – координаты точки прихода этого луча в выходную плоскость $z=f$. Так как якобиан преобразования (1) равен константе, то эйконал, реализующий преобразование (1), обеспечит формирование области с распределением освещенности такого же вида, как и в плоскости $z=0$, но с измененным масштабом.

Приведенная постановка задачи включает расчет дифракционных оптических элементов. Действительно, при условии выполнения приближения тонкого оптического элемента, высота дифракционного микрорельефа пропорциональна функции эйконала, взятой по модулю λ, где λ – длина волны [1-3]. Отметим также, что по функции эйконала и по волновому фронту освещающего пучка может быть восстановлена недифракционная преломляющая или отражающая поверхность оптического элемента, обеспечивающая заданное масштабирование (1).

Координаты оптического луча в выходной плоскости зависят от функции эйконала следующим образом [1-3]:

$$\begin{cases} x(u,v)=u+\Psi'_u \dfrac{f}{\sqrt{1-(\Psi'_u)^2-(\Psi'_v)^2}}, \\ y(u,v)=v+\Psi'_v \dfrac{f}{\sqrt{1-(\Psi'_u)^2-(\Psi'_v)^2}}. \end{cases}$$

В случае, когда коэффициенты масштабирования равны ($k_1=k_2=k$), несложно получить точное аналитическое решение:

$$\Psi(u,v)=\frac{1}{k-1}\sqrt{(k-1)^2\left(u^2+v^2\right)+f^2}\ .$$

Если же коэффициенты различны, то точного решения не существует. Действительно, подставляя (1) в (2), и проводя несложные преобразования, получим, что $\Psi''_{uv}\neq\Psi''_{vu}$. Это условие показывает невозможность точного восстановления функции $\Psi(u,v)$ из уравнений (2) при условии (1). Таким образом, задача расчета функции эйконала может быть решена только численно, из условия выполнения масштабирования (1) с наименьшей погрешностью.

Метод решения

В силу симметрии задачи достаточно найти эйконал в первом квадранте. Функцию эйконала предлагается представить в виде системы бикубических сплайнов на прямоугольной сетке (рис. 1).

Бикубические сплайны сохраняют непрерывность функции, ее первых и смешанной производных на границах, поэтому преломляющая или отражающая поверхность, восстановленная по такой функции эйконала, будет также непрерывной. Для определения параметров сплайна необходимо задать значения функции, а также ее первых и смешанной производных в углах прямоугольной области определения сплайна.

Так как известны зависимости $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, то первые производные эйконала выражаются из (2) следующим образом:

$$\begin{cases} \Psi'_u=\dfrac{x(u,v)-u}{\sqrt{f^2+\left(x(u,v)-u\right)^2+\left(y(u,v)-v\right)^2}} \\ \Psi'_v=\dfrac{y(u,v)-v}{\sqrt{f^2+\left(x(u,v)-u\right)^2+\left(y(u,v)-v\right)^2}} \end{cases}$$

Таким образом, неизвестными остаются значения функции эйконала и значения сме-

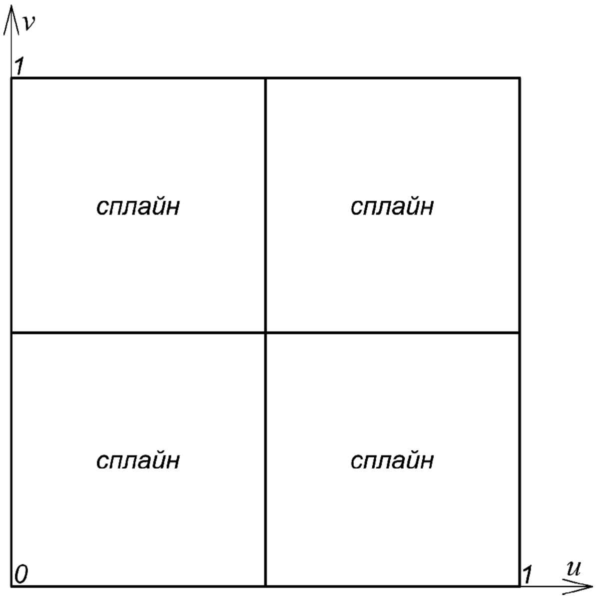

Рис. 1. Пример представления функции эйконала в первой четверти в виде системы из четырех бикубических сплайнов

Табл. 1. Зависимость СКО освещенности на выходной плоскости от коэффициента масштабирования k_2 и углового размера α при $k_1 = 10$, $a = 20$ мм

Угловой размер по оси Ox в градусах	СКО освещенности на выходной плоскости			
	$k_2 = 3$	$k_2 = 5$	$k_2 = 7$	$k_2 = 10$
30	0.0272	0.0356	0.0297	0
20	0.0112	0.0146	0.0130	0
15	0.0089	0.0097	0.0084	0
10	0.0071	0.0075	0.0068	0

шанной производной в углах сплайнов. Будем считать их параметрами оптимизации. Введем функционал невязки, определяющий ошибку выполнения заданного преобразования (1):

$$F(\mathbf{c}) = \sum_{u,v} \left(x(u,v) - k_1 u \right)^2 + \left(y(u,v) - k_2 v \right)^2,$$

где $\mathbf{c}$ – вектор, содержащий значения функции и смешанной производной в узлах системы сплайнов. Вектор параметров $\mathbf{c}$ предлагается определять из условия минимума функционала (5). Расчет функции эйконала был реализован в программной среде Matlab 6.5. Для минимизации функционала (5) использовалась встроенная функция fminsearch, использующий симплексный метод Недлера-Мида.

Функция эйконала была рассчитана для случая преобразования равномерного распределения освещенности из квадратной области размером $a \times a$ в прямоугольную область размером $k_1 a \times k_2 a$ в плоскости $z = f$. Расчет проводился для различных соотношений коэффициентов масштабирования k_1, k_2 и угловых размеров области по оси Ox при $a = 20$ мм. Угловой размер $\alpha = arctg(k_1 a / f)$ определялся относительно начала координат в плоскости $z = 0$. Аппроксимация эйконала в первой четверти производилась четырьмя сплайнами (рис. 1). Этого оказалось достаточно для снижения среднеквадратичной ошибки (СКО) формирования постоянной освещенности в выходной плоскости до нескольких процентов. Расчетные значения СКО при различных значениях k_1, k_2, α приведены в табл. 1 и не превышают 3.5%. При этом энергетическая эффективность, определяемая как доля энергии, переносимая из области определения эйконала в заданный прямоугольник $k_1 a \times k_2 a$, для всех указанных в таблице случаев фактически равна 100%. Вид функции эйконала для случая $k_1 = 10, k_2 = 7, \alpha = 20°$ показан на рис. 2. Результаты расчета распределения освещенности приведены на рис. 3 и показывают формирование прямоугольника с фактически постоянной освещенности. Расчет освещенности в плоскости $z = f$ проводился численно на основе формулы

$$E(x,y) = E_0(u,v) / \left| J(u,v) \right|,$$

где $J(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}$ - якобиан лучевого преобразования координат.

Приведенная на рис.2 функция эйконала осуществляет операцию масштабирования для любого распределения освещенности в плоскости $z = 0$. В качестве примера на рис. 4. приведен результат расчета освещенности в выходной плоскости при функции эйконала, показанной на рис.2 и при равномерном распределении освещенности в круге с радиусом 10 мм. В этом случае формируется эллиптическая область с фактически постоянной освещенностью.

Заключение

Разработан численный метод расчета функции эйконала для выполнения операции масштабирования в непараксиальном приближении. Проведен расчет функций эйконала для различных коэффициентов масштабирования по осям координат. Рассмотрены

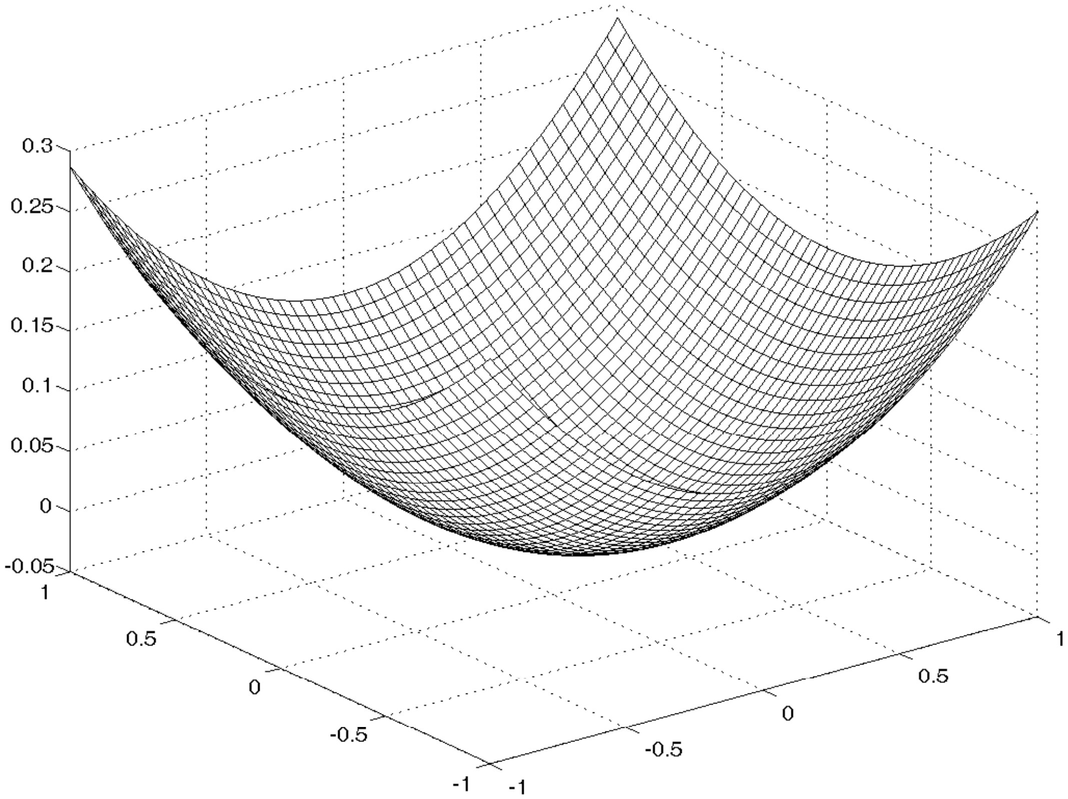

Рис. 2. Функция эйконала, производящего масштабирование с коэффициентами $k_1 = 10, k_2 = 7$ при угловом размере по оси x $\alpha = 20°$, $a = 20$ мм

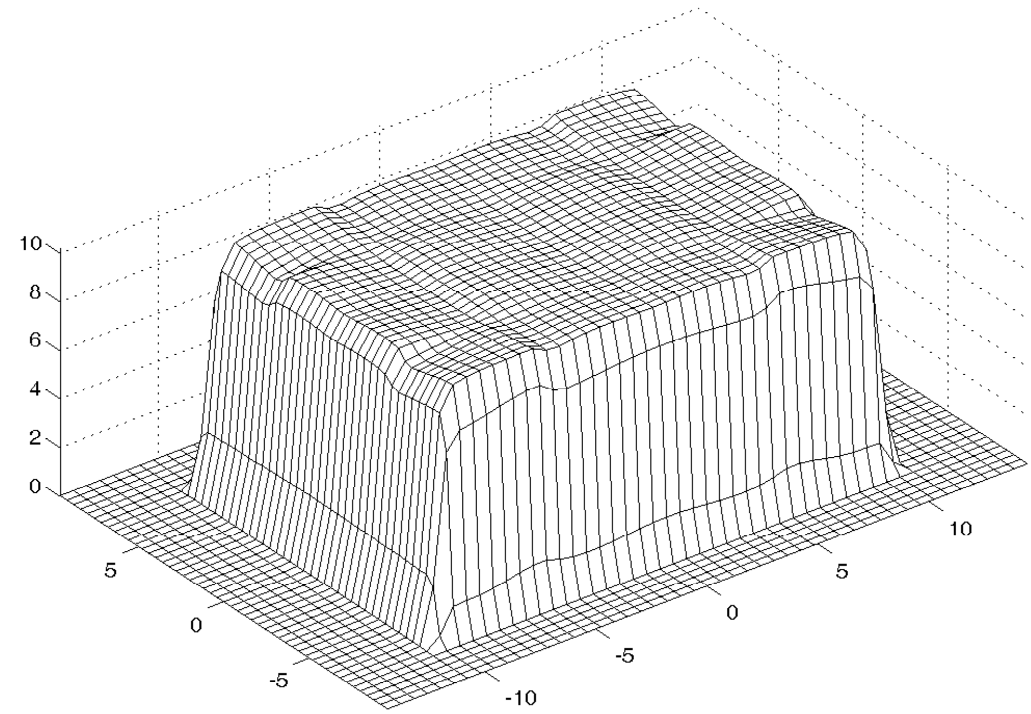

Рис. 3. Расчетное распределение освещенности на выходной плоскости при функции эйконала, показанной на рис. 2

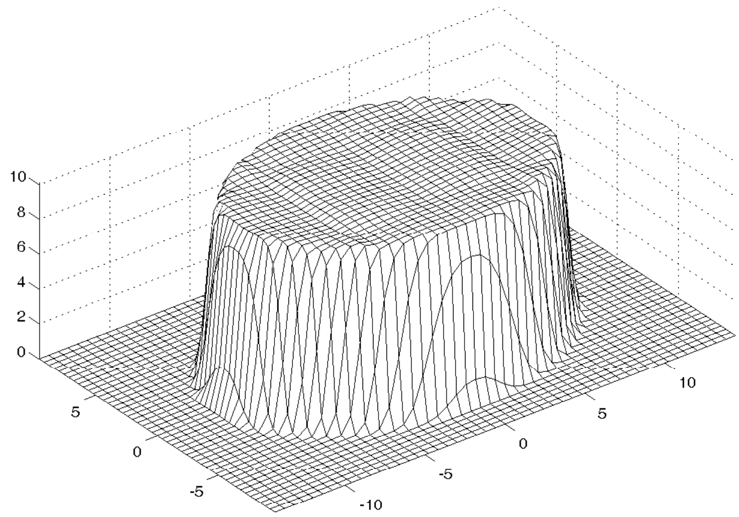

Рис. 4. Расчетное распределение освещенности на выходной плоскости при функции эйконала на рис.2 и равномерной освещенности в круге радиуса 10 мм

примеры преобразования квадратной и круглой областей с постоянной освещенностью в прямоугольную и эллиптическую области, соответственно. Среднеквадратичное отклонение освещенности в выходной плоскости от постоянного значения не превышает 3,5% при угловых размерах масштабированной области до 30є и существенно различных коэффициентах масштаба. Метод допускает обобщение на случай выполнения разделимого преобразования координат общего вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончарский А.В., Попов В.В., Степанов В.В.* Введение в компьютерную оптику. М., Изд-во МГУ, 1991.
2. *Soifer V., Kotlyar V., Doskolovich L.* Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation. London: Taylor&Francis Ltd., 1997. 244 p.
3. Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements. Edited by Victor A. Soifer. New York, A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc., 765 p.
4. *Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сагателян Д.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А.* Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы // Письма в ЖТФ. 1982. Т.8. № 13.
5. *Гончарский А.В., Данилов В.А., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А., Степанов В.В.* Решение обратной задачи фокусировки лазерного излучения в произвольную кривую // Доклады АН СССР. 1983. Т.273. № 3.
6. *Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Soifer V.A., Kharitonov S.I., Perlo P.* A DOE to form a line-shaped directivity diagram // Journal of Modern Optics. 2004. V.51. № 13. P.1999-2005.

LIGHT FIELD EIKONAL CALCULATION FOR GIVEN SCALING OF ILLUMINATION DISTRIBUTION

© 2006 L.L. Doskolovich[1], N.L. Kazansky[1], M.A. Moiseev[2]

[1]Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Science, Samara
[2]Samara State Aerospace University

The problem of input illumination distribution scaling in non-paraxial case is considered. To obtain the light field eikonal function the numerical method is proposed. It is based on the representation of eikonal function as a system of bi-cubic splines. Spline parameters are derived numerically using the criterion of minimum scaling transformation error. The results of eikonal function computing for scaling of square and round areas with different scaling coefficients are presented.