

УТОЧНЁННЫЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ РАВНОАМПЛИТУДНЫХ ПОЛИНОМОВ

© 2006 С.С. Фролов, В.Д. Шевеленко, А.А. Гусаров

Оренбургский государственный университет

В работе показана недостаточная эффективность применения современных источников измерительных сигналов для измерения частотных характеристик в области инфранизких частот. Предложен к применению сигнал на основе тригонометрического полинома с равномерным дискретным спектром и метод его аппроксимации. Получены аналитические выражения дискретного гармонического спектра аппроксимирующей функции. Предложена методика оценки погрешности аппроксимации в виде коэффициента гармоник паразитного спектра и неравномерности амплитудного спектра в рабочей области частот.

В процессе разработки, производства и эксплуатации отдельных образцов радиоэлектронной аппаратуры и средств телекоммуникаций остаются востребованными измерения, контроль и идентификация их частотных характеристик (ЧХ) в диапазоне от инфранизких частот до нескольких десятков герц [1].

Ручные высокоточные методы анализа частотных характеристик (ЧХ) малопродуктивны, и в указанном диапазоне потребуют значительных трудозатрат – до нескольких десятков человеко-часов.

Самая низкая анализируемая частота современных автоматизированных измерителей амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), в которых в качестве источника испытательного сигнала используется генератор качающейся частоты (ГКЧ), ограничена величиной 20 Гц [2]. Ограниченность применения таких устройств на низких частотах связана с тем, что спектр испытательного сигнала на выходе ГКЧ – частотно-модулированного импульса – неравномерен в полосе качания. Известно, что степень неравномерности спектральной плотности одиночного линейно частотно-модулированного (ЛЧМ) импульса напрямую связана с величиной так называемой базы [3]

$$B = \Delta f \cdot \tau_u, \quad (1)$$

где Δf – девиация частоты ЛЧМ-импульса или ширина полосы измерения АЧХ; τ_u – длительность ЛЧМ-импульса.

С увеличением величины базы B спектральная плотность ЛЧМ-импульса становится более равномерной в полосе качания [3]. Из выражения (1) следует, что для улучшения равномерности спектра с той же шириной полосы качания необходимо увеличивать длительность ЛЧМ-импульса. Для одного из лучших измерителей АЧХ [2] X1-41 минимальная величина ширины полосы качания – 100 Гц, нижняя граничная частота полосы – $f_n = 20$ Гц, максимальное значение длительности рабочего хода развёртки (длительности ЛЧМ-импульса) – 10 с. Соответственно, величина базы не превысит значения $B = 1000$, при котором обеспечивается паспортная величина неравномерности уровня выходного напряжения ГКЧ $\delta U = 0,5$ дБ, или 5,92%. Для измерения ЧХ на более низких частотах неизбежно встанет необходимость сужения полосы качания. Для сохранения или улучшения той же равномерности напряжения на выходе ГКЧ необходимо обеспечить величину базы $B \geq 1000$, то есть, в соответствии с (1) – увеличить длительность ЛЧМ-импульса τ_u . Для измерения ЧХ на частотах $f \leq 20$ Гц потребуются величины τ_u от сотен до нескольких тысяч секунд. То есть для измерения потребуется время, соизмеримое с временными затратами в ручных методах, а в структуре измерителя АЧХ потребуются дополнительные устройства стабилизации

внутренних параметров измерителя для уменьшения влияния внешних дестабилизирующих факторов – колебаний температуры, влажности, напряжения внешней питающей сети и так далее. Кроме того, ЛЧМ-импульсы, другие частотно модулированные сигналы имеют ненулевой нелинейный фазовый спектр, что делает их малоприспособными для измерения фазо-частотных характеристик.

Кроме ЛЧМ-сигналов в современных измерителях ЧХ в качестве зондирующих сигналов применяются импульсные сигналы с короткой длительностью прямоугольной или произвольной формы [4, 5], а также многочастотные сигналы [6, 7].

Спектральная характеристика известной дельта-функции бесконечна и постоянна [3]. Импульсные сигналы короткой длительности стремятся приблизить к свойствам дельта-импульсов, однако в виду бесконечности амплитуды дельта-функции полностью они им соответствовать не могут. Например, форма спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса (рис. 1) короткой длительности τ_u от идеальной равномерности далека, и для измерения ЧХ в области низших частот с точностью до 5% пригодна лишь часть главного лепестка спектра импульса – диапазон частот

$$\Delta f = 0, \dots, 0.17 \cdot \frac{1}{\tau_u}, \quad (2)$$

при этом энергия испытательного сигнала используется неэффективно. Для повышения точности измерения ЧХ в том же диапазоне необходимо уменьшить длительность импульса, а соответственно и увеличить скваж-

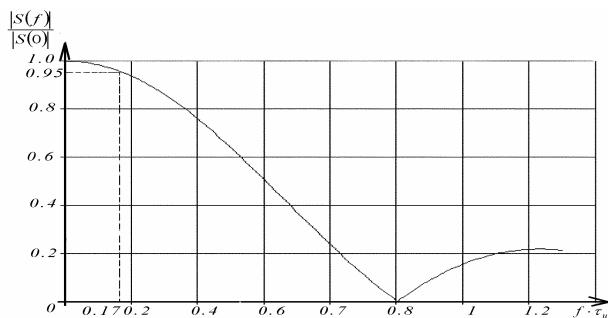


Рис. 1. Форма спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса

ность импульсного сигнала, что потребует увеличения требований к точности задания длительности τ_u и его долговременной нестабильности.

В некоторых измерителях ЧХ, использующих зондирующие импульсные сигналы произвольной формы, для измерений используют более широкий участок спектра, то есть и участок, где его относительная неравномерность далеко превышает требуемую точность измерения. Но в таком случае используется дополнительная операция нормирования спектра [4, 5] сигнала, принятого с выхода исследуемого объекта, а в конструкции измерителя ЧХ необходимо предусматривается дополнительное запоминающее устройство с информацией о спектре испытательного сигнала.

Измерители ЧХ, использующие многочастотный сигнал – суммарный сигнал с выходов нескольких синхронизированных генераторов гармонических сигналов разных частот, пригодны для измерения в ограниченном диапазоне частот. Кроме того, для изготовления одного синусоидального генератора инфранизкой частоты требуются реактивные элементы (в основном конденсаторы) с большими значениями параметров, а соответственно и габаритных размеров, а также дополнительное устройство стабилизации частоты и амплитуды [6]. Таким образом, структура многочастотного генератора в области инфранизких частот получится очень громоздкой и ограничена в плане универсальности применения.

Поэтому для усовершенствования измерителей ЧХ в плане снижения трудоёмкости, повышения производительности измерений с сохранением приемлемой точности предлагается использовать в качестве генераторов испытательных воздействий генераторы равноамплитудных полиномов – функций, разлагающихся в тригонометрический ряд Фурье с одинаковыми амплитудами и нулевыми начальными фазами [8].

При вычислении значений полиномов применяются операции умножения и деления, поэтому для реализации их генераторов требуются устройства умножения и деления.

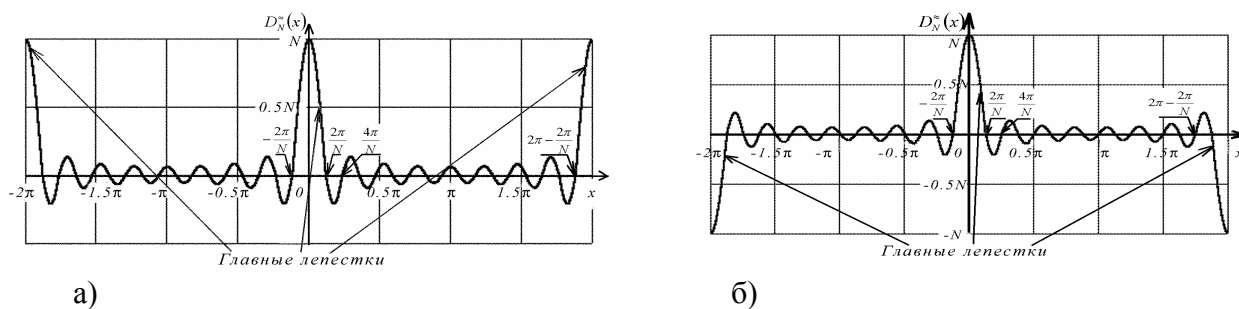


Рис. 2.

Но в виду наличия в полиномах точек с неопределённостью вида “ноль на ноль” реализация генераторов на аналоговых схемах невозможна.

Один из вариантов решения задачи генерации полиномов – разработка метода аппроксимации равноамплитудного полинома. В настоящей работе предлагается метод аппроксимации функции

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, N = 3, 4, \dots, \quad (3)$$

который представляется ограниченным косинусоидальным рядом Фурье [8]

$$D_N(x) = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{n=1}^{0.5(N-1)} \cos(n \cdot x) \text{ при нечётных } N, \\ 2 \sum_{n=1}^{0.5N} \cos\left((2n-1)\frac{x}{2}\right) \text{ при чётных } N. \end{cases} \quad (4)$$

В работе [9] одним из авторов предложен вариант несложного метода аппроксимации равноамплитудного полинома (3). Однако количественные и качественные характеристики дискретного спектра аппроксимирующей функции в предложенном методе невысоки – коэффициент гармоник паразитного спектра $k_{z,N}$ превышает 5%, а максимальная величина относительной неравномерности основных гармоник приближается к 10%.

В настоящей статье предлагается уточнённый метод аппроксимации, суть которого в следующем:

1) Главные лепестки – отрезки кривых функции (1) на промежутках

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{N} + 2\pi j, \frac{2\pi}{N} + 2\pi j\right), j \in Z, \quad (5)$$

и несколько $k < N-2$ соседних пар полувольт функции (1) (рис. 1) для

$$x \in \left(-\frac{2\pi(i+1)}{N} + 2\pi j, -\frac{2\pi i}{N} + 2\pi j\right) \cup \left[\frac{2\pi i}{N} + 2\pi j, \frac{2\pi(i+1)}{N} + 2\pi j\right), i = 1, \dots, k; j \in Z \quad (6)$$

аппроксимируются произведением гармонических функций

$$\Pi_{N,l} = \cos\left(\frac{Nx}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{Nx}{8}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{Nx}{4 \cdot 2^l}\right) = \prod_{i=0}^l \cos\left(\frac{Nx}{4 \cdot 2^{i+1}}\right). \quad (7)$$

Здесь Z в выражениях (5) и (6) – множество целых чисел, l в выражении (7) – порядок произведения. На интервале (5) функция (3) аппроксимируется с помощью выражения

$$D2_{N,l,k}^{\approx}(x) = (-1)^{j(N+1)} \cdot N \cdot \Pi_{N,l}(x - 2\pi j), \quad (8)$$

а на интервале (6) – с помощью выражения

$$D2_{N,l,k}^{\approx}(x) = \frac{(-1)^{j(N+1)} \cdot D_N(x_{0_{il}})}{\Pi_{N,l}(x_{0_{il}})} \Pi_{N,l}(x - 2\pi j), \quad (9)$$

где $x_{0_{il}}$ – локальный экстремум il -й полувольты.

2) На остальных интервалах:

$$x \in \left(-\frac{2\pi(i+1)}{N} + 2\pi j, -\frac{2\pi i}{N} + 2\pi j\right) \cup \left[\frac{2\pi i}{N} + 2\pi j, \frac{2\pi(i+1)}{N} + 2\pi j\right), i = k+1, \dots, N-2; j \in Z, \quad (10)$$

полином (3) аппроксимируется полуволнами синусоидальной функции

$$D2_{N,l,k}^{\approx}(x) = (-1)^{j(N+1)} \cdot D_N(|x_{0_i}|) \cdot \sin\left(\frac{N(|x-2\pi j|)}{2}\right), x_{0_i} = \frac{\pi(2i+1)}{N}. \quad (11)$$

Общее выражение для аппроксимирующей функции примет вид

$$D2_{N,l,k}^{\approx}(x) = \begin{cases} (-1)^{j(N+1)} \Pi_{N,l}(x_j) N, x_j \in \left(-\frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}\right), \\ \frac{(-1)^{j(N+1)} D_N(x_{0_{il}})}{\Pi_{N,l}(x_{0_{il}})} \Pi_{N,l}(x_j), |x_j| \in \left[\frac{2\pi \cdot il}{N}, \frac{2\pi(i+1)}{N}\right), \\ (-1)^{j(N+1)} D_N\left(|x_{0_{il}}\right| \sin\left|\frac{N \cdot x_j}{2}\right|, |x_j| \in \left[\frac{2\pi \cdot i}{N}, \frac{2\pi(i+1)}{N}\right), \\ x_j = x - 2\pi j, j \in Z, \\ il = 1 \dots k, i = k + 1 \dots \frac{N}{2}, x_{0_{il}} = \frac{\pi(2i+1)}{N}, \\ |x_{0_{il}} - il - \dot{y} \text{ локальный экстремум.} \end{cases} \quad (12)$$

Локальные экстремумы $x_{0_{il}}$ в выражениях (9) и (12) получены следующим способом:

1) Для функции (3) изменён масштаб аргумента в N раз

$$D_N\left(\frac{x}{N}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2N}\right)}, N = 3, 4, \dots \quad (13)$$

Длительность каждой полуволны Δx теперь не зависит от N

$$\Delta x = 2\pi,$$

от N зависит период повторения, а точки локальных экстремумов при разных значениях N , как показал вычислительный эксперимент в программной среде MatchCad, достаточно близки.

2) Выражение для первой производной функции (11) имеет вид

$$\frac{dD_N\left(\frac{x}{N}\right)}{dx} = \frac{N \cos(x) \sin\left(\frac{x}{N}\right) - \sin(x) \cos\left(\frac{x}{N}\right)}{N \sin^2\left(\frac{x}{N}\right)}. \quad (14)$$

3) В программной среде MathCad решено уравнение

$$f(x) = N \cos(x) \sin\left(\frac{x}{N}\right) - \sin(x) \cos\left(\frac{x}{N}\right) = 0 \quad (15)$$

для $il = 1 \dots 3$ для $N = 6 \dots 200$ относительно x , после чего получены корни $X_{0_{il,N}}$. Точность методов решения уравнения (15) такова, что величина абсолютного отклонения производной (14) от нуля не превышает значения 10^{-13} .

4) Соответствующие точки экстремумов не масштабированной функции (3) для каждого N пересчитаны при помощи выражения

$$x_{0_{il,N}} = \frac{2 \cdot X_{0_{il,N}}}{N}. \quad (16)$$

Эксперимент в программной среде MathCad показал, что с ростом порядка про-

изведения l погрешность аппроксимации главного лепестка и нескольких k соседних пар боковых полуволн уменьшается при условии, что k не превышает значения $2^l - 1$, так как для следующих полуволн характеры поведения функции произведения (7) и аппроксимируемой функции (3) существенно различаются. Применение модели (12) при $l > 2$ нецелесообразно, так как потребует непропорционально большего количества аналоговых умножителей при схемотехнической реализации. При $l=2$ и $k=3$ значение относительного, приведённого к N отклонения

$$\Delta_{N,l,k}(x) = \frac{|D2_{N,l,k}^{\approx}(x) - D_N(x)|}{N} \cdot 100\% \quad (17)$$

не превышает 0,4%, что более чем на порядок меньше, чем при аппроксимации предыдущим способом [9].

Меньшее значение погрешности аппроксимации должно снизить степень отличий спектральных свойств аппроксимирующей функции (12) полинома (3). Особый интерес представляют следующие отличительные особенности дискретного спектра модели (12):

- 1) степень неравномерности амплитудного дискретного спектра модели (12) в рабочей области – на частотах, для которых определён спектр полинома (3) или (4);
- 2) отличие от нуля значений фазового спектра для тех же частот;
- 3) количественные характеристики новых “паразитных” гармоник.

Для оценки указанных характеристик необходимо рассчитать дискретный спектр функции (12). Так как полином (3) на промежутках (5), (6) и (10) аппроксимируется функциями разного вида, то определение спектра целесообразно выполнять, придерживаясь следующей последовательности:

- 1) определить выражения спектральных плотностей одиночных аппроксимирующих функций каждого интервала в выражении (12) для множества $x \in (-2\pi, 2\pi)$ – то есть для кривых одного периода колебаний функции (12) при чётных значениях N и для двух периодов при нечётных N ;
- 2) приняв за величину периода повторения одной аппроксимирующей кривой выражения (12)

$$T = 4\pi,$$

определить выражения для комплексных амплитуд гармоник её дискретного спектра как выборки из соответствующего выражения спектральной плотности на частотах, кратных частоте первой гармоники [10]

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}; \quad (18)$$

3) воспользовавшись принципом суперпозиции для каждой гармонической составляющей спектра сложить все полученные выражения для её комплексной амплитуды. Несмотря на то, что для нечётных значений N величина периода T избыточна – действительный период повторения в этом случае в два раза меньше, величины амплитуд “новых” гармоник с частотами $\omega = \omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$ будут равны нулю, и останутся лишь гармоники с частотами, кратными реальной частоте повторения $0.5\omega_1 = 1$.

Итак, определим спектр функции (12).

1) Определение спектра главных лепестков на интервалах

$$x \in \left(-\frac{2\pi}{N} + 4\pi \cdot j, \frac{2\pi}{N} + 4\pi \cdot j\right) \quad (19)$$

и

$$x \in \left(2\pi(2j-1), 2\pi(2j-1) + \frac{2\pi}{N}\right) \cup \left(2\pi(2j+1) - \frac{2\pi}{N}, 2\pi(2j+1)\right), j \in Z. \quad (20)$$

а) Выражение спектральной плотности на промежутке (20) при $j=0$ примет вид

$$S_0(\omega) = 2N \int_0^{\frac{2\pi}{N}} \prod_{i=0}^l \cos\left(\frac{Nx}{4 \cdot 2^i}\right) \cos(\omega x) dx. \quad (21)$$

Произведение (7) представляется конечным рядом Фурье

$$\prod_{i=0}^l \cos\left(\frac{Nx}{4 \cdot 2^i}\right) = \frac{1}{2^l} \sum_{n=1}^{2^l} \cos\left(\frac{(2n-1)Nx}{4 \cdot 2^l}\right). \quad (22)$$

В связи с этим выражение (21) преобразуется к виду

$$S_0(\omega) = \frac{2N}{2^l} \int_0^{\frac{2\pi}{N}} \left\{ \sum_{n=1}^{2^l} \cos\left(\frac{(2n-1)Nx}{4 \cdot 2^l}\right) \cos(\omega x) \right\} dx =$$

$$= 8N \sum_{n=1}^{2^l} \frac{(2n-1)N \sin \frac{(2n-1)\pi}{2^{l+1}} \cos \frac{2\pi\omega}{N} - 2^{l+2} \omega \cos \frac{(2n-1)\pi}{2^{l+1}} \sin \frac{2\pi\omega}{N}}{(2n-1)^2 N^2 - 16 \cdot 2^{2l} \omega^2}. \quad (23)$$

б) Выражение для комплексных амплитуд составляющих дискретного спектра главного лепестка определим, сделав выборки из выражений спектральной плотности (23) для частот, кратных частоте первой гармоники [10]

$$\omega = n\omega_1, n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

и для $\omega = 0$. Для n -й гармоники это выражение примет вид

$$\mathbf{A}'_{0,n} = \frac{2S_0(n\omega_1)}{T} =$$

$$= \frac{4N}{\pi} \sum_{n=1}^{2^l} \frac{(2n'-1)N \sin \frac{(2n'-1)\pi}{2^{l+1}} \cos \frac{\pi n}{N} - n2^{l+1} \cos \frac{(2n'-1)\pi}{2^{l+1}} \sin \frac{\pi n}{N}}{(2n'-1)^2 N^2 - 2^{2l+2} n^2}. \quad (25)$$

Для значений N , кратных 2^{l+1} для гармоник с номерами

$$n < \frac{(2^{l+1}-1)N}{2 \cdot 2^l}$$

найдётся некоторое число p , при котором выполнится равенство

$$n = \frac{(2 \cdot p - 1)N}{2^{l+1}},$$

$$p = 1, \dots, 2^l. \quad (26)$$

Составляющая суммы с номером p в выражении (25) преобразуется к виду

$$\lim_{n \rightarrow \frac{(2 \cdot p - 1)N}{2 \cdot 2^l}} \frac{4N}{\pi} \left\{ \frac{(2p-1)N \sin \frac{(2p-1)\pi}{2^{l+1}} \cos \frac{\pi n}{N}}{(2p-1)^2 N^2 - 2^{2l+2} n^2} - \frac{n2^{l+1} \cos \frac{(2p-1)\pi}{2^{l+1}} \sin \frac{2\pi n}{N}}{(2p-1)^2 N^2 - 2^{2l+2} n^2} \right\} = \frac{1}{2^l} + \frac{N \sin \frac{2\pi n}{N}}{2^{l+1} \pi}, \quad (27)$$

а выражение (25) следующим образом

$$\mathbf{A}'_{0,n} = \frac{4N}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{2^l} \left\{ \frac{(2p-1)N \sin \frac{(2p-1)\pi}{2^{l+1}} \cos \frac{\pi n}{N}}{(2p-1)^2 N^2 - 2^{2l+2} n^2} - \frac{n2^{l+1} \cos \frac{(2p-1)\pi}{2^{l+1}} \sin \frac{2\pi n}{N}}{(2p-1)^2 N^2 - 2^{2l+2} n^2} \right\} + \frac{1}{2^l} + \frac{N \sin \left(\frac{2\pi n}{N}\right)}{2^{l+1} \pi}. \quad (28)$$

Выражение для постоянной составляющей для нечётных N примет вид:

$$\mathbf{A}'_{0,0} = \frac{S_0(0)}{T} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{2^l} \left\{ \frac{\sin \left(\frac{(2n-1)\pi}{2^{l+1}}\right)}{2n-1} \right\}. \quad (29)$$

Для чётных значений N постоянную составляющую аппроксимирующих функций каждого интервала выражения (12) вычислять не имеет смысла, так как функция (12) при этом нечётная и результирующая постоянная составляющая спектра примет нулевое значение.

в) Отрезки главных лепестков на промежутке (20) при $j=0$

$$x \in \left(-2\pi, -2\pi + \frac{2\pi}{N}\right) \cup \left(2\pi - \frac{2\pi}{N}, 2\pi\right). \quad (30)$$

симметричны относительно оси Oy , поэтому их спектральная плотность определится как удвоенная действительная часть спектральной плотности одного из отрезков. Отрезок для левой части промежутка (30) можно получить параллельным переносом половинки лепестка на промежутке $x \in \left(0, \frac{2\pi}{N}\right)$ вдоль оси Ox на -2π . Согласно теореме запаздывания выражение спектральной характеристики для множества (30) примет вид

$$\begin{aligned} S_0^\pm(\omega) &= (-1)^{N+1} \frac{2N}{2^l} e^{-2\pi\omega} \sum_{n=1}^{2^l} \int_0^{\frac{2\pi}{N}} \cos\left(\frac{(2n'-1)Nx}{4 \cdot 2^l}\right) \cos(ax) dx = \\ &= 8N(-1)^{N+1} \sum_{n=1}^{2^l} \left\{ \frac{(2n'-1)N \sin\left(\left(\frac{(2n'-1)}{2^{l+1}} - 2\omega\right)\pi\right) \cos\frac{2\pi\omega}{N}}{(2n'-1)^2 N^2 - 16 \cdot 2^{2l} \omega^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2^{l+2} \omega \sin(2\pi\omega) - 2^{l+2} \omega \cos\left(\left(\frac{(2n'-1)}{2^{l+1}} - 2\omega\right)\pi\right) \sin\frac{2\pi\omega}{N}}{(2n'-1)^2 N^2 - 16 \cdot 2^{2l} \omega^2} \right\}. \quad (31) \end{aligned}$$

г) Выражения составляющих дискретного спектра на интервалах (20):

- для комплексной амплитуды n -й гармоники

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,n}^\pm &= \frac{2S_0^\pm(n\omega_1)}{T} = (-1)^{N+n+1} \frac{4N}{\pi} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{2^l} \left(\frac{(2n'-1)N \sin\left(\frac{(2n'-1)\pi}{2^{l+1}}\right) \cos\frac{\pi n}{N}}{(2n'-1)^2 N^2 - 2^{2l+2} n^2} - \right. \\ &\left. - \frac{n2^{l+1} \cos\left(\frac{(2n'-1)\pi}{2^{l+1}}\right) \sin\frac{\pi n}{N}}{(2n'-1)^2 N^2 - 2^{2l+2} n^2} \right) = (-1)^{N+n+1} \mathbf{A}'_{0,n}. \quad (32) \end{aligned}$$

- для постоянной составляющей для нечётных значений N :

$$\mathbf{A}_{0,0}^\pm = \frac{S_0^\pm(0)}{T} = (-1)^{N+1} \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{2^l} \frac{\sin\left(\frac{(2n'-1)\pi}{2^{l+1}}\right)}{2n'-1} = \mathbf{A}'_{0,0}, \quad (33)$$

д) Выражения для составляющих суммарного спектра лепестков:

- для постоянной составляющей для нечётных значений N :

$$\mathbf{A}_{0,0} = \mathbf{A}'_{0,0} + \mathbf{A}_{0,0}^\pm = \left(1 - (-1)^N\right) \mathbf{A}'_{0,0} = 2 \cdot \mathbf{A}'_{0,0}; \quad (34)$$

- для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$\mathbf{A}_{0,n} = \mathbf{A}'_{0,n} + \mathbf{A}_{0,n}^\pm = \left(1 - (-1)^{N+n}\right) \mathbf{A}'_{0,n}. \quad (35)$$

2) Определение спектральной характеристики отрезков функции (12) на промежутках

$$\begin{aligned} x \in \left(-\frac{2\pi(i+1)}{N} + 4\pi \cdot j, -\frac{2\pi i}{N} + 4\pi \cdot j\right) \cup \\ \cup \left[\frac{2\pi i}{N} + 4\pi \cdot j, \frac{2\pi(i+1)}{N} + 4\pi \cdot j\right), \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \left(-2\pi(1-2j) + \frac{2\pi i}{N}, -2\pi(1-2j) + \frac{2\pi(i+1)}{N}\right) \cup \\ \cup \left[2\pi(1+2j) - \frac{2\pi(i+1)}{N}, 2\pi(1+2j) - \frac{2\pi i}{N}\right), i=1 \dots k. \quad (37) \end{aligned}$$

а) Выражение спектральной плотности на интервале (36) при $j=0$ имеет вид

$$\begin{aligned} S_{i1}(\omega) &= \frac{2|D_N(x_{0_{i1}})|^{\frac{2\pi}{N}(i+1)}}{\Pi_{N,j}(x_{0_{i1}})} \int_{\frac{2\pi}{N}i}^{\frac{2\pi}{N}(i+1)} \Pi_{N,j}(x) \cos(ax) dx = \frac{8|D_N(x_{0_{i1}})|}{\Pi_{N,j}(x_{0_{i1}})} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{2^l} \left\{ \frac{\cos\left(\left(\frac{2n'-1}{2^{l+2}} + \frac{\omega}{N}\right)\pi(2i+1)\right) \sin\left(\left(\frac{2n'-1}{2^{l+2}} + \frac{\omega}{N}\right)\pi\right)}{(2n'-1)N + 4 \cdot 2^l \omega} + \right. \\ &\left. + \frac{\cos\left(\left(\frac{2n'-1}{2^{l+2}} - \frac{\omega}{N}\right)\pi(2i+1)\right) \sin\left(\left(\frac{2n'-1}{2^{l+2}} - \frac{\omega}{N}\right)\pi\right)}{(2n'-1)N - 4 \cdot 2^l \omega} \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

б) Выражения составляющих дискретного спектра на интервалах (36):

- для постоянной составляющей для нечётных N :

$$\mathbf{A}'_{i1,0} = \frac{S_{i1}(0)}{T} = \frac{4 \cdot |D_N(x_{0_{i1}})|}{\pi N \cdot \Pi_{N,j}(x_{0_{i1}})} \sum_{n=1}^{2^l} \frac{\cos\left(\frac{(2i+1)(2n'-1)\pi}{2^{l+2}}\right) \sin\frac{(2n'-1)\pi}{2^{l+2}}}{2n'-1}; \quad (39)$$

- для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$\mathbf{A}'_{i1,n} = \frac{2S_{i1}(n\omega_1)}{T} = \frac{4|D_N(x_{0_{i1}})|}{\pi \Pi_{N,j}(x_{0_{i1}})} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{2^l} \left\{ \frac{\cos\left(\left(\frac{2n'-1}{2 \cdot 2^l} + \frac{n}{N}\right) \frac{\pi(2 \cdot i+1)}{2}\right) \sin\left(\left(\frac{2n'-1}{2 \cdot 2^l} + \frac{n}{N}\right) \frac{\pi}{2}\right)}{(2n'-1)N + 2^{l+1} n} + \frac{\cos\left(\left(\frac{2n'-1}{2 \cdot 2^l} - \frac{n}{N}\right) \frac{\pi(2 \cdot i+1)}{2}\right) \sin\left(\left(\frac{2n'-1}{2 \cdot 2^l} - \frac{n}{N}\right) \frac{\pi}{2}\right)}{(2n'-1)N - 2^{l+1} n} \right\}. \quad (40)$$

Для N , кратных 2^{l+1} , для гармоник с номерами n , удовлетворяющих условию (26), после определения предела для соответствующих членов суммы в выражении (40), преобразуем выражение (40) к виду

$$\mathbf{A}'_{i,n} \Big|_{n=\frac{(2p-1)N}{2 \cdot 2^l}} = \left(\frac{\cos \frac{\pi(2i+1)n}{N} \sin \frac{\pi n}{N}}{2^{l+2} n} + \frac{\pi}{2^{l+2} N} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{2^l} \left\{ \frac{\cos\left(\left(\frac{2n'-1}{2 \cdot 2^l} + \frac{n}{N}\right) \frac{\pi(2 \cdot i+1)}{2}\right) \sin\left(\left(\frac{2n'-1}{2 \cdot 2^l} + \frac{n}{N}\right) \frac{\pi}{2}\right)}{(2n'-1)N + 2^{l+1} \cdot n} + \frac{\cos\left(\left(\frac{2n'-1}{2 \cdot 2^l} - \frac{n}{N}\right) \frac{\pi(2 \cdot i+1)}{2}\right) \sin\left(\left(\frac{2n'-1}{2 \cdot 2^l} - \frac{n}{N}\right) \frac{\pi}{2}\right)}{(2n'-1)N - 2^{l+1} \cdot n} \right\} \right) \frac{4|D_N(x_{0_{il}})|}{\pi \Pi_{N,l}(x_{0_{il}})}, \quad (41)$$

где p удовлетворяет условию (26).

в) Отрезки кривых модели (12) для множества (37) симметричны оси Oy и их можно получить аналогичным параллельным переносом, что и отрезки кривых на множестве (20). Поэтому выражения для составляющих дискретного спектра множеств (36) и (37) будут обладать свойством, аналогичным свойствам (19) и (20):

- для постоянной составляющей для нечётных значений N :

$$\mathbf{A}'_{i,0} = (1 - (-1)^N) \mathbf{A}'_{i,0} = 2\mathbf{A}'_{i,0} \quad (42)$$

- для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$\mathbf{A}'_{i,n} = (1 - (-1)^{N+n}) \mathbf{A}'_{i,n}. \quad (43)$$

Показанное свойство справедливо и для спектральной функции всех остальных отрезков аппроксимирующей модели (12).

3) Определение спектральной характеристики отрезков функции (12) на промежутках

$$x \in \left(-\frac{2\pi(i+1)}{N} + 4\pi \cdot j, -\frac{2\pi i}{N} + 4\pi \cdot j \right) \cup \left(\frac{2\pi i}{N} + 4\pi \cdot j, \frac{2\pi(i+1)}{N} + 4\pi \cdot j \right) \quad (44)$$

$$x \in \left(-2\pi(1-2j) + \frac{2\pi i}{N}, -2\pi(1-2j) + \frac{2\pi(i+1)}{N} \right) \cup \left(2\pi(1+2j) - \frac{2\pi(i+1)}{N}, 2\pi(1+2j) - \frac{2\pi i}{N} \right), j \in Z, \quad (45)$$

где

$$i = \begin{cases} 1, \dots, (0.5N - 1) & \text{при чётных } N, \\ 1, \dots, (0.5(N-1) - 1) & \text{при нечётных } N. \end{cases}$$

а) Выражение спектральной плотности на интервале (45) при $j=0$

$$S_i(\omega) = 2D_N(x_{0_i}) \int_{-\frac{2\pi i}{N}}^{\frac{2\pi(i+1)}{N}} \sin\left(\frac{N\omega}{2}\right) \cos(\omega x) dx = (-1)^i 8D_N(x_{0_i}) N \frac{\cos \frac{(2i+1)\pi\omega}{N} \cos \frac{\pi\omega}{N}}{N^2 - 4\omega^2}. \quad (46)$$

При $\omega=0.5N$ спектральная плотность примет значение

$$S_i\left(\omega = \frac{N}{2}\right) = (-1)^i |D_N(x_{0_i})| 8N \lim_{\omega \rightarrow \frac{N}{2}} \frac{\cos \frac{\pi\omega(2i+1)}{N} \cos \frac{\pi\omega}{N}}{N^2 - 4\omega^2} = 0. \quad (47)$$

б) Выражения для составляющих дискретного спектра на интервале (45):

- для постоянной составляющей при нечётных значениях N :

$$\mathbf{A}'_{i,0} = \frac{S_i(0)}{T} = \frac{(-1)^i 2|D_N(x_{0_i})|_N}{\pi N^2} = \frac{(-1)^i 2|D_N(x_{0_i})|}{\pi N}, \quad (48)$$

- для комплексной амплитуды n -ой гармоники:

$$\mathbf{A}'_{i,n} = \frac{S_i(n\omega_1)}{T} = \frac{(-1)^i 4|D_N(x_{0_i})|_N \cos \frac{(2i+1)\pi n}{2N} \cos \frac{\pi n}{2N}}{\pi(N^2 - n^2)}, \quad (49)$$

- для гармоники с номером $n=N$:

$$\mathbf{A}'_{i,N} = 0. \quad (50)$$

в) По аналогии с выражениями (34)-(35) и (42)-(43) выражения для составляющих суммарного дискретного спектра i -ых полу-волн на интервалах (44) и (45) примут вид:

- для постоянной составляющей при нечётных N :

$$\mathbf{A}_{i,0} = (1 - (-1)^N) \mathbf{A}'_{i,0} = 2\mathbf{A}'_{i,0}; \quad (51)$$

- для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$\mathbf{A}_{i,n} = (1 - (-1)^{N+n}) \mathbf{A}'_{i,n}; \quad (52)$$

- для составляющей с номером $n=N$:

$$\mathbf{A}_{i,N} = 0. \quad (53)$$

4) Спектральная характеристика “хвостов” - отрезков кривых функции (12) для нечётных значений N на интервалах

$$x \in \left(-\pi + 4\pi \cdot j, -\pi + \frac{\pi}{N} + 4\pi \cdot j\right] \cup \left[\pi - \frac{\pi}{N} + 4\pi \cdot j, \pi + 4\pi \cdot j\right) \quad (54)$$

и

$$x \in \left(-\pi(1-4j) - \frac{\pi}{N}, -\pi(1-4j)\right] \cup \left[\pi(1+4j); \pi(1+4j) + \frac{\pi}{N}\right), j \in Z. \quad (55)$$

а) Спектральная плотность пары “хвостов” на интервале (55) при $j=0$:

$$S_k(\omega) = 2 \cdot \int_{\pi - \frac{\pi}{N}}^{\pi} \sin\left(\frac{Nx}{2}\right) e^{-j\omega x} dx = 4 \cdot (-1)^{0.5(N+1)} \cdot \frac{2\omega \sin(\pi\omega) - N \cos(\pi\omega - \frac{\pi\omega}{N})}{N^2 - 4\omega^2}, \quad (56)$$

где $k = 0.5(N-1)$.

При $\omega = 0.5N$

$$S_k\left(\omega = \frac{N}{2}\right) = \frac{2}{N}. \quad (57)$$

б) Выражения для составляющих дискретного спектра на множестве (54):

- для постоянной составляющей при нечётных значениях N :

$$\mathbf{A}'_{k,0} = \frac{S_k(0)}{T} = \frac{-(-1)^{0.5(N+1)} N}{\pi N^2} = \frac{(-1)^{0.5(N-1)}}{\pi N}; \quad (58)$$

- для комплексной амплитуды n -ой гармоники

$$\mathbf{A}'_{k,n} = \frac{2S_k(n\omega_1)}{T} = 2(-1)^{0.5(N+1)} \frac{n \cdot \sin \frac{\pi n}{2} - N \cos \frac{\pi n(N-1)}{2N}}{\pi(N^2 - n^2)}; \quad (59)$$

- для гармоники с номером $n=N$:

$$\mathbf{A}'_{k,N} = \frac{1}{\pi N}. \quad (60)$$

в) Выражения для составляющих суммарного спектра на множестве (54)-(55):

- для постоянной составляющей для нечётных значений N :

$$\mathbf{A}_{k,0} = 2\mathbf{A}'_{k,0}; \quad (61)$$

- для комплексной амплитуды n -й гармоники:

$$\mathbf{A}_{k,n} = (1 - (-1)^{N+n}) \mathbf{A}'_{k,n} = (1 + (-1)^n) \mathbf{A}'_{k,n}; \quad (62)$$

- для составляющей с номером $n=N$:

$$\mathbf{A}_{k,N} = 0. \quad (63)$$

5) Выражения составляющих общего дискретного спектра функции (12):

а) Для постоянной составляющей:

- для чётных значений N :

$$\mathbf{A}_0 = 0;$$

- для постоянной составляющей при нечётных значениях N :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{0,0} + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_{i,0} + \sum_{i=k+1}^{0.5(N-1)-1} \mathbf{A}_{i,0} + \mathbf{A}_{k,0}. \quad (64)$$

б) Для комплексной амплитуды n -й гармоники

- при чётных значениях N для $n \neq N$:

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{0,n} + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_{i,n} + \sum_{i=k+1}^{0.5N-1} \mathbf{A}_{i,n}; \quad (65)$$

- при нечётных значениях N для $n \neq N$:

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{0,n} + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_{i,n} + \sum_{i=k+1}^{0.5(N-1)-1} \mathbf{A}_{i,n} + \mathbf{A}_{0.5(N-1),n}; \quad (66)$$

- при нечётных значениях N для гармоники с номером $n=N$:

$$\mathbf{A}_N = 0. \quad (67)$$

По графикам полученного амплитудного (рис. 3,а,в) и фазового (рис. 3,б,г, где $\phi_n = \arg(\mathbf{A}_n)$) спектров для чётных и нечётных значений N видим:

1) появление в спектре функции (12) паразитных гармоник;

2) искажение равномерности основного амплитудного спектра;

3) фазовый спектр принимает два значения – 0 и 180 градусов, причём в рабочей полосе частот фазовый спектр нулевой.

Вклад паразитных гармоник определён выражением для коэффициента гармоник

$$k_{z,N} = \sqrt{\frac{0.5 \sum_{n=N+1}^{kN-N} A_n^2}{A_0^2 + 0.5 \sum_{n=1}^N A_n^2}} \cdot 100. \quad (68)$$

Так как в рабочей области значения амплитудного спектра модели (12) колеблется относительно значения $Am=2$ – значения

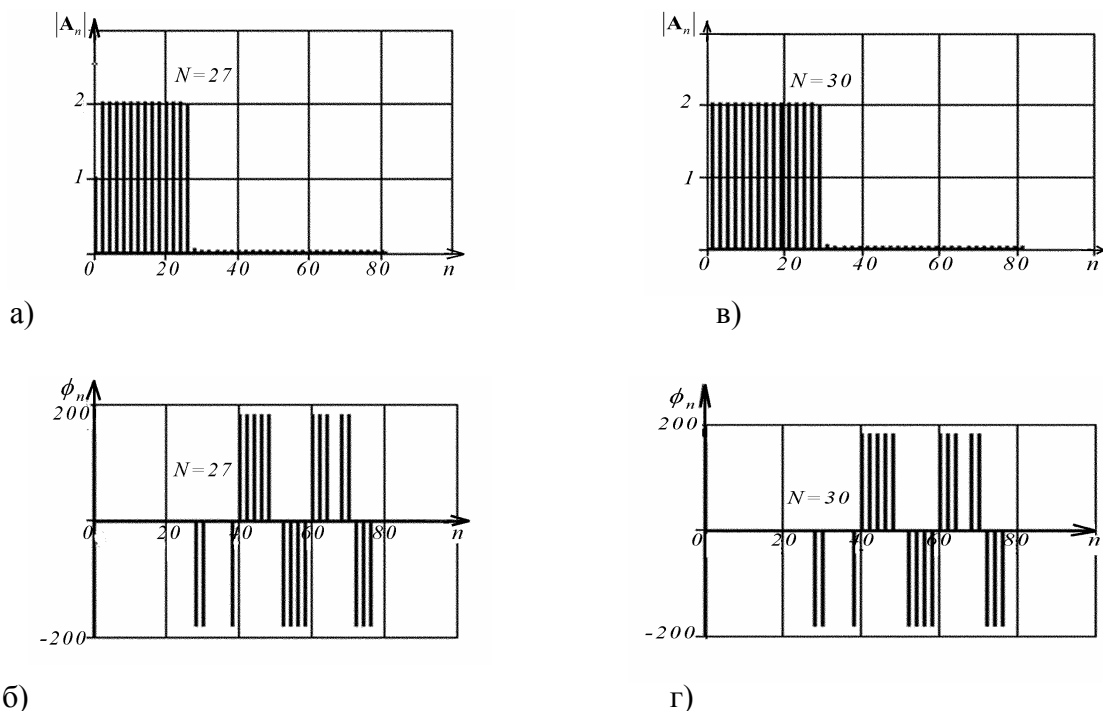


Рис. 3. Графики амплитудного (рис. 3,а,в) и фазового (рис. 3,б,г, где $\phi_n = \arg(A_n)$) спектров

амплитуд косинусоидального спектра полинома (4), то неравномерность предлагается оценивать с помощью выражения

$$\Delta_{\max, N} = \begin{cases} \max_{n=2,4,\dots,N-1} \left(\frac{|A_n - A_m|}{A_m} \cdot 100 \right) \text{ при нечётных } N, \\ \max_{n=1,3,\dots,N-1} \left(\frac{|A_n - A_m|}{A_m} \cdot 100 \right) \text{ при чётных } N. \end{cases} \quad (69)$$

Указанные характеристики просчитаны в среде MathCad для $N=10, \dots, 200$ при $l=2, k=3$ и для $N=6, \dots, 200$ при $l=1, k=1$. Расчеты показали, что величина коэффициента гармоник паразитного спектра не превышает значения 0.6%, а степень неравномерности - 2,2%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. А.с. 1762269 СССР, кл. 5G01R27/28. Устройство для контроля амплитудно-фазочастотных характеристик / К.П. Чухриенко, С.Г. Лукаш, Б.Н. Кучер. Оpubл. 1992, Бюл. №34.
2. Прибор для исследования амплитудно-частотных характеристик Х1-41 // Техническое описание и инструкция по эксплуатации. 1982.
3. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов по специальности "Радиотехника". – М.: Высшая школа, 2000.
4. А.с. 1712898 СССР, кл. 5G01R27/28. Способ определения частотных характеристик измерительных каналов информационно-измерительных систем / А.А. Плавильщиков. – Оpubл. 1992, Бюл. №6.
5. А.с. 1800625 РФ, кл. 5H04B3/46. Устройство для контроля амплитудно-частотной характеристики четырёхполюсников / А.Н. Бабкин, П.А. Попов. Оpubл. 1993, Бюл. №9.
6. А.с. 1791784 РФ, кл. 5G01R23/14. Способ определения коэффициента передачи четырёхполюсника и устройство для его осуществления / В.Б. Ветров, Б.Г. Гольдштейн, В.И. Миркин, З.С. Якунина. Оpubл. 1993, Бюл. №4.
7. А.с. 1832360 РФ, кл. 5H03B19/00. Формирователь многочастотного сигнала / М.Я. Минц, В.Н. Чинков, Ю.А. Немшилов, А.Л. Савицкий, А.В. Гуров – Оpubл. 1993, Бюл. №29.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы: Пер. с англ. Н.В. Леви / Под ред. К.А. Семендяева. - М.: Наука, 1977. - 244с.
9. *Фролов С.С.* Способы реализации равноамплитудных полиномов. // Материалы

всероссийской научно-практической конференции “Современные информационные технологии в науке, образовании и практике”. Оренбург, 2004г.

10. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. Часть 1. Сигналы. Линейные системы с постоянными и переменными параметрами. М.: “Советское радио”, 1966.

REVISION METHOD TO APROXIMATION MULTINOMIAL WITH EQUAL AMPLITUDE

© 2006 S.S. Frolov, V.D. Shevelenko, A.A. Gusarov

Orenburg State University

In work shown the low efficiency of the using the modern generator of measuring signals for measurement of the frequency features in the field of infra low frequencies. It is offered to using signal on base of the trigonometric multinomial with even discrete spectrum and method to his aproximations. The are received analytical expressions of the discrete harmonic spectrum of approximating function. Is offered method of the estimation of inaccuracy of the approximation in the manner of ratio of the harmonicas of the stray spectrum and unevenness of amplitudes spectrum in workspace of frequencys.