УДК 621.396.45

ОЦЕНКА ИНФОРМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

© 2007 С.В. Воронцов, Н.Е. Конюхов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассмотрены информационные возможности амплитудно-модулированного сигнала. Получена математическая модель амплитудно-модулированного сигнала, основанная на энтропийном подходе. Сделан вывод о том, что количество информации, переносимой сигналом, определяется как разность значений энтропий без модуляции и с модуляцией. Полученные результаты позволяют сравнить информационные возможности различных типов модуляции и выбрать оптимальный вариант.

Энтропийный подход к анализу возможностей и ограничений технических средств позволяет получать оценки их свойств инвариантные к аппаратной реализации, что делает такие оценки достаточно фундаментальными.

Рассмотрим информационные возможности амплитудно-модулированного (АМ) сигнала. Модулированный сигнал является произведением несущего колебания

$$U_H(t) = U_H \cdot \sin\omega i$$

и модулирующего колебания

$$U_M(t) = U_M \cdot \sin\left(\frac{t}{n}\right) = K_M \cdot U_H \cdot \sin\left(\frac{t}{n}\right),$$

где n – кратность частот несущего и модулирующего сигналов; K_M =0..1 – коэффициент модуляции.

Энтропия синусоидального несущего сигнала равна:

$$H_H(U) = \ln(\pi n_H/2).$$

Средняя (на периоде модулирующего колебания) энтропия амплитудно-модулированного сигнала:

$$H_{AM} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\ln\left\{\pi U_H/2\left[1+K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot p\right)\right]\right\}, \quad (1)$$

где p – номер периода несущего колебания внутри периода модулирующего сигнала.

Уравнение (1) можно представить следующим образом:

$$H_{AM} = \ln(\pi U_H/2) + H_M, \quad (2)$$

$$H_M = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\ln\left[1+K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot p\right)\right]. \quad (3)$$

Уравнение (3) запишем в виде ряда Тейлора:

$$H_M = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{g=1}^{\infty}(-1)^{g-1}\cdot\frac{\left[K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot p\right)\right]}{g}. \quad (4)$$

Ряд (4), сходящийся, т.к. для этого знакочередующегося ряда выполняется признак Лейбница ($K_M \le 1$):

$$\frac{\left[K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot p\right)\right]^g}{g} \ge \frac{\left[K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot p\right)\right]^{g+1}}{g+1}.$$

Если ограничить число членов ряда (4) значением b, то модуль остатка ряда:

$$|R_b| \le \frac{\left[K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\cdot p\right)\right]^{b+1}}{b+1}.$$

Максимальное значение $|R_b|$ имеет место при p/n = 0,25

$$\max\ |R_b| \le (K_M)^{b+1}/b+1.$$

Если max $|R_b|$ будет в ε раз меньше, чем первый член ряда (4), то минимальное значение числа “b” соответствует условию (2):

$$(\min b) + 1 = \varepsilon \cdot K_M^{(\min b)}.$$

При $\varepsilon = 100$ и $K_M \le 0{,}4$, получим (min b) ≤ 4.

Более точно это значение можно определить с помощью вычисления частичной суммы ряда (4) вместо первого члена.

Тогда выполнится следующее условие:

$$\max|R_b| \le \frac{1}{\varepsilon}\left[K_M - \frac{K_M^2}{2} + \frac{K_M^3}{3} - \frac{K_M^4}{4}\right]. \quad (5)$$

Уточнение с помощью уравнения (5), сохраняет значение (min b) ≤ 4

Следовательно, с погрешностью, не превышающей 1%,

$$H_M = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}p\right) - \frac{1}{2n}\sum_{p=1}^{n}\left[K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 + \frac{1}{3n}\sum_{p=1}^{n}\left[K_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^{3^4}. \qquad (6)$$

Для суммирования рядов, входящих в (6), представим тригонометрическую часть этих рядов в комплексной форме [2]:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}p\right) = I_m (e^{\frac{j2\pi}{n}})^p = I_m Z^P,$$

где $Z = e^{\frac{j2\pi}{n}}$.

При этом первый ряд из уравнения (6) будет иметь вид:

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} K_M \sin\left(\frac{2\pi}{n}p\right) = \frac{K_M}{n} \cdot I_m\left(\sum_{p=1}^{n} Z^p\right). \qquad (7)$$

Понятно, что уравнение (7) представляет собой геометрическую прогрессию.

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} K_M \sin\left(\frac{\pi}{n}p\right) = \frac{K_M}{n} \cdot I_m\left[\frac{Z(Z^n - 1)}{Z-1}\right]. \qquad (8)$$

В последнем уравнении сомножитель $(Z^n\text{-}1)$ равен:

$$Z^n - 1 = e^{j2\pi} - 1 = \cos 2\pi + j\sin 2\pi - 1 = 0,$$

а отношение Z(/Z – 1) преобразуется следующим образом:

$$\frac{Z}{Z-1} = \frac{1-\cos(2\pi/n) - j\sin(2\pi/n)}{2[1-\cos(2\pi/n)]}. \qquad (9)$$

Преобразуем мнимую часть уравнения (9)

$$\frac{-\sin(2\pi/n)}{2[1-\cos(2\pi/n)]} = -\frac{1}{2}ctg(2\pi/n)$$

и получим, что сумма первого ряда в уравнении (6) равна 0.

Второй ряд из уравнения (6) преобразуется аналогичным образом:

$$\frac{1}{2n}\sum_{p=1}^{n}\left[K_M \sin\left(\frac{2\pi}{n}p\right)\right]^2 = \frac{K_M^{\ 2}}{4n}\left\{n - \mathrm{Re}\left[\frac{Z^2(Z^{2n}-1)}{Z^2-1}\right]\right\},$$

где

$$Z^{2n} - 1 = \cos(4p) + j\sin(4p) - 1 = 0$$

и, следовательно:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\left[K_M \sin(2\pi/n \cdot p)\right]^2 = \frac{K_M^{\ 2}}{4}.$$

Преобразуя подобным образом третью и четвертую части уравнения (6), окончательно получим:

$$H_M = -\frac{K_M^{\ 2}}{4} - \frac{3K_M^{\ 4}}{32} \approx -\frac{K_M^{\ 2}}{4}\left[1 + \frac{3}{8}K_M^{\ 2}\right]. \qquad (10)$$

Значения H_M, рассчитанные по последней формуле, представлены в графической форме на рис. 1 , из которого видно, что зависимость H_M от K_M близка к квадратичной и может быть аппроксимирована с погрешностью не более ±2% выражением:

$$H_M \approx -0{,}255 \cdot K_M^{\ 2}.$$

Количество информации, переносимое сигналом, определяется как разность значений энтропий без модуляции и с модуляцией [1].

Поэтому количество информации, переносимое амплитудно-модулированным сигналом $I_{AM} = - H_M$.

Следует отметить, что соотношение (10) не зависит от кратности частот несущего и модулирующего сигналов "n", что позволя-

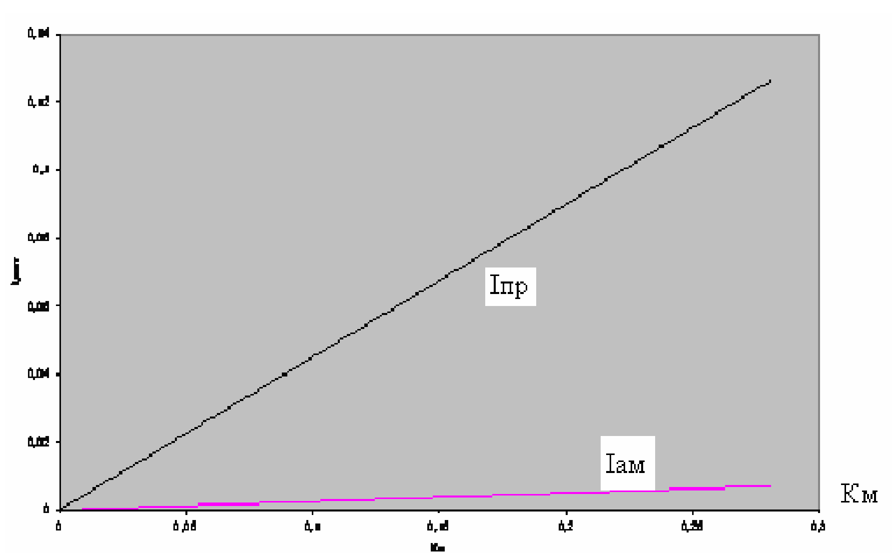

Рис. 1. Зависимость энтропии от коэффициента модуляции

ет применить полученные результаты для различных амплитудно-модулированных сигналов при любых значениях "n" .

Полученные результаты позволяют сравнить информационные возможности различных типов модуляции и объективно осуществлять выбор оптимального варианта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Электрические измерения неэлектрических величин. Изд. 5-е, перераб. и доп. Л., Энергия, 1975.
2. *Демель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир. 2000.

INFORMATIVE POSSIBILITY VALUATION OF AMPLITUDE- MODULATED OSCILLATIONS

 S.V. Vorontsov, N.E. Konyuhov

Samara State Aerospace University

Informative possibility of amplitude-modulated signal has been considered. Numerically simulated model based on the entropy method has been done. Quantity of information define like difference between entropy without modulation value and entropy with modulation value. The findings allow to compare informative possibility of several kind modulations and select optimal one.