УДК 517.958:534

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ В ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

© 2007 В.И. Астафьев[1], А.Б. Прокофьев[2], Е.В. Шахматов[2]

[1] Самарский государственный университет
[2] Самарский государственный аэрокосмический университет

Представлена математическая модель для расчета собственных частот и форм колебаний жидкости (газа) в сечении канала прямоугольной формы при формулировании краевых условий в общем виде. Рассмотрены частные случаи краевых условий: абсолютно жесткие стенки канала и упругие стенки канала. Приведены некоторые результаты моделирования на основе разработанной математической модели.

В настоящее время большое распространение получили численные методы анализа собственных частот и форм колебаний, что обусловлено высокой производительностью вычислительной техники. Однако наиболее общие закономерности изучаемых явлений позволяют выявить лишь аналитические методы, предоставляющие возможность получить решение задачи в общем виде. В настоящей работе предложена аналитическая модель для расчета собственных форм и частот колебаний жидкости в прямоугольном канале в двухмерной постановке.

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости (или газе) в двухмерном случае описывается волновым уравнением [1]:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где c – скорость звука в среде.

Геометрия области представлена на рис. 1. Жидкость ограничена прямоугольными границами с координатами $x=\pm a$ и $y=\pm b$, краевые условия на которых записываются в общем виде:

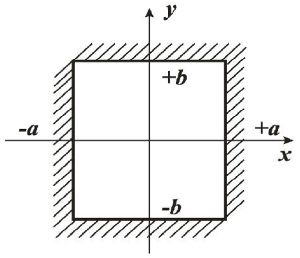

Рис. 1. Геометрия решаемой задачи

$$\left.\begin{aligned} &k_1^{\pm}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+k_2^{\pm}\varphi=0 \ \text{при}\ x=\pm a,\ -b<y<b,\\ &l_1^{\pm}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+l_2^{\pm}\varphi=0 \ \text{при}\ y=\pm b,\ -a<x<a. \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где $k_1^{\pm}(y)$, $k_2^{\pm}(y)$, $l_1^{\pm}(x)$, $l_2^{\pm}(x)$ – заданные величины, $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости, т.е. $v_x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v_y=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$.

Решение задачи будем искать в виде:

$$\varphi(x,y,t)=\varphi_0(x,y)e^{j\omega t},$$

где ω – собственная частота системы;

$\varphi_0(x,y)$ – собственная форма колебаний системы.

Воспользуемся одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными – методом разделения переменных (методом Фурье) [2]. Собственные формы колебаний будем искать в виде произведения

$$\varphi_0(x,y)=X(x)\cdot Y(y), \qquad (3)$$

где $X(x)=a_1\cos\alpha x+a_2\sin\alpha x$, $\qquad (4)$

$$Y(y)=b_1\cos\beta y+b_2\sin\beta y, \qquad (5)$$

a_1, a_2, b_1, b_2, α β - неизвестные искомые величины.

Из (4) и (5) получаем:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\alpha^2 X(x). \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=-\beta^2 Y(y). \qquad (7)$$

Подставляя (3) - (7) в уравнение (1), после преобразований получим:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \qquad (8)$$

Таким образом, мы получили соотношение, связывающее собственную частоту колебаний ww с параметрами α и β, определяемыми собственными формами колебаний.

Вернемся к рассмотрению краевых условий. При этом рассмотрим только краевые условия на границе $x = \pm a$, поскольку все преобразования для $y = \pm b$ будут аналогичны.

Краевые условия при $x = \pm a$ с учетом (4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &k_1^{\pm}\left(\mp a_1\alpha \sin \alpha a + a_2\alpha \cos \alpha a\right) + \\ &+ k_2^{\pm}\left(a_1 \cos \alpha a \pm a_2 \sin \alpha a\right) = 0 \end{aligned}. \qquad (9)$$

Умножим (9) на a и обозначим $M = \alpha a$.

Тогда после преобразований можно записать:

$$\begin{aligned} &a_1\left(\mp k_1^{\pm} M \sin M + k_2^{\pm} a \cos M\right) + \\ &+ a_2\left(k_1^{\pm} M \cos M \pm k_2^{\pm} a \sin M\right) = 0 \end{aligned}.$$

Последнюю систему уравнений можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned} A_{11}a_1 + A_{12}a_2 = 0, \\ A_{21}a_1 + A_{22}a_2 = 0; \end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= -k_1^{+} M \sin M + k_2^{+} a \cos M, \\ A_{12} &= k_1^{+} M \cos M + k_2^{+} a \sin M, \\ A_{21} &= k_1^{-} M \sin M + k_2^{-} a \cos M, \\ A_{22} &= k_1^{-} M \cos M - k_2^{-} a \sin M. \end{aligned}\right\}, \qquad (11)$$

Система двух однородных уравнений (10) для двух неизвестных a_1 и a_2 имеет ненулевое решение если

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

При этом одно из уравнений является следствием другого. Система сводится к одному уравнению и имеет бесчисленное множество решений, содержащихся в формуле:

$$a_2 = -a_1 \frac{A_{11}}{A_{12}} = -a_1 \frac{A_{21}}{A_{22}} \text{ (если } A_{12}A_{22} \neq 0\text{)}, \qquad (13)$$

или

$$a_1 = -a_2 \frac{A_{12}}{A_{11}} = -a_2 \frac{A_{22}}{A_{21}} \text{ (если } A_{11}A_{21} \neq 0\text{)}. \qquad (14)$$

Вернемся к выражению (12). Из него следует, что

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 0. \qquad (15)$$

Подставим в (15) выражения (11). После преобразований получим:

$$tg(2M) = \frac{k_1^{-}k_2^{+} - k_1^{+}k_2^{-}}{k_1^{+}k_1^{-}M^2 + k_2^{-}k_2^{+}a^2} aM. \qquad (16)$$

Из уравнения (16) можно найти неизвестную переменную α, определяющую распределение потенциала скорости в направлении x при собственных колебаниях жидкости в прямоугольной области. Уравнение (16) имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых соответствует своей собственной форме колебаний. На рис. 2 графически показано нахождение решений уравнения (16). Аналитическое решение этого уравнения в общем случае не представляется возможным, поэтому для нахождения параметра α, соответствующего собственным формам колебаний, целесообразно использовать численные методы.

Проводя аналогичные преобразования для краевых условий $y = \pm b$, можно получить:

$$tg(2N) = \frac{l_1^{-}l_2^{+} - l_1^{+}l_2^{-}}{l_1^{+}l_1^{-}N^2 + l_2^{-}l_2^{+}b^2} bN, \qquad (17)$$

где $N = \beta b$.

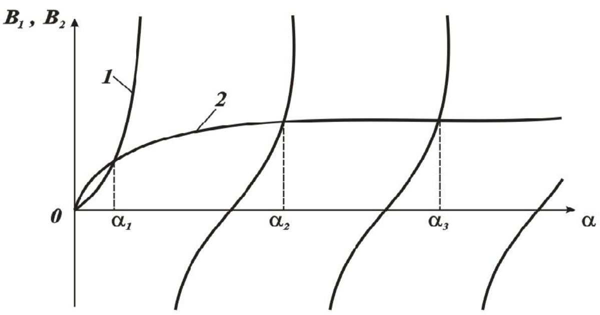

Рис. 2. Графическое нахождение решений уравнения (16):

1 – $B_1 = tg(2M)$;

2 – $B_2 = \dfrac{k_1^{-}k_2^{+} - k_1^{+}k_2^{-}}{k_1^{+}k_1^{-}M^2 + k_2^{-}k_2^{+}a^2} aM$.

Таким образом, решив уравнения (16) и (17) при заданных $k_1^{\pm}$, $k_2^{\pm}$ и $l_1^{\pm}$, $l_2^{\pm}$, можно найти собственные формы колебаний и поле потенциала скорости (с использованием выражений (3) и (4)), а после подстановки найденных значений α и β в (8) нетрудно определить соответствующую собственную частоту колебаний:

$$\omega = c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,.$$

Собственные формы и частоты колебаний складываются из любой комбинации решений уравнений (16) и (17). Порядковый номер решения любого из этих уравнений определяет число узловых линий в соответствующем направлении.

Так, для первого решения уравнения (16) (тривиальное нулевое решение здесь и в дальнейшем рассматривать не будем) узловых линий в направлении оси y (вертикальных) нет, для следующего (второго) решения на поле распределения потенциала скорости появится одна узловая линия; для третьего решения – две узловые линии и т. д. Аналогичная ситуация будет наблюдаться и для решения уравнения (17). Однако в этом случае узловые линии будут располагаться горизонтально (в направлении оси x).

Рассмотрим частные случаи задачи (1)-(2). В случае абсолютно жестких, полностью отражающих акустические волны стенок канала граничные условия можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad при \;\; x = \pm a,\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad при \;\; y = \pm b. \end{aligned}\right\}$$

Эти условия являются частным случаем (2) при $k_2^+ = k_2^- = l_2^+ = l_2^- = 0$. Тогда из (16) и (17) получаем:

$$\alpha = \frac{\pi n}{2a},\; \beta = \frac{\pi m}{2b},$$

где n и m – положительные целые числа.

Тогда выражение для определения собственных частот системы можно записать в виде:

$$\omega_{nm} = \frac{\pi c}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\,.$$

Получим соотношения для собственных форм колебаний. При этом все математические преобразования рассмотрим для составляющей $X(x)$. Рассуждения для $Y(y)$ совершенно аналогичны. Здесь также отметим, что $X(x)$ и $Y(y)$ будем искать с точностью до постоянного множителя. Для определения $X(x)$ в форме (4) с точностью до постоянного множителя необходимо найти соотношение между a_1 и a_2 с использованием выражений (13) и (14). Выбор для использования выражений (13) или (14) определяется условием неравенства нулю произведения $A_{12}A_{22}$ или $A_{11}A_{21}$. Из (13) для рассматриваемого частного случая, полагая $k_1^+ = k_1^- = 1$, можно записать:

$$A_{11} = -\alpha a\, sin(\alpha a) = -\frac{\pi n}{2} sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$A_{12} = \alpha a\, cos(\alpha a) = \frac{\pi n}{2} cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$A_{21} = \alpha a\, sin(\alpha a) = \frac{\pi n}{2} sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$A_{22} = \alpha a\, cos(\alpha a) = \frac{\pi n}{2} cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Тогда

$$A_{12}A_{22} = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \\ = \begin{cases} 0, если\ n - нечетное, \\ \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2, если\ n - четное; \end{cases}$$

$$A_{11}A_{21} = -\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \\ = \begin{cases} -\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2, если\ n - нечетное, \\ 0, если\ n - четное. \end{cases}$$

Таким образом, в случае четного n для расчета $X(x)$ следует использовать выражение (13); в случае нечетного n – выражение (14).

Более подробно рассмотрим случай четного n. $\frac{A_{11}}{A_{12}} = -tg\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ и так как n – четное, то $\frac{A_{11}}{A_{12}} = 0$. Аналогично $\frac{A_{21}}{A_{22}} = tg\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ и для рассматриваемого слу-

Таблица 1. Собственные частоты системы с абсолютно жесткими стенками

n	m	f, Гц	f_{ANSYS}, Гц	n	m	f, Гц	f_{ANSYS}, Гц
1	0	825	825	0	2	2200	2201
0	1	1100	1100	1	2	2350	2350
1	1	1375	1375	3	0	2475	2476
2	0	1650	1650	3	1	2708	2710
2	1	1983	1984	2	2	2750	2750

чая четного n $\dfrac{A_{21}}{A_{22}} = 0$. С учетом этого из выражения (13) получаем:

$$a_2 = 0.$$

Тогда составляющая $X(x)$ с точностью до постоянного множителя может быть записана в виде

$$X(x) = \cos\frac{\pi n x}{2a}, \text{ если } n \text{ – четное.}$$

Аналогично для случая нечетного n имеем:

$$a_1 = 0, X(x) = \sin\frac{\pi n x}{2a}, \text{ если } n \text{ – нечетное.}$$

Итак, с учетом вышесказанного можно записать:

$$X(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi n x}{2a}, & \text{если } n - \text{четное,} \\ \sin\dfrac{\pi n x}{2a}, & \text{если } n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Проводя аналогичные преобразования для $Y(y)$, получим:

$$Y(y) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi m y}{2b}, & \text{если } m - \text{четное,} \\ \sin\dfrac{\pi n y}{2b}, & \text{если } m - \text{нечетное.} \end{cases}$$

В качестве модельного примера рассмотрим канал прямоугольного сечения размерами $0{,}2 \times 0{,}15$ м и рассчитаем моды колебаний поперечного сечения при условии абсолютного отражения акустических волн от стенок. В качестве рабочей среды примем воздух ($c = 330$ м/с). Форму колебаний будем характеризовать числом линий n в вертикальном направлении (параллельных оси y) и числом узловых линий m в горизонтальном направлении (параллельных оси x). Для проверки адекватности разработанной аналитической модели проводится сравнение с результатами расчета этой же задачи методом конечных элементов на базе программного комплекса ANSYS. Результаты расчета по обеим моделям представлены в табл. 1.

Результаты расчета некоторых собственных форм колебаний для рассматриваемого модельного случая представлены на рис. 3.

Рассмотрим еще один частный случай данной задачи – упругие стенки канала. При этом предположим, что они представляют собой пластины, выполненные из одного и того же материала и имеющие одинаковую толщину. Тогда краевые условия можно записать в виде [3]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_x^{\pm}}{\partial y^4} + \frac{\rho_0 h}{D}\frac{\partial^2 w_x^{\pm}}{\partial t^2} = \frac{p_x^{\pm}}{D} \ \text{при } x = \pm a, \\ \frac{\partial^4 w_y^{\pm}}{\partial x^4} + \frac{\rho_0 h}{D}\frac{\partial^2 w_y^{\pm}}{\partial t^2} = \frac{p_y^{\pm}}{D} \ \text{при } y = \pm b, \end{aligned}\right\}, \quad (18)$$

где $w_x(y,t)$ – прогиб вертикальных стенок канала ($x = \pm a$),

$w_y(x,t)$ – прогиб горизонтальных стенок канала ($y = \pm b$),

$\dfrac{\partial w_x}{\partial t}, \dfrac{\partial w_y}{\partial t}$ – виброскорость стенок канала:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_x^{\pm}}{\partial t} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=\pm a}, \\ \frac{\partial w_y^{\pm}}{\partial t} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_{y=\pm b}, \end{aligned}\right\}, \quad (19)$$

ρ_0 – плотность материала стенок канала;

h – толщина стенок канала;

D – цилиндрическая жесткость пластины на изгиб:

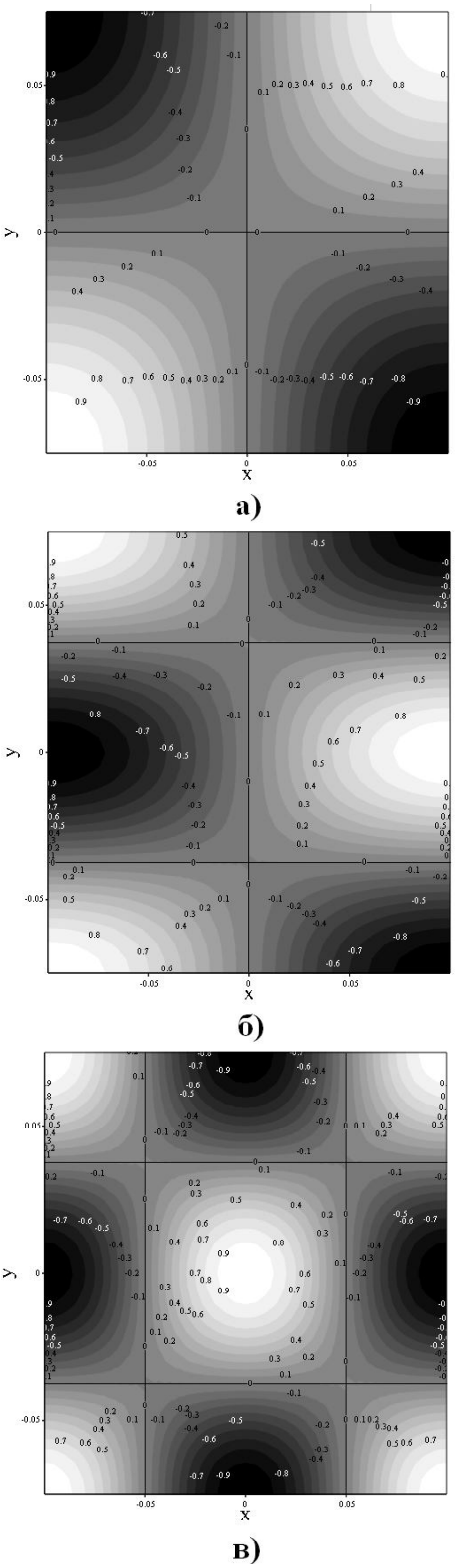

Рис. 3. Собственные формы колебаний исследуемой области (a=0,1; b=0,075 м) с абсолютно жесткими стенками: а – n=m=1; б – n=1; m=2; в – n=2; m=2; ——— узловые линии

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)},$$

E – модуль упругости стенок канала;
ν – коэффициент Пуассона;

$$p_x^{\pm} = -\rho\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{x=\pm a},\ p_y^{\pm} = -\rho\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{y=\pm b}\ [2],$$

ρ – плотность рабочей среды.

Рассмотрим преобразования краевых условий (18) для $x=\pm a$. Преобразования краевых условий для $y=\pm b$ будут совершенно аналогичны. Продифференцируем первые два выражения из (18) по времени:

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{\partial w_x^{\pm}}{\partial t}\right)+\frac{\rho_0 h}{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w_x^{\pm}}{\partial t}\right)=-\frac{\rho}{D}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{x=\pm a}. \quad (20)$$

С учетом (19) выражение (20) можно переписать в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\rho_0 h}{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=-\frac{\rho}{D}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{x=+a},\\&-\left[\frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\rho_0 h}{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]=-\frac{\rho}{D}\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right|_{x=-a}.\end{aligned}\right\}. \quad (21)$$

Поскольку, как и прежде, мы ищем решение задачи в гармоническом виде:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\omega^2\varphi_0(x,y)e^{j\omega t}=-\omega^2\varphi. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получим:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\rho_0 h}{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\rho\omega^2}{D}\left.\varphi=0\right|_{x=+a},\\&-\left[\frac{\partial^4}{\partial y^4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\rho_0 h}{D}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]-\frac{\rho\omega^2}{D}\left.\varphi=0\right|_{x=-a}.\end{aligned}\right\}. \quad (23)$$

Производную $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$ можно преобразовать:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial\varphi_0(x,y)}{\partial x}e^{j\omega t}\right]=-\omega^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23) и учитывая, что решение ищется в форме (3) получим:

$$\left[\beta^4-\frac{\rho_0 h\omega^2}{D}\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\rho\omega^2}{D}\left.\varphi=0\right|_{x=+a},$$

$$-\left[\beta^4 - \frac{\rho_0 h\omega^2}{D}\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\rho\omega^2}{D}\varphi = 0\Bigg|_{x=-a}.$$

Тогда, учитывая общую форму записи краевых условий (2):

$$k_1^+ = \beta^4 - \frac{\rho_0 h\omega^2}{D},\ k_1^- = -\left(\beta^4 - \frac{\rho_0 h\omega^2}{D}\right),$$

$$k_2^+ = k_2^- = -\frac{\rho\omega^2}{D}.$$

Аналогично:

$$l_1^+ = \alpha^4 - \frac{\rho_0 h\omega^2}{D},\ l_1^- = -\left(\alpha^4 - \frac{\rho_0 h\omega^2}{D}\right),$$

$$l_2^+ = l_2^- = -\frac{\rho\omega^2}{D}.$$

Для записи уравнений в безразмерной форме, положим:

$$\Omega = \frac{\omega a}{c_0},\ k = \frac{h^2}{12a^2},\ \aleph = \frac{b}{a},$$

где c_0 – скорость звука в пластине [3]:

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho_0\left(1-\nu^2\right)},$$

откуда

$$E = c_0^2\rho_0\left(1-\nu^2\right).$$

С учетом принятых обозначений можно записать:

$$D = \frac{c_0^2\rho_0 h^3}{12} = k\rho_0 h c_0^2 a^2,$$

$$k_1^+ = \left(\frac{N}{b}\right)^4 - \frac{\omega^2}{kc_0^2 a^2} = \frac{1}{kb^4}\left(kN^4 - \aleph^4\Omega^2\right),$$

$$k_1^- = -\frac{1}{kb^4}\left(kN^4 - \aleph^4\Omega^2\right),$$

$$l_1^+ = \frac{1}{ka^4}\left(kM^4 - \Omega^2\right),$$

$$l_1^- = -\frac{1}{ka^4}\left(kM^4 - \Omega^2\right),$$

$$k_2^+ = k_2^- = l_2^+ = l_2^- = -\frac{\rho}{\rho_0}\frac{1}{kha^4}\Omega^2.$$

Подставим эти краевые условия в результаты решения общего вида:

$$tg2M = \frac{2\frac{a}{h}\aleph^4\frac{\rho}{\rho_0}\Omega^2\left(kN^4 - \aleph^4\Omega^2\right)M}{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\frac{a}{h}\aleph^4\Omega^2\right)^2 - \left(kN^4 - \aleph^4\Omega^2\right)^2 M^2};$$

$$tg2N = \frac{2\frac{b}{h}\frac{\rho}{\rho_0}\left(kM^4 - \Omega^2\right)N\Omega^2}{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\frac{b}{h}\Omega^2\right)^2 - \left(kM^4 - \Omega^2\right)^2 N^2}.$$

Кроме того, с учетом принятых обозначений, выражение (8) можно преобразовать к виду:

$$\aleph^2 M^2 + N^2 = \aleph^2\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\Omega^2.$$

Дополнительно обозначим

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{a}{h}.$$

В итоге получим систему трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными: N, M и Ω:

$$\left.\begin{aligned}
tg2M &= \frac{2\varepsilon_0\aleph^4\Omega^2\left(kN^4 - \aleph^4\Omega^2\right)M}{\left(\varepsilon_0\aleph^4\Omega^2\right)^2 - \left(kN^4 - \aleph^4\Omega^2\right)^2 M^2},\\
tg2N &= \frac{2\varepsilon_0\aleph\Omega^2\left(kM^4 - \Omega^2\right)N}{\left(\varepsilon_0\aleph\Omega^2\right)^2 - \left(kM^4 - \Omega^2\right)^2 N^2},\\
\aleph^2 M^2 + N^2 &= \aleph^2\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\Omega^2.
\end{aligned}\right\}$$

Эта система может быть решена методом простых итераций [4].

Получим соотношения для собственных форм колебаний в этом частном случае. Как и прежде, выражения $X(x)$ и $Y(y)$ будем искать с точностью до постоянного множителя.

В соответствии с (4) и (13), можно записать:

$$X(x) = \cos\alpha x - \frac{A_{11}}{A_{12}}\sin\alpha x. \quad (25)$$

При этом полагается, что решение ищется с точностью до постоянного множителя и $A_{12} \neq 0$.

Преобразуем выражения (11) для рас-

Таблица 2. Собственные частоты системы с абсолютно жесткими и податливыми стенками

n	m	$f_{жест.}$, Гц	$f_{подат.}$, Гц	n	m	$f_{жест.}$, Гц	$f_{подат.}$, Гц
1	0	825	851,8	1	1	1375	1413
0	1	1100	1127	2	0	1650	1664

сматриваемого частного случая:

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= -\left[\frac{kN^4 - \aleph^4\Omega^2}{kb^4} M \sin M + \frac{\rho}{\rho_0}\frac{1}{kha^3}\Omega^2 \cos M\right], \\ A_{12} &= \frac{kN^4 - \aleph^4\Omega^2}{kb^4} M \cos M - \frac{\rho}{\rho_0}\frac{1}{kha^3}\Omega^2 \sin M. \end{aligned}\right\}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), получим:

$$X(x) = \cos\frac{Mx}{a} + \frac{\dfrac{kN^4 - \aleph^4\Omega^2}{kb^4} M \sin M + \dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{1}{kha^3}\Omega^2 \cos M}{\dfrac{kN^4 - \aleph^4\Omega}{kb^4} M \cos M - \dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{1}{kha^3}\Omega^2 \sin M} \sin\frac{Mx}{a}. \quad (27)$$

Проводя аналогичные преобразования, получим выражение для $Y(y)$:

$$Y(y) = \cos\frac{Ny}{b} + \frac{\left(kM^4 - \Omega^2\right) N \sin N + \dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{b}{h}\Omega^2 \cos N}{\left(kM^4 - \Omega^2\right) N \cos N - \dfrac{\rho}{\rho_0}\dfrac{b}{h}\Omega^2 \sin N} \sin\frac{Ny}{b}. \quad (28)$$

Соотношения (27) и (28) позволяют определить собственные формы колебаний.

В качестве модельного примера возьмем ранее рассмотренный канал с размерами 0,2х0,15 м. Ограничим его тонкими стенками одинаковой толщины $h = 2 \cdot 10^{-4}$ м, выполненными из стали ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_0 = 7800$ кг/м^3).

Для решения полученной системы нелинейных уравнений в качестве начального приближения для первой итерации целесообразно брать результаты, полученные для случая с абсолютно жесткими стенками. При этом решение быстро сходится. Результаты расчета собственных частот первых четырех форм колебаний приведены в табл. 2. В этой же таблице приведены значения собственных частот аналогичных форм для случая с абсолютно жесткой стенкой.

Из рассмотрения табл. 2 видно, что собственные частоты объема жидкости, ограниченного упругой (податливой) стенкой несколько выше, чем для случая абсолютно жесткой стенки. При этом линии пучности не совпадают с границами области, а находятся на некотором (достаточно небольшом) расстоянии от них.

Необходимо отметить, что в последнем частном случае рассмотрены только собственные частоты жидкости. Если мы будем рассматривать всю систему в комплексе, то в спектр собственных частот будут добавлены собственные частоты упругих стенок.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-08-01437-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скучик Е.* Основы акустики. Том 1. М.: Мир, 1976.
2. *Кошляков И.С.* и др. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
3. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004.
4. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. М.: Физматлит, 2004.

ANALYSIS OF MODAL FREQUENCIES AND FORMS OF FLUID OSCILLATIONS AT 2-D RECTANGULAR AREA

© 2007 V.I. Astafiev [1], A.B. Prokofiev [2], E.V. Shakhmatov [2]

[1] Samara State University
[2] Samara State Aerospace University

The mathematical model for calculation of modal frequencies and forms of liquid (gas) fluctuations in section of the rectangular channel is submitted at a formulation of boundary conditions in a general form. A number of special cases of boundary conditions are considered: absolutely rigid walls of the channel and elastic walls of the channel. Some results of modelling are presented on the basis of the developed mathematical model.