

## ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА, СОДЕРЖАЩЕГО ПОЛОСТЬ С ЖИДКОСТЬЮ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ

© 2007 А.В. Алексеев

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается пространственное движение вокруг центра масс спутника-гиростата с полостью, содержащей жидкость, при малых числах Рейнольдса. На основании теоремы об изменении кинетического момента строится математическая модель движения системы несущего тела с жидкостью и трех роторов. Для случая гиростата с одним ротором, основываясь на методе Пуанкаре, определяется приближенное аналитическое решение динамических и кинематических уравнений движения. Делается вывод о диссипативных свойствах жидкости.

### Введение

Динамика движения твердых тел и космических аппаратов (КА) с полостями с жидкостью исследовалась в работах Жуковского Н.Е. [1], Черноусько Ф.Л. [2], Моисеева Н.Н. [3], Рабиновича Б.И. [4, 5], Нариманова Г.С., Докучаева Л.В. [6] и других авторов. К настоящему времени глубоко изучено движение твердых тел с полостью, содержащей жидкость различной вязкости, заполняющей полость полностью либо частично, в линейной и нелинейной постановках, и получены важные результаты по оценке устойчивости различных режимов возмущенного движения. Исследованию движения систем тел с жидкостными компонентами не уделено должного внимания. Поэтому ставится задача исследования движения таких систем. Решение данной задачи важно с прикладной точки зрения при изучении движения спутников-гиростатов и КА с гироскопической стабилизацией.

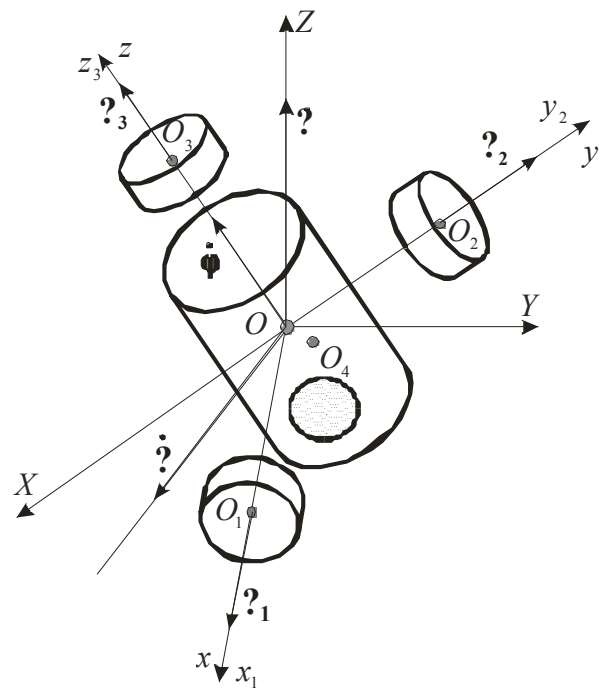
### Математическая модель движения

Рассмотрим движение трехроторного гиростата с полостью в несущем теле, содержащей жидкость большой вязкости, который в дальнейшем будем называть гиростатом с полостью с жидкостью. Введем следующие системы координат [7, 8] (рис. 1):  $OXYZ$  – кенигова система координат;  $Ox_1y_1z_1$  и  $Ox_2y_2z_2$  – системы координат, связанные с роторами 1–3 и несущим телом 4, соответственно. Оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  являются осями вращения роторов (тела 1–3). Положение несущего тела относительно системы  $OXYZ$  будем характеризовать

эйлерами углами:  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ .

Угловая скорость несущего тела  $\omega = (p, q, r)$  представлена в проекциях на оси  $Oxyz$ , а векторы угловых скоростей роторов  $\omega_i = (p_i, q_i, r_i)$  – на оси собственных связанных систем координат  $Ox_iy_iz_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ). Относительное движение роторов характеризуется углами и скоростями относительного закручивания  $\delta_i = \sigma_i$  (рис. 1).

Компоненты векторов угловых скоростей роторов  $\omega_i$ , выраженные через компоненты  $p$ ,  $q$ ,  $r$  угловой скорости тела-носителя, имеют вид:



**Рис. 1.** Схема гиростата с полостью и используемые системы координат

$$\begin{cases} p_1 = p + \sigma_1, \\ q_1 = q \cos \delta_1 + r \sin \delta_1, \\ r_1 = r \cos \delta_1 - q \sin \delta_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = p \cos \delta_2 - r \sin \delta_2, \\ q_2 = q + \sigma_2, \\ r_2 = r \cos \delta_2 + p \sin \delta_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_3 = p \cos \delta_3 + q \sin \delta_3, \\ q_3 = q \cos \delta_3 - p \sin \delta_3, \\ r_3 = r + \sigma_3. \end{cases} \quad (1)$$

Для получения уравнений движения системы тел воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента, выбирая в качестве полюса  $O$  центр масс системы:

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^e. \quad (2)$$

Пусть рассматриваемая система включает в себя три одинаковых динамически симметричных ротора и динамически несимметричное тело-носитель с полостью с жидкостью. Главные моменты инерции роторов (тела 1–3), вычисленные в своих связанных системах координат  $Ox_i y_i z_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ), обозначим  $A_i, B_i, C_i$ , а моменты инерции тела-носителя в системе координат  $Oxyz$  –  $A_p, B_p, C_p$ . Введенные моменты инерции не являются центральными, так как начала связанных с телами систем координат совпадают с центром масс системы четырех тел. Осевые моменты инерции роторов равны друг другу:  $A_1 = B_2 = C_3 = I$ .

Пусть жидкость внутри полости имеет большую кинематическую вязкость  $\nu$  ( $\nu \gg 1$ ), что соответствует малым числам Рейнольдса  $Re \sim \nu^{-1} \ll 1$ . Введем малый параметр, характеризующий величину числа Рейнольдса  $\mu = \rho \nu^{-1} \ll 1$ , где  $\rho$  – плотность жидкости. Полость с жидкостью характеризуется тензором  $\hat{\mathbf{D}} = \{D_{ij}\}$  [2], который зависит лишь от ее формы и определяет диссипацию энергии за счет вязкости жидкости. Компоненты  $D_{ij}$  вычисляются в системе координат, связанной с несущим телом. Пусть полость является сферической, тогда указанный тензор записывается следующим образом:  $\hat{\mathbf{D}} = DE$ ,

где  $E$  – единичная матрица,  $D$  – постоянная величина.

Кинетический момент системы относительно центра масс равен векторной сумме кинетических моментов несущего тела  $\mathbf{K}_4$ , роторов  $\mathbf{K}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) и гиростатического момента жидкости  $\mathbf{L}$  относительно точки  $O$ :

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_i + \mathbf{L}.$$

Вычисляя производную кинетического момента системы как суммы кинетических моментов тел и жидкости, используя при этом локальные производные в связанных системах  $Ox_i y_i z_i$  и  $Oxyz$ , уравнение (3) можно записать в системе  $Oxyz$  [7, 8]:

$$\sum_{i=1}^4 \hat{\delta}_i \left[ \frac{d\tilde{\mathbf{K}}_i}{dt} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{K}_i \right] = - \left[ \frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \right], \quad (3)$$

где знак “ $\sim$ ” обозначает локальную производную в соответствующей подвижной системе координат,  $\mathbf{K}_i = (A_i p_i, B_i q_i, C_i r_i)$ ,  $\mathbf{K}_4 = (A_p p, B_p q, C_p r)$  – кинетические моменты твердых тел,  $\hat{\delta}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – матрицы перехода от систем координат  $Ox_i y_i z_i$  к системе  $Oxyz$  (поворот на угол  $\delta_i$  вокруг соответствующей оси),  $\hat{\delta}_4 = E$ ,  $\boldsymbol{\omega}_4 = \boldsymbol{\omega}$ .

С учетом (1) система (3) в скалярном виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr + I\dot{\sigma}_1 + I(q\sigma_3 - r\sigma_2) &= m_x, \\ B\dot{q} + (A - C)pr + I\dot{\sigma}_2 + I(r\sigma_1 - p\sigma_3) &= m_y, \\ C\dot{r} + (B - A)pq + I\dot{\sigma}_3 + I(p\sigma_2 - q\sigma_1) &= m_z, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $A = \sum_{i=1}^4 A_i$ ,  $B = \sum_{i=1}^4 B_i$ ,  $C = \sum_{i=1}^4 C_i$ . Правые части уравнений (4) представляют собой проекции момента сил, действующих на несущее тело со стороны полости с жидкостью:

$$\mathbf{m} = - \left[ \frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \right]. \quad (5)$$

Гиростатический момент жидкости, следуя работе [2], будем определять по формуле:

$$\mathbf{L} = - \frac{\rho}{\nu} \hat{\mathbf{D}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = - \mu DE \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}},$$

где  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$  – вектор углового ускорения несущего тела. В этом случае выражение (5) можно переписать в виде:

$$\mathbf{m} = -\mu P \mathbf{g}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)^T$ , а

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \ddot{p} + q\dot{r} - r\dot{q} \\ \ddot{q} + r\dot{p} - p\dot{r} \\ \ddot{r} + p\dot{q} - q\dot{p} \end{bmatrix}.$$

Уравнения относительного движения роторов, соответствующие углам относительного закручивания  $d_i$  также могут быть получены из теоремы об изменении кинетического момента каждого из роторов:

$$I(\dot{p} + \dot{\sigma}_1) = M_x, \quad I(\dot{q} + \dot{\sigma}_2) = M_y, \quad I(\dot{r} + \dot{\sigma}_3) = M_z, \quad (7)$$

где  $M_w$  ( $w = x, y, z$ ) – момент, действующий со стороны несущего тела на ротор, установленный вдоль соответствующей оси. Будем рассматривать движение при отсутствии указанных моментов взаимодействия тел. Тогда система (7) приводится к следующему виду:

$$\dot{\sigma}_1 = -\dot{p}, \quad \dot{\sigma}_2 = -\dot{q}, \quad \dot{\sigma}_3 = -\dot{r}. \quad (8)$$

Для определения момента действия жидкости на несущее тело (6) поступим аналогично процедуре, указанной в работе [2]. В силу малости числа Рейнольдса будем искать указанные моменты с точностью до величины порядка  $m$ . Из уравнений (4) выразим компоненты углового ускорения  $\dot{\omega} = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$  с учетом соотношений (8):

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{[(C-B)qr + I(q\sigma_3 - r\sigma_2)]}{(A-I)} - \mu Dg_1; \\ \dot{q} &= -\frac{[(A-C)pr + I(r\sigma_1 - p\sigma_3)]}{(B-I)} - \mu Dg_2; \\ \dot{r} &= -\frac{[(B-A)pq + I(p\sigma_2 - q\sigma_1)]}{(C-I)} - \mu Dg_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Продифференцировав выражения (9), найдем вторые производные компонент угловой скорости. Для краткости запишем вторую производную только одной компоненты:

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= (A-I)^{-1}[(B-C)(\dot{q}r + q\dot{r}) + \\ &+ I(\dot{q}\sigma_3 + q\dot{\sigma}_3 - \dot{r}\sigma_2 - r\dot{\sigma}_2)] - \mu D\dot{g}_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя выражения (10) в формулу (5) и оставляя слагаемые, порядок малости которых не больше  $\mu$ , получим зависимость момента, действующего со стороны жидкости, от производных компонент угловой ско-

рости не выше первого порядка.

Выражения (4) и (8) представляют собой динамические уравнения движения свободного гиростата (моменты внешних сил равны нулю), состоящего из несущего тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью, и трех свободно вращающихся роторов. Система динамических уравнений (4), (8) замыкается известными кинематическими уравнениями Эйлера.

### Приближенное аналитическое решение уравнений движения

Рассмотрим систему двух соосных динамически симметричных тел, в одном из которых находится сферическая полость, заполненная вязкой жидкостью. Внутренний момент, действующий на ротор, отсутствует. Уравнения движения такой системы получаются из уравнений движения системы с тремя роторами и полостью, полученных ранее:

$$\begin{aligned} A\dot{p} - (A-C)qr + Iq\sigma = \frac{\rho}{\nu} D \frac{s}{A} (Cr + I\sigma)p, \\ A\dot{q} + (A-C)pr - Ip\sigma = \frac{\rho}{\nu} D \frac{s}{A} (Cr + I\sigma)q, \\ I(\dot{r} + \dot{\sigma}) + C_2\dot{r} = -\frac{\rho}{\nu} Ds(p^2 + q^2), \\ I(\dot{r} + \dot{\sigma}) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $s = [(A-C)r - I\sigma]A^{-1}$  – новая переменная.

Систему (14) после интегрирования последнего уравнения и алгебраических преобразований можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \dot{p} - sq &= \frac{\rho}{\nu} \frac{1}{A} \frac{D}{A-C_2} ps[C_2s - I(r_0 + \sigma_0)] \\ \dot{q} + sp &= \frac{\rho}{\nu} \frac{1}{A} \frac{D}{A-C_2} qs[C_2s - I(r_0 + \sigma_0)] \\ \frac{C_2}{A-C_2} \dot{s} &= -\frac{\rho}{\nu} \frac{D}{A} s(p^2 + q^2) \end{aligned} \quad (15)$$

Перейдем к безразмерным величинам и введем малую величину  $\varepsilon = \frac{\rho D C_2 \omega_0}{\nu A A - C_2} \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \dot{P} - SQ &= \varepsilon PS \left[ S - \frac{I}{C_2}(R_0 + X_0) \right] \\ \dot{Q} + SP &= \varepsilon QS \left[ S - \frac{I}{C_2}(R_0 + X_0) \right] \\ \dot{S} &= -\varepsilon \left( \frac{A - C_2}{C_2} \right)^2 S(P^2 + Q^2) \end{aligned} \quad (16)$$

где каждая безразмерная величина ( $P, Q, R, S, X$ ) – есть отношение соответствующей размерной к начальной угловой скорости несущего тела  $\omega_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2}$ , например  $P = p\omega_0^{-1}$  – безразмерная компонента угловой скорости,  $\tau = t\omega_0$  – безразмерный параметр времени. “Точка” здесь обозначает дифференцирование по безразмерному времени.

В системе дифференциальных уравнений (16) присутствует малый параметр  $\varepsilon$ , следовательно, для нахождения приближенного аналитического решения применимы асимптотические методы. Воспользуемся методом Пуанкаре [9]. Согласно методу точное решение системы аппроксимируется своим разложением в ряд по степеням малого параметра:

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P^{<i>}, \quad Q = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q^{<i>}, \quad S = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i S^{<i>}. \quad (17)$$

В данном случае ограничимся точностью аппроксимации порядка  $\varepsilon$ , то есть оставим в (17) только первые два слагаемых. Подставим разложения (17) в систему (18) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Получим порождающую систему и систему для поправок.

Порождающая система выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{P}^{<0>} - S^{<0>} Q^{<0>} &= 0, \\ \dot{Q}^{<0>} + S^{<0>} P^{<0>} &= 0, \\ \dot{S}^{<0>} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

решение которой:

$$\begin{aligned} P^{<0>} &= P_0 \cos S_0 \tau + Q_0 \sin S_0 \tau, \\ Q^{<0>} &= Q_0 \cos S_0 \tau - P_0 \sin S_0 \tau, \\ S^{<0>} &= S_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система для поправок принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{P}^{<1>} - S^{<0>} Q^{<1>} - S^{<1>} Q^{<0>} &= \\ &= P^{<0>} S^{<0>} \left[ S^{<0>} - IC_2^{-1}(R_0 + X_0) \right] \\ \dot{Q}^{<1>} + S^{<0>} P^{<1>} + S^{<1>} P^{<0>} &= \\ &= Q^{<0>} S^{<0>} \left[ S^{<0>} - IC_2^{-1}(R_0 + X_0) \right] \\ \dot{S}^{<1>} &= -(A - C_2)^2 C_2^{-2} S^{<0>} \left[ (P^{<0>})^2 + (Q^{<0>})^2 \right] \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом порождающего решения последнее уравнение системы (20) запишется следующим образом:

$$\dot{S}^{<1>} = -(A - C_2)^2 C_2^{-2} S_0 (P_0^2 + Q_0^2),$$

а его решение с начальными условиями  $S^{<1>}(0) = 0$ :

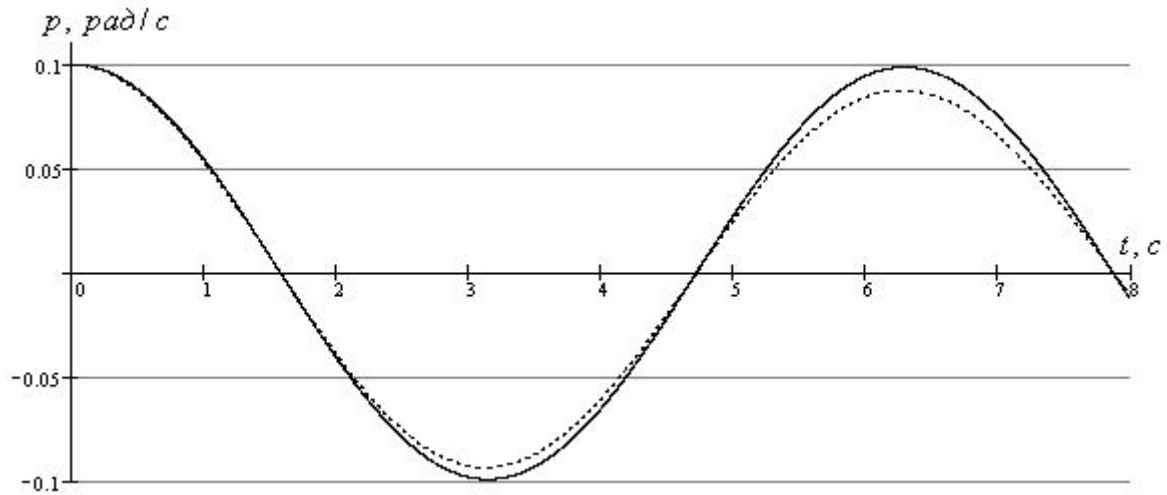
$$S^{<1>} = -(A - C_2)^2 C_2^{-2} S_0 (P_0^2 + Q_0^2) \tau. \quad (21)$$

С учетом (21) первые два уравнения системы (20) образуют систему неоднородных дифференциальных уравнений со специальной правой частью, решение которой при начальных условиях  $P^{<1>}(0) = 0, Q^{<1>}(0) = 0$  легко найти.

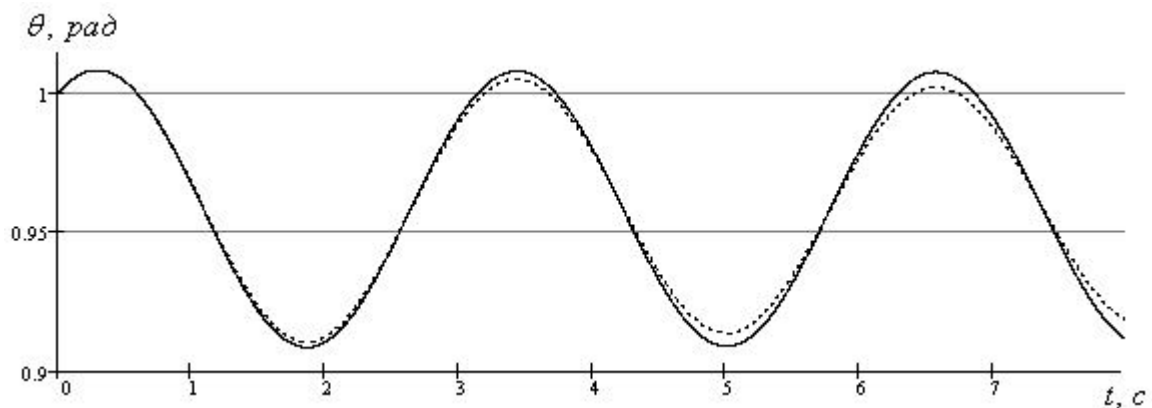
Приближенное решение системы (15) для двух компонент примет следующий вид:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 \cos s_0 t + q_0 \sin s_0 t + \varepsilon \frac{s_0 t}{\omega_0^2} \times \\ &\times \left[ \left[ s_0 - \frac{I}{C_2}(r_0 + \sigma_0) \right] (p_0 \cos s_0 t + q_0 \sin s_0 t) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} t (p_0^2 + q_0^2) \left( \frac{A - C_2}{C_2} \right)^2 (q_0 \cos s_0 t - p_0 \sin s_0 t) \right], \quad (22) \\ s(t) &= s_0 - \varepsilon \frac{s_0 t}{\omega_0} \left( \frac{A - C_2}{C_2} \right)^2 (p_0^2 + q_0^2). \end{aligned}$$

Аналогично решается задача Дарбу. В кинематические уравнения Эйлера подставляются приближенные решения для компонент угловой скорости, и решение определяется в виде рядов (17). Из-за громоздкости полученные выражения не приводятся. Для проверки правильности полученного приближенного аналитического решения сравним его с результатами численного интегрирования системы (14). На рис. 2 показано соответствие численного и аналитического решений для проекции  $p$  угловой скорости несущего тела, на рис. 3 – для угла нутации  $\theta$ . Сплошными линиями изображены аналитические решения, прерывистыми – численные.



**Рис. 2** Зависимость проекции  $p$  угловой скорости: сплошная линия – аналитическое решение, пунктирная – численное



**Рис. 3** Зависимость угла нутации  $\theta$  от времени: сплошная линия – аналитическое решение, пунктирная – численное

По графикам видно, что метод Пуанкаре дает довольно точный результат на небольших промежутках времени. По характеру движения можно сделать вывод о диссипативных свойствах вязкой жидкости. Амплитуда колебаний со временем уменьшается; при отсутствии жидкости такой эффект для свободной системы не наблюдается. Получается, что при движении КА жидкое топливо демпфирует его пространственное движение. Таким образом, в некоторых спутниках можно упростить активную систему демпфирования или вовсе ее не использовать.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования движения спутников-гиростатов и КА с двойным вращением, содержащих ЖРД, на пассивных участках их орбитального движения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследо-

ваний (Грант № 06-08-00325, грант № 06-01-00355) и программы поддержки технического образования фонда Alcoa (грант АУФ 07-003s).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1949.
2. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968.
3. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
4. Рабинович Б.И. Математическая модель космического аппарата с полостью, час-

- тично заполненной жидкостью. Режим стационарного вращения // Полет. 2003. № 8.
5. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975.
  6. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика ЛА с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977.
  7. Асланов В.С., Дорошин А.В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере // Космические исследования. 2002. Т. 40. № 2.
  8. Асланов В.С., Дорошин А.В. О двух случаях движения неуравновешенных гироскопов // Известия АН. Механика твердого тела. № 4, 2006.
  9. Муссеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.

## MOVEMENT OF THE SATELLITE - GIROSTATE CONTAINING A CAVITY WITH A LIQUID OF THE LARGE VISCOSITY

2007 © A.V. Alekseev

Samara State Aerospace University

The spatial movement around of the centre of weights girostate with a cavity containing a liquid of the large viscosity is considered. On the basis of the basic theorems of dynamics the mathematical model of movement of system consisting of a firm body with a liquid and three rotors is under construction. For a case girostate with one rotor, the approached analytical decision of dynamic and kinematic equations of movement is determined. Under the received decisions the influence of a liquid on movement of the satellite is determined.