УДК 681.51 : 629.78

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПОВОРОТНОГО МАНЕВРА И СИНТЕЗ ЗАКОНОВ ГИРОСИЛОВОГО НАВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ И СВОБОДНОЛЕТАЮЩИХ РОБОТОВ

### © 2007 Е.И. Сомов

### Самарский научный центр РАН

Представлены новая постановка задачи оптимизации поворотного маневра космических аппаратов и роботизированных модулей с кинематическими краевыми условиями общего вида, методы точного численного и приближенного аналитического ее решения, а также результаты аналитического синтеза соответствующих законов наведения и управления силовым гироскопическим комплексом кратной схемы на основе шести гиродинов.

#### Введение

Проблемы синтеза оптимального [1] программного углового движения механической конструкции космического аппарата (КА) при его пространственном поворотном маневре (ПМ) наиболее актуальны для решения задач оптико-электронного наблюдения заданных участков поверхности Земли и пространственной транспортировки грузов космическими роботизированными модулями (КРМ). В предыдущих работах автора [2,3] представлены некоторые результаты аналитического синтеза программы ПМ КА на заданном интервале времени  $t \in T_p \equiv [t_0^p, t_f^p], t_f^p \equiv t_0^p + T_p$  с краевыми условиями общего вида и аналитического расчета [3] соответствующего программного управления силовым гироскопическим комплексом (СГК) минимально избыточной структуры. Полученные при этом программы ПМ КА не являются единственными, поэтому возникают задачи расчета как строго оптимальной программы пространственного ПМ, представляющей ее предельные свойства по функционалу "управлений" из пространства Соболева  $W_2^3[t_0^p, t_f^p]$  [4], так и приближенно оптимальной программы ПМ, которая рассчитывается по явным аналитическим соотношениям. Статья содержит решение этих задач, результаты сопоставления полученных программ ПМ КА, а также результаты аналитического синтеза законов гиросилового наведения КА с помощью СГК кратной схемы на основе шести гиродинов (ГД) [5].

# Задача оптимизации поворотного маневра

Задача оптимизации ПМ КА на заданном интервале времени  $T_p$  состоит в определении кватерниона ориентации  $\Lambda(t)$  связанного с корпусом КА базиса  $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_i\}$  относительно известного инерциального базиса  $\mathbf{I}$ , векторов угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и ускорения  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  для кинематических соотношений

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2} \Lambda(t) \odot \omega(t);$$
  

$$\dot{\omega}(t) = \varepsilon(t); \qquad (1)$$
  

$$\dot{\varepsilon}(t) \equiv \mathbf{v} = \varepsilon^*(t) + \omega(t) \times \varepsilon(t);$$

из условия минимизации интегрального квадратичного критерия

$$I_{o} = \frac{1}{2} \int_{t_{0}^{p}}^{t_{f}^{p}} \langle \mathbf{v}(\tau), \mathbf{v}(\tau) \rangle d\tau \equiv \frac{1}{2} \int_{t_{0}^{p}}^{t_{f}^{p}} v^{2}(\tau) d\tau \Rightarrow \min (2)$$

при заданных краевых условиях для кватерниона  $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_0, \mathbf{\lambda}), \mathbf{\lambda} = \{\lambda_i\}$ , векторов  $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_i\}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_i\} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$  на левом ( $t = t_0^p$ ) и правом ( $t = t_f^p$ ) концах ПМ:

$$\mathbf{\Lambda}(t_0^p) = \mathbf{\Lambda}_0; \ \mathbf{\omega}(t_0^p) = \mathbf{\omega}_0; \ \mathbf{\varepsilon}(t_0^p) = \mathbf{\varepsilon}_0; \ (3)$$
$$\mathbf{\Lambda}(t_c^p) = \mathbf{\Lambda}_c; \ \mathbf{\omega}(t_c^p) = \mathbf{\omega}_c; \ \mathbf{\varepsilon}(t_c) = \mathbf{\varepsilon}_c. \ (4)$$

$$\mathbf{L}(l_f) = \mathbf{A}_f, \ \mathbf{W}(l_f) = \mathbf{W}_f, \ \mathbf{E}(l_f) = \mathbf{E}_f.$$
 (4)

Здесь вектор  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{\varepsilon}}(t)$  считается "управлением" и физически представляет собой абсолютную производную вектора ускорения  $\mathbf{\varepsilon}(t)$  базиса **В** относительно базиса **I**.

Определение углового положения КА в инерциальном базисе I с помощью кватерниона  $\Lambda(t)$  весьма рационально, но не является единственным. При применении углов Эйлера-Крылова в последовательности 31'2'' (первый элементарный поворот на угол  $\theta$ , второй поворот на угол  $\gamma$  и, наконец, третий поворот на угол  $\psi$ ) исходные прямые и обратные кинематические соотношения с использованием составленного из указанных углов вектора-столбца  $\phi = \{\theta, \gamma, \psi\}$  имеют вид

 $\dot{\phi} = \mathbf{D}(\phi)\omega; \ \omega = \mathbf{C}(\phi)\dot{\phi}.$  (5) Здесь матрицы

-

$$\mathbf{C}(\mathbf{\phi}) = \begin{bmatrix} C_{\psi} & 0 & -S_{\psi}C_{\gamma} \\ 0 & 1 & S_{\gamma} \\ S_{\psi} & 0 & C_{\psi}C_{\gamma} \end{bmatrix};$$
$$\mathbf{D}(\mathbf{\phi}) = \frac{1}{C_{\gamma}} \begin{bmatrix} C_{\psi}C_{\gamma} & 0 & S_{\psi}C_{\gamma} \\ S_{\psi}S_{\gamma} & C_{\gamma} & -C_{\psi}S_{\gamma} \\ -S_{\psi} & 0 & C_{\psi} \end{bmatrix},$$

где введены обозначения  $C_{\alpha} \equiv \cos \alpha$  и  $S_{\alpha} \equiv \sin \alpha$ .

Отметим, что задача оптимизации функционала (2) топологически эквивалентна задаче оптимизации

$$I_1 = \frac{1}{T_p} \int_{t_0^p}^{t_f^p} \mathbf{v}(\tau) \, | \, d\tau = \frac{1}{T_p} \int_{t_0^p}^{t_f^p} \mathbf{v}(\tau) \, d\tau \Rightarrow \min \quad (6)$$

наиболее важного для практики функционала I<sub>1</sub>, имеющего ясный физический смысл – среднее значение модуля ускорения КА (либо КРМ) относительно инерциального базиса I в процессе его поворотного маневра.

#### Оптимальное одноосное движение

Такая задача конечно является элементарной: на заданном интервале времени  $t \in T_p \equiv [t_0^p, t_f^p], t_f^p \equiv t_0^p + T_p$  для системы

$$\dot{\phi} = \omega; \ \dot{\omega} = \varepsilon; \ \dot{\varepsilon} = v$$
 (7)

с заданными краевыми условиями

$$\varphi(t_0^p) = \varphi^0; \ \omega(t_0^p) = \omega^0; \ \varepsilon(t_0^p) = \varepsilon^0, \quad (8)$$

$$\varphi(t_f^p) = \varphi^f; \ \omega(t_f^p) = \omega^f; \ \varepsilon(t_f^p) = \varepsilon^f \quad (9)$$

необходимо найти скалярное "управление" v(t) в задаче оптимизации (2). Вводится функция Гамильтона  $H = -v^2/2 + \psi\omega + \mu\varepsilon + pv$ и система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных

$$\begin{split} \dot{\psi} &= -\partial H / \partial \varphi = 0 ; \\ \dot{\mu} &= -\partial H / \partial \omega = -\psi ; \quad (10) \\ \dot{p} &= -\partial H / \partial \varepsilon = -\mu . \end{split}$$

Из условия оптимальности  $\partial H/\partial v = -v + p = 0$ принципа максимума Понтрягина следует, что оптимальное "управление" имеет вид v(t) = p(t). Решение сопряженной системы (10) получается в явном виде как  $\Psi(t) = c_{\phi}$ ;  $\mu(t) = c_{\omega} - c_{\phi}(t - t_{0}^{p}); p(t) = c_{\varepsilon} - c_{\omega}(t - t_{0}^{p}) + c_{\phi}(t - t_{0}^{p})^{2}/2$ , где постоянные  $c_{\phi}$ ,  $c_{\omega}$  и  $c_{\varepsilon}$  следует определить по заданным краевым условиям (8) и (9).

Структура оптимального "управления" v(t) = p(t) известна, поэтому решение исходной системы (7) также представляется в явном аналитическом виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^{0} + c_{\varepsilon}(t - t_{0}^{p}) - \frac{c_{\omega}(t - t_{0}^{p})^{2}}{2} + \frac{c_{\varphi}(t - t_{0}^{p})^{3}}{6};$$

$$\omega(t) = \omega^{0} + \varepsilon^{0}(t - t_{0}^{p}) + \frac{c_{\varepsilon}(t - t_{0}^{p})^{2}}{2} - \frac{c_{\omega}(t - t_{0}^{p})^{3}}{6} + \frac{c_{\varphi}(t - t_{0}^{p})^{4}}{24}; \qquad (11)$$

$$\varphi(t) = \varphi^{0} + \omega^{0}(t - t_{0}^{p}) + \frac{\varepsilon^{0}(t - t_{0}^{p})^{2}}{2} + \frac{c_{\varepsilon}(t - t_{0}^{p})^{3}}{6} - \frac{c_{\omega}(t - t_{0}^{p})^{4}}{24} + \frac{c_{\varphi}(t - t_{0}^{p})^{5}}{120} + \frac{\varepsilon^{0}(t - t_{0$$

Наконец, три постоянные  $c_{\varphi}$ ,  $c_{\omega}$  и  $c_{\varepsilon}$ определяются в явном виде при подстановке  $\varphi(t_f^p)$ ,  $\omega(t_f^p)$  и  $\varepsilon(t_f^p)$  решения (11) в заданные краевые условия (9).

Таким образом, оптимальное по критерию (2) движение КА относительно произвольной k-ой оси представляется функцией  $\varphi_k(t)$  в классе полиномов (сплайнов) пятой степени нормированного времени  $\tau = (t - t_0^p) / T_p \subset [0,1]$  с аналитическими зависимостями

$$\begin{split} \ddot{\varphi}_{k}(\tau) &= \varepsilon_{k}(\tau) = \varepsilon_{k}^{0} \\ &+ \tau (6a_{3} + 12a_{4}\tau + 20a_{5}\tau^{2})/T_{p}^{2}; \\ \dot{\varphi}_{k}(\tau) &= \omega_{k}(\tau) = \omega_{k}^{0} + \varepsilon_{k}^{0}T_{p}\tau \\ &+ \tau^{2}(3a_{3} + 4a_{4}\tau + 5a_{5}\tau^{2})/T_{p}; \ (12) \\ \varphi_{k}(\tau) &= \varphi_{k}^{0} + \tau (\omega_{k}^{0}T_{p} + \varepsilon_{k}^{0}T_{p}^{2}\tau/2 \\ &+ \tau^{2}(a_{3} + a_{4}\tau + a_{5}\tau^{2})), \end{split}$$

где  $\omega_k^0, \epsilon_k^0$ , k = 1,2,3 – начальные скорость и

ускорение в элементарном повороте, а коэффициенты  $a_i, i = 3 \div 5$  определяются в явном виде по векторно-матричному соотношению

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \varphi_k^f - \varphi_k^0 - \omega_k^0 T_p - \varepsilon_k^0 T_p^2 / 2 \\ T_p \left( \omega_k^f - \omega_k^0 - \varepsilon_k^0 T_p \right) \\ T_p^2 \left( \varepsilon_k^f - \varepsilon_k^0 \right) \end{bmatrix}$$
(13)

с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 1/2 \\ -15 & 7 & -1 \\ 6 & -3 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

# Приближенно оптимальное пространственное движение

Приближенное оптимальное решение пространственной задачи основывается на необходимом и достаточном условии разрешимости классической задачи Дарбу – определения  $\Lambda(t)$  в аналитическом виде (в том числе в квадратурах) из уравнения  $\dot{\Lambda}(t) = \frac{1}{2} \Lambda(t) \odot \omega(t)$  при известных  $\Lambda_0$  и  $\omega(t)$ .

Введем базис  $\mathbf{E}_0$ , фиксированный в инерциальном базисе I кватернионом  $\Lambda_0$ (1), и подвижные базисы  $\mathbf{E}_k$  (k = 1,...n), где базис  $\mathbf{E}_n$  совпадает со связанным базисом **B**. Необходимое и достаточное условия разрешимости задачи Дарбу состоят в возможности представления вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  в виде

 $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_{n}(t) + \boldsymbol{\omega}_{n-1}(t) + \cdots + \boldsymbol{\omega}_{1}(t),$ 

где вектор  $\boldsymbol{\omega}_{k}(t)$  имеет неизменное направление в базисе  $\mathbf{E}_{k-1}$  и является вектором угловой скорости базиса  $\mathbf{E}_{k}$  относительно базиса  $\mathbf{E}_{k-1}$ , т.е. в виде

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_{n}^{n-1}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{n}(t) \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\omega}_{n-1}^{n-2}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{n-1}(t) \boldsymbol{\Theta}(\boldsymbol{\omega}_{n-2}^{n-3}(t)) + \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{n-2}(t) \boldsymbol{\Theta}(\cdot + \boldsymbol{\omega}_{1}^{0}(t)) \cdot \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Lambda}_{n-2}(t) ) \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Lambda}_{n-1}(t) ) \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Lambda}_{n}(t),$$

где вектор-столбец  $\omega_{k}^{k-1}(t)$ , k = 1,...n составлен из проекций вектора  $\omega_{k}(t)$  фиксированного направления в базисе  $\mathbf{E}_{k-1}$ , а  $\Lambda_{k}(t)$  является кватернионом ориентации базиса  $\mathbf{E}_{k}$  относительно базиса  $\mathbf{E}_{k-1}$ .

Решение поставленной задачи представляется как результат сложения трех одновременно происходящих элементарных поворотов "вложенных" базисов  $\mathbf{E}_k$  вокруг ортов  $\mathbf{e}_k$  осей Эйлера, положение которых определяется из краевых условий (3), (4) исходной пространственной задачи. Кватернион  $\Lambda(t)$  ориентации КА в базисе I определяется произведением

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Lambda}_0 \odot \mathbf{\Lambda}_1(t) \odot \mathbf{\Lambda}_2(t) \odot \mathbf{\Lambda}_3(t) . \quad (14)$$

Здесь для k = 1,2,3 кватернион  $\Lambda_k(t) = (\cos(\phi_k(t)/2), \mathbf{e}_k \sin(\phi_k(t)/2)),$  где  $\phi_k(t)$  и  $\mathbf{e}_k$  – текущий угол и орт оси Эйлера kго поворота. В силу неподвижности орта  $\mathbf{e}_k$  в базисе  $\mathbf{E}_{k-1}$  имеем  $\boldsymbol{\omega}_k(t) = \dot{\phi}_k(t)\mathbf{e}_k$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_k(t) = \ddot{\phi}_k(t)\mathbf{e}_k$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t) = \ddot{\phi}_k(t)\mathbf{e}_k$ . Обозначения краевых условий всех 3 элементарных поворотов относительно ортов  $\mathbf{e}_k$  приведены в табл. 1.

Пусть кватернион  $\Lambda^* \equiv (\lambda_0^*, \lambda^*) = \Lambda_0 \odot \Lambda_f$ имеет орт оси Эйлера  $\mathbf{e}_3 = \lambda^* / \sin(\varphi^*/2)$  третьего поворота, где угол  $\varphi^* = 2 \arccos(\lambda_0^*)$ вычисляется по значениям кватернионов  $\Lambda_0$ и  $\Lambda_f$ . Для первого и второго элементарных поворотов принимаются начальные и конечные значения кватернионов в виде

 $\Lambda_1(t_0^p) = \Lambda_1(t_f^p) = \Lambda_2(t_0^p) = \Lambda_2(t_f^p) = \mathbf{1}$ , (15) а краевые условия по кватерниону для третье-

го элементарного поворота – в виде (мат ф)

$$\mathbf{\Lambda}_3(t_0^p) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{\Lambda}_3(t_f^p) = (\cos(\varphi_3^f/2), \mathbf{e}_3 \sin(\varphi_3^f/2))$$

где  $\phi_3^f = \phi^*$ , **1** – единичный кватернион, что соответствует значениям углов  $\phi_1^0 = \phi_2^f = 0$ ,  $\phi_2^0 = \phi_2^f = 0$  и  $\phi_3^0 = 0$ , представленным в табл.. Орт **e**<sub>1</sub> оси Эйлера первого поворота назначается из условия его ортогональнос-

	Тип	Краевые условия на левом			Краевые условия на		
k	элементарного	конце траектории			правом конце траектории		
	движения	$(t = t_0^p)$			$(t = t_f^p)$		
		φ	ω	ω	φ	ω	3
1	Движение по орту <b>е</b> <sub>1</sub>	$\phi_1^0$	$\omega_1^0$	$\boldsymbol{\epsilon}_1^0$	$\phi_1^{f}$	$\omega_1^{\rm f}$	$\epsilon_1^{\rm f}$
2	Движение по орту $\mathbf{e}_2$	$\phi_2^0$	$\omega_2^0$	$\epsilon_2^0$	$\phi_2^{f}$	$\omega_2^{\rm f}$	$\epsilon_2^{\rm f}$
3	Движение по орту $\mathbf{e}_3$	$\phi_3^0$	$\omega_3^0$	$\varepsilon_3^0$	$\phi_3^{f}$	$\omega_3^{f}$	$\epsilon_3^{\rm f}$

Таблица. Краевые условия

ти к орту  $\mathbf{e}_3$  по следующему простому алгоритму:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{0}^{\omega} &\equiv \mathbf{\omega}_{0}/\omega_{0}; \ \mathbf{e}_{f}^{\omega} \equiv \mathbf{\omega}_{f}/\omega_{f}; \\ \mathbf{e}_{0}^{\varepsilon} &\equiv \mathbf{\varepsilon}_{0}/\varepsilon_{0}; \ \mathbf{e}_{f}^{\varepsilon} \equiv \mathbf{\varepsilon}_{f}/\varepsilon_{f}; \\ 1) \ \mathbf{a} &\coloneqq \mathbf{e}_{0}^{\omega} - \langle \mathbf{e}_{0}^{\omega}, \mathbf{e}_{3} \rangle \mathbf{e}_{3} \ \mathbf{u} \ \mathbf{e}$$
сли  $a \equiv |\mathbf{a}| > 0, \\ \text{то } \mathbf{e}_{1} &= \mathbf{a}/a; \\ 2) \ \mathbf{u}$ наче  
 $\mathbf{a} &\coloneqq \mathbf{e}_{f}^{\omega} - \langle \mathbf{e}_{f}^{\omega}, \mathbf{e}_{3} \rangle \mathbf{e}_{3} \ \mathbf{u} \ \mathbf{e}$ сли  $|\mathbf{a}| > 0, \\ \text{то } \mathbf{e}_{1} &= \mathbf{a}/a; \\ 3) \ \mathbf{u}$ наче  
 $\mathbf{a} &\coloneqq \mathbf{e}_{0}^{\varepsilon} - \langle \mathbf{e}_{0}^{\varepsilon}, \mathbf{e}_{3} \rangle \mathbf{e}_{3} \ \mathbf{u} \ \mathbf{e}$ сли  $|\mathbf{a}| > 0, \\ \text{то } \mathbf{e}_{1} &= \mathbf{a}/a; \\ 3) \ \mathbf{u}$ наче  
 $\mathbf{a} &\coloneqq \mathbf{e}_{0}^{\varepsilon} - \langle \mathbf{e}_{0}^{\varepsilon}, \mathbf{e}_{3} \rangle \mathbf{e}_{3} \ \mathbf{u} \ \mathbf{e}$ сли  $|\mathbf{a}| > 0, \\ \text{то } \mathbf{e}_{1} &= \mathbf{a}/a; \\ (16) \\ 4) \ \mathbf{u}$ наче  
 $\mathbf{a} &\coloneqq \mathbf{e}_{f}^{\varepsilon} - \langle \mathbf{e}_{f}^{\varepsilon}, \mathbf{e}_{3} \rangle \cdot \mathbf{e}_{3} \ \mathbf{u} \ \mathbf{e}$ сли  $|\mathbf{a}| > 0, \\ \text{то } \mathbf{e}_{1} &= \mathbf{a}/a; \\ \mathbf{5} \right) \ \mathbf{u}$ наче

третий поворот относительно орта оси Эйлера  $\mathbf{e}_3$  является единственным, т.е. кватернионы  $\Lambda_1(t) = \Lambda_2(t) \equiv \mathbf{1}$ .

Наконец, орт  $\mathbf{e}_2$  оси Эйлера второго поворота определяется по стандартной формуле  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$  из условия аналитического построения правого ортонормированного базиса на совокупности ортов  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$ .

Все векторы  $\omega_k(t) = \dot{\varphi}_k(t) \mathbf{e}_k$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t) \mathbf{e}_k$  и  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t) = \ddot{\varphi}_k(t) \mathbf{e}_k$  в каждом элементарном повороте представляются в аналитическом виде при явном задании функций времени  $\varphi_k(t)$  (12), оптимальных по критерию (2) для элементарных вращений. Вектор угловой скорости  $\omega(t)$ , векторы углового ускорения  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  (и при необходимости его производной  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$  – "управления" v(t) в (1)) при начальных обозначениях векторов  $\omega^{(1)}(t) = \omega_1(t)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_1(t)$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1(t)$ определяются аналитически по рекуррентному алгоритму: для *верхних* индексов k = 2,3 последовательно вычисляются

$$\boldsymbol{\omega}_{q}^{k}(t) \coloneqq \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{k}(t) \boldsymbol{\otimes} \boldsymbol{\omega}^{(k-1)}(t) \boldsymbol{\otimes} \boldsymbol{\Lambda}_{k}(t);$$
  

$$\boldsymbol{\omega}^{(k)}(t) = \boldsymbol{\omega}_{k}(t) + \boldsymbol{\omega}_{q}^{k}(t);$$
  

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{q}^{k}(t) \coloneqq \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{k}(t) \boldsymbol{\otimes} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k-1)}(t) \boldsymbol{\otimes} \boldsymbol{\Lambda}_{k}(t);$$
  

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_{k}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_{q}^{k}(t) + \boldsymbol{\omega}_{q}^{k}(t) \times \boldsymbol{\omega}_{k}(t); \quad (17)$$
  

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{q}^{k}(t) \coloneqq \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{k}(t) \boldsymbol{\otimes} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k-1)}(t) \boldsymbol{\otimes} \boldsymbol{\Lambda}_{k}(t);$$
  

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{k}(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{q}^{k}(t) + (2\boldsymbol{\varepsilon}_{q}^{k}(t) + \boldsymbol{\omega}_{q}^{k}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}_{k}(t),$$

В ИТОГЕ ИСКОМЫЕ ВЕКТОРЫ ПОЛУЧАЮТСЯ КАК  $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}^{(3)}(t)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}(t)$  И  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \mathbf{v}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(3)}(t)$ .

Функции переходов  $\varphi_k(t)$  по углам поворота в элементарных движениях относительно ортов  $\mathbf{e}_k, k = 1,2,3$  должны удовлетворять краевым условиям (см. табл. 1):

по угловым скоростям

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_{k}^{0} = <\boldsymbol{\omega}_{0}, \boldsymbol{e}_{k} >, \qquad k = 1, 2, 3;$$
  

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_{3}^{f} = <\boldsymbol{\omega}_{f}, \boldsymbol{e}_{3} >,$$
  

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_{k}^{f} = <\boldsymbol{\Lambda}^{*} \odot (\boldsymbol{\omega}_{f} - \boldsymbol{e}_{3} \dot{\boldsymbol{\phi}}_{3}^{f}) \odot \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{*}, \boldsymbol{e}_{k} >$$
  

$$k = 1, 2;$$
(18)

по угловым ускорениям

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{1}^{0} = < \boldsymbol{\varepsilon}_{0}, \boldsymbol{e}_{1} > -\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{2}^{0} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{3}^{0}; 
 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{2}^{0} = < \boldsymbol{\varepsilon}_{0}, \boldsymbol{e}_{2} > +\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{1}^{0} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{3}^{0}; 
 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{3}^{0} = < \boldsymbol{\varepsilon}_{0}, \boldsymbol{e}_{3} > -\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{1}^{0} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{2}^{0}; 
 \boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{m} \equiv \boldsymbol{\Lambda}^{*} \odot \boldsymbol{\varepsilon}_{f} \odot \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}^{*};$$

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{i}^{f} = < \boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{m}, \boldsymbol{e}_{1} > -\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{2}^{f} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{3}^{f}; 
 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{2}^{f} = < \boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{m}, \boldsymbol{e}_{2} > +\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{1}^{f} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{3}^{f}; 
 \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_{3}^{f} = < \boldsymbol{\varepsilon}_{f}^{m}, \boldsymbol{e}_{3} > -\dot{\boldsymbol{\varphi}}_{1}^{f} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{2}^{f}$$

$$(19)$$

Краевые условия (18) и (19 получаются на основе рекуррентного алгоритма (17) с учетом условий (15) для значений кватернионов первого и второго поворотов на правом и левом краях поворотного маневра.

Элементарные повороты конечно можно выполнять и при совмещении ортов Эйлера  $\mathbf{e}_k$  с ортами  $\mathbf{b}_k$  базиса **В**. При этом функции переходов  $\varphi_k(t)$  по углам поворота в элементарных движениях соответствуют углам Эйлера-Крылова в выбранной последовательности и краевые условия должны вычисляться с использованием нелинейных кинематических соотношений (5). Рассмотрим практический пример ПМ, соответствующий пространственному угловому переходу к цели наблюдения на противоположенной стороне полосы обзора за время  $T_p = 76 \ c$ . Пусть заданы краевые условия

$$\phi_0 = \{-35.4, 37.28, 39.09\}^\circ; \phi_f = \{20, 56.92, -30\}^\circ; \omega_0 = \{0.05, 0.485, -0.125\}^\circ/c; \omega_f = \{0.286, -0.265, -0.142\}^\circ/c;$$

 $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \{0.002459, 0.000575, -0.000240\}^\circ / c^2,$  $\boldsymbol{\varepsilon}_f = \{-0.003241, -0.002348, 0.000320\}^\circ / c^2$ и пространственный поворотный маневр выполняется по оптимальному закону для каждого элементарного поворота в двух вариантах:

*а*) для указанных углов Эйлера-Крылова относительно ортов **b**<sub>k</sub> базиса **B**;

b) для последовательности поворотов относительно выбранных ортов Эйлера  $\mathbf{e}_k$ .

Полученные численные результаты представлены на рис. 1 и рис. 2. Функционал  $I_1$ (6) принимает значения  $I_1 = 0.057 \text{ рад/} c^2$  в варианте *a*) и  $I_1 = 0.051 \text{ рад/} c^2$  в варианте *b*), т.е. по функционалу  $I_1$  вариант *b*) имеет "выигрыш" в 11%. По исходному функционалу  $I_0$  (2) такой "выигрыш" составляет 22%. Рис. 2 ясно иллюстрирует преимущества варианта *b*) также в отношении максимального уровня модуля ускорения. На основании многочисленных расчетов с самыми разнообразными краевыми условиями установлено, что вариант *b*) формирования приближенно оптимального ПМ всегда имеет выигрыш по сравнению с вариантом *a*) – до 40% по фун-



Рис. 1. Изменение кинематических параметров при поворотном маневре: вариант а) слева



Рис. 2. Изменение модуля ускорения при поворотном маневре: вариант а) слева

кционалу I<sub>1</sub> для ПМ при больших углах.

Оптимальный поворотный маневр

Для исходной нелинейной задачи (1) – (4) составляется функция Гамильтона

$$H = -\frac{1}{2} < \mathbf{v}, \mathbf{v} > +\frac{1}{2} < \Psi, \mathbf{\Lambda} \odot \boldsymbol{\omega} >$$
$$+ < \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varepsilon} > + < \mathbf{p}, \mathbf{v} >,$$

а для сопряженных переменных (кватерниона  $\Psi$  и векторов  $\mu$ ,**p**) – сопряженная система дифференциальных уравнений  $\dot{\Psi} = -\partial H / \partial \Lambda = {}^{1} \Psi \odot \omega$ .

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = -\partial H / \partial \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} \odot \boldsymbol{\Psi}$$
$$= -\frac{1}{2} \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} \odot \boldsymbol{c}_{\phi} \odot \boldsymbol{\Lambda};$$
$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\partial H / \partial \boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{\mu},$$
(20)

где постоянный [1] вектор  $\mathbf{c}_{\varphi} = \{c_{\varphi k}\}$  в дальнейшем должен определяться. Условие оптимальности  $\partial H / \partial \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$  в соответствии с принципом максимума приводит к оптимальному управлению  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t)$ . Структура решения необходимых далее компонентов сопряженной системы (20) такова:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{c}_{\omega} - \frac{1}{2} \int_{t_0^p}^t \widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}(\tau) \boldsymbol{\Theta} \mathbf{c}_{\varphi} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Lambda}(\tau) d\tau;$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{v}(t) = \mathbf{c}_{\varepsilon} - \mathbf{c}_{\omega}(t - t_0^p) + \frac{1}{2} \int_{t_0^p t_0^p}^{\tau} (\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(s) \odot \mathbf{c}_{\varphi} \odot \mathbf{\Lambda}(s) ds) d\tau,$$

где векторы  $\mathbf{c}_{\omega} = \{c_{\omega k}\}$  и  $\mathbf{c}_{\varepsilon} = \{c_{\varepsilon k}\}$  подлежат определению. Это позволяет представить структуру решения всех компонентов исход-

ной прямой системы (1) также в аналитическом виде, где постоянные векторы  $\mathbf{c}_{\varphi}$ ,  $\mathbf{c}_{\omega}$  и  $\mathbf{c}_{\varepsilon}$  должны быть выбраны на основе численных методов с удовлетворением краевых условий (3) и (4). Несложно убедиться, что в этой структуре при движении КА относительно только одной оси имеется полное совпадение оптимального управления с представленными выше результатами (10), (11).

Для численного построения строго оптимального по критерию (2) управления для нелинейной задачи (1) – (4) применяется стандартный итерационный метод Ньютона. При этом в качестве решения "стартовой" задачи принимается аналитическое приближенно оптимальное движение, составленное из трех одновременно выполняемых элементарных вращений относительно специально выбранных трех ортов Эйлера е, В такой "стартовой" задаче постоянные векторы  $\mathbf{c}_{\varphi} = \{c_{\varphi k}\}, \quad \mathbf{c}_{\omega} = \{c_{\omega k}\}$ и  $\mathbf{c}_{\varepsilon} = \{c_{\varepsilon k}\}$ имеют компоненты, аналитически полученные для оптимального движения в каждом элементарном повороте. Уточнение значений этих постоянных векторов выполняется итерационно, с использованием совместного численного интегрирования прямой и сопряженной систем дифференциальных уравнений, линеаризованных в окрестности решения на предыдущей итерации.

Установлено, что таком выборе начальной точки ("стартовой" задачи) итерационного процесса по методу Ньютона имеется быстрая сходимость – обычно необходимо 2-3 итерации для получения численного решения с приемлемой точностью. Различие между приближенно оптимальным управлением (аналитическим решением "стартовой" задачи) и строго оптимальным управлением весьма незначительное – до 3% по функционалу I<sub>1</sub> для практически важных поворотных маневров КА и КРМ с произвольными краевыми условиями (3) и (4).

# Силовой гироскопический комплекс

При выборе схемы расположения гиродинов (ГД) в связанном базисе в учитываются требования, предъявляемые к гиросиловой системе управления движением КА либо КРМ. Как известно, применение групп (в простейшем случае пар) ГД с коллинеарными осями подвеса дает очень важное преимущество при формировании схемы силового гироскопического комплекса (СГК) – при наличии шести и более ГД все внутренние сингулярные состояния такой схемы являются строго проходимыми [5]. При использовании шести ГД в рамках такого подхода рациональна классическая схема 3-SPE (система 3 ножничных пар – 3 Scissored Pair Ensemble), состоящая из трех ортогонально ориентированных пар ГД, рис. 3. Введем вектор-столбец  $\beta = \{\beta_p, p = 1 \div 6\}$ , составленный углов ГД относительно осей их подвеса, см. рис. 3. Парковое состояние СГК данной схемы, когда вектор нормированного суммарного кинетического момента (КМ) СГК

 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \sum \mathbf{h}_{p}(\boldsymbol{\beta}_{p}) = \mathbf{0}$ , представлено на рис. 4. Введем обозначения проекций ортов КМ каждого ГД на оси ортогонального канонического гироскопического базиса  $\mathbf{G}_{c} = \{x_{c}^{g}, y_{c}^{g}, z_{c}^{g}\},$ рис. 3:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \equiv \cos\beta_1 \ ; \ x_2 = C_2 \equiv \cos\beta_2 \ ; \\ y_1 &= S_1 \equiv \sin\beta_1 \ ; \ y_2 = S_2 \equiv \sin\beta_2 \ ; \\ x_3 &= S_3 \equiv \sin\beta_3 \ ; \ x_4 = S_4 \equiv \sin\beta_4 \ ; \\ z_3 &= C_3 \equiv \cos\beta_3 \ ; \ z_4 = C_4 \equiv \cos\beta_4 \ ; \\ y_5 &= C_5 \equiv \cos\beta_5 \ ; \ y_6 = C_6 \equiv \cos\beta_6 \ ; \\ z_5 &= S_5 \equiv \sin\beta_5 \ ; \ z_6 = S_6 \equiv \sin\beta_6 \ . \end{aligned}$$

Тогда вектор-столбец нормированного суммарного КМ СГК **h** в гироскопическом базисе  $G_c$  и градиентная матрица  $A_h(\beta) = \partial h / \partial \beta$  представляются в виде

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + S_3 + S_4 \\ S_1 + S_2 + C_5 + C_6 \\ C_3 + C_4 + S_5 + S_6 \end{bmatrix};$$

٦

$$\mathbf{A}_{\mathsf{h}}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & -S_5 & -S_6 \\ 0 & 0 & -S_3 & -S_4 & C_5 & S_6 \end{bmatrix}.$$

Сингулярное состояние данной схемы возникает при таких угловых положениях ГД, когда матрица Грамма  $G(\beta) \equiv A_h(\beta)A_h^{T}(\beta)$  теряет полный ранг, т.е. при  $det(G(\beta)) = 0$ , рис. 5.

Принципиальной проблемой управления СГК избыточной структуры является выбор функции распределения потребного суммарного КМ СГК между ГД – так называемого



Рис. 3. Кратная схема 3-SPE и отсчет углов ГД

Рис. 4. Парковое состояние СГК



Рис. 5. Множества возможных естественных сингулярных состояний схемы 3-SPE

закона настройки СГК. Наиболее рациональными с позиций синтеза законов наведения, бортовой реализации алгоритмов управления СГК и прогнозирования динамической реализуемости потребных угловых маневров КА являются явные законы настройки ГД, кото-

рые позволяют получить все характеристики движения каждого ГД (угловые перемещения, скорости, ускорения) по явным аналитическим соотношениям.

### Синтез законов гиросилового наведения

Задача синтеза законов гиросилового наведения заключается в создании алгоритмов углового перемещения каждого ГД в составе СГК, гарантирующих абсолютно точную реализацию заданного программного углового движения КА либо КРМ, например при выполнении их пространственных поворотных маневров, оптимальных по потребному среднему ускорению (6). Избыточность числа ГД в схеме 3-SPE (три оси управления при шести ГД, формирующих управляющие гироскопические моменты) и возможные сингулярные состояния этой схемы исключаются с помощью явного векторного закона настройки СГК. Введем обозначения

$$\begin{aligned} x_{12} &= x_1 + x_2 \ ; \ x_{34} &= x_3 + x_4 \ ; \\ y_{12} &= y_1 + y_2 \ ; \ y_{56} &= y_5 + y_6 \ ; \\ z_{34} &= z_3 + z_4 \ ; \quad z_{56} &= z_5 + z_6 \ ; \\ \widetilde{x}_{yx} &= \frac{x_{12}}{\sqrt{4 - y_{12}^2}} \ ; \ \widetilde{x}_{zx} &= \frac{x_{34}}{\sqrt{4 - z_{34}^2}} \ ; \\ \widetilde{y}_{xy} &= \frac{y_{12}}{\sqrt{4 - x_{12}^2}} \ ; \ \widetilde{y}_{zy} &= \frac{y_{56}}{\sqrt{4 - z_{56}^2}} \ ; \\ \widetilde{z}_{xz} &= \frac{z_{34}}{\sqrt{4 - x_{34}^2}} \ ; \ \widetilde{z}_{yz} &= \frac{z_{56}}{\sqrt{4 - y_{56}^2}} \ . \end{aligned}$$

Компоненты явного векторного закона настройки

$$\mathbf{f}_{\rho}(\boldsymbol{\beta}) = \{f_{\rho x}, f_{\rho y}, f_{\rho z}\} \equiv \mathbf{0} \ (21)$$

СГК рассматриваемой схемы принима-



Рис. 6. Значения определителя матрицы Грамма при явном законе настройки СГК



Рис. 7. Оболочка области вариации КМ СГК при равномерном расположении осей подвеса ГД на поверхности конуса

ются в виде

$$f_{\rho x}(\mathbf{\beta}) \equiv \widetilde{x}_{yx} - \widetilde{x}_{zx} + \rho(\widetilde{x}_{yx}\widetilde{x}_{zx} - 1);$$
  

$$f_{\rho y}(\mathbf{\beta}) \equiv \widetilde{y}_{xy} - \widetilde{y}_{zy} + \rho(\widetilde{y}_{xy}\widetilde{y}_{zy} - 1);$$
  

$$f_{\rho z}(\mathbf{\beta}) \equiv \widetilde{z}_{xz} - \widetilde{z}_{yz} + \rho(\widetilde{z}_{xz}\widetilde{z}_{yz} - 1);$$

Аналитически доказано, что при таком законе настройки отсутствуют сингулярные состояния для всех внутренних точек области вариации нормированного суммарного КМ СГК. Этот факт демонстрируется на рис. 6, где представлены значения определителя матрицы Грамма при законе настройки (21) при  $\rho = 0.65$  для различных сечений области вариации вектора кинетического момента СГК.

В силу наличия обобщенного векторного интеграла суммарного вектора кинетического момента механической системы (КА+СГК) потребное изменение вектора нормированного КМ СГК является известной функцией **h** (t) на заданном интервале времени  $t \in T_p \equiv [t_0^p, t_f^p]$ . При законе настройки (21) для каждого момента времени имеется система шести нелинейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными – углами гиродинов  $\beta_p(t), p = 1 \div 6$  относительно осей их подвеса. Получить явное аналитическое решение такой системы весьма затруднительно, выполненная реализация численного решения по методу простой итерации оказалась вполне приемлемой. Более эффективным приемом является численное интегрирование дифференциальных соотношений, соответствующих этой алгебраической системы с учетом условия  $d \mathbf{f}_{\rho}(\boldsymbol{\beta})/dt = \mathbf{0}$ . В результате выполнения такой процедуры одновременно получаются значения векторов  $\boldsymbol{\beta}(t)$  и  $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$ , точно соответствующих потребному угловому движению корпуса КА либо КРМ. Изменение формы области вариации КМ СГК легко достигается наклоном осей подвеса ГД, рис. 7, где угол полураствора конуса равен 30°.

#### Заключение

Сформулирована новая постановка задачи оптимизации поворотного маневра космических аппаратов и роботизированных модулей с кинематическими краевыми условиями общего вида. Разработаны методы точного численного и приближенного аналитического решения этой задачи. Представлены результаты аналитического синтеза соответствующих законов гиросилового наведения и управления силовым гироскопическим комплексом кратной схемы на основе шести гиродинов. В процессе такого "профилированного" наведения естественным способом достигается слабое возбуждение упругих колебаний конструкции КА наблюдения и КРМ с упругой полезной нагрузкой за счет достаточной "гладкости" аналитически рассчитанного гиросилового управления.

Работа поддержана РФФИ (проекты 05-08-18175 и 07-08-97611) и Отделением энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН (программа 15)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Бранец В.Н., Шмыглевский П.П*. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М: Наука, 1973
- 2. Сомов Е.И., Бутырин С.А. Аналитичес-

кий синтез программного движения космических аппаратов наблюдения // Известия Самарского научного центра РАН. 2004. Т. 6. № 1.

- 3. *Сомов Е.И.* Аналитический синтез программного гиросилового управления свободнолетающим космическим роботом // Проблемы управления. 2006. № 6.
- 4. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983
- Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сорокин А.В., Платонов В.Н. Управление силовыми гирокомплексами космических аппаратов // Труды Х Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам. С.-Пб.: ЦНИИ "Электроприбор", 2003.

## OPTIMIZATION OF A ROTATION MANEUVER AND SYNTHESIS OF GYROMOMENT GUIDANCE LAWS FOR SPACECRAFT AND FREE-FLYING ROBOTS

© 2007 Ye.I. Somov

## Samara Science Centre of Russian Academy of Sciences

New statement of problem for a rotation maneuver optimizing the spacecraft and robotic modules with general kinematic boundary condition, is presented. There are considered fine numerical and approximate analytic methods for solving that problem. Some results on analytic synthesis of guidance and control of the gyromoment cluster by multiply scheme based on six gyrodines, are presented.