УДК 531.383 : 629.78 : 681.51

ОЦЕНКА РЕАЛИЗУЕМОСТИ ПОВОРОТНОГО МАНЕВРА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НАКОПЛЕННОГО КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА СИЛОВОГО ГИРОКОМПЛЕКСА

© 2008 Е.И. Сомов, С.С. Мещеряков

Самарский научный центр РАН

Представляются методы априорной гарантирующей оценки реализуемости поворотного маневра космического аппарата при неопределенности накопленного кинетического момента силовых гироскопических комплексов кратных схем на основе четырех и шести гиродинов.

Введение

При среднесрочном наземном планировании работы КА информационного назначения (спутников землеобзора, метеорологии, связи, геодезии, навигации и т.д.) очень актуальной является проблема априорной оценки реализуемости очередного поворотного маневра (ПМ) космического аппарата (КА) с помощью силовых гироскопических комплексов (СГК) с учетом неопределенности вектора накопленного кинетического момента (КМ) [1]. В статье представляются методы решения этой проблемы применительно к СГК двух кратных схем на основе четырех и шести гиродинов.

Силовые гирокомплексы кратных схем

В классе гиродинных систем масса СГК будет минимальной, если при наименьшем числе $m \geq 4$ используемых гиродинов (ГД) он обеспечивает потребную область вариации суммарного КМ без непроходимых сингулярных состояний. Как известно [2], применение групп (в простейшем случае пар) ГД с коллинеарными осями подвеса дает очень важное преимущество при формировании схемы СГК – начиная с числа ГД $m = 6$ сингулярные состояния такой схемы во всех внутренних точках области $\mathbf{S}$ являются *строго* проходимыми. Коллинеарная пара безупорных ГД в оригинальной работе *J.W.Crenshaw* (1973) названа *Scissored Pair Ensemble* (*SPE*), а избыточные кратные схемы на основе трех и двух коллинеарных пар ГД – как *3-SPE* и *2-SPE* соответственно. Некоторые внутренние сингулярные состояния схемы *2-SPE* на основе четырех ГД являются лишь *условно* проходимыми, поэтому при применении этой схемы приходится существенно ограничивать используемую область вариации суммарного КМ либо привлекать сложные адаптивные законы настройки СГК. Достоинство кратной схемы СГК на основе 6 ГД, представленной двумя коллинеарными группами – по три ГД в каждой группе, заключается в ее отказоустойчивости, но она

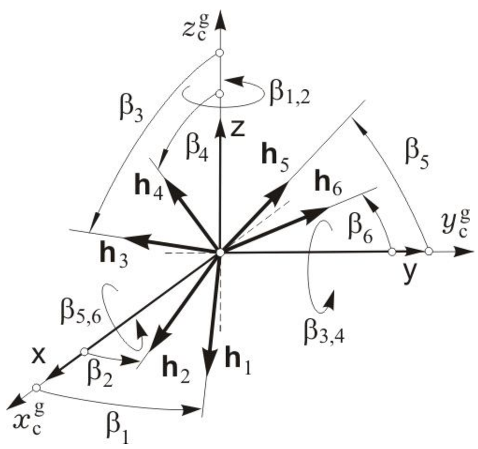

Рис. 1. Схема *3-SPE* и отсчет углов ГД

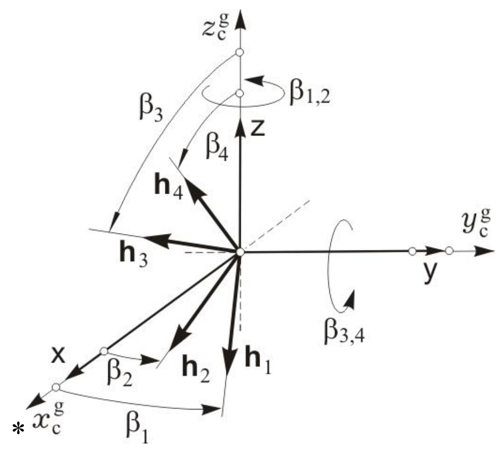

Рис. 2. Схема *2-SPE* и отсчет углов ГД

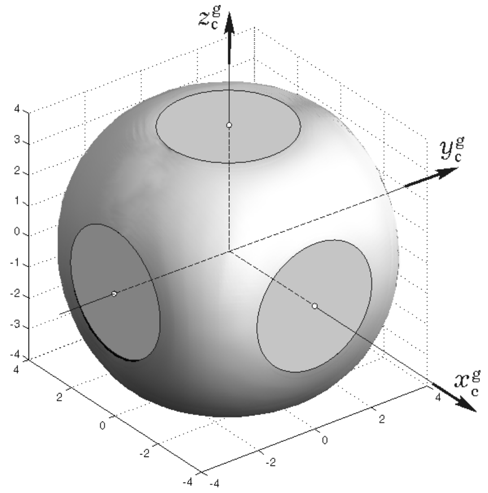

Рис. 3. Оболочка области вариации КМ схемы *3-SPE*

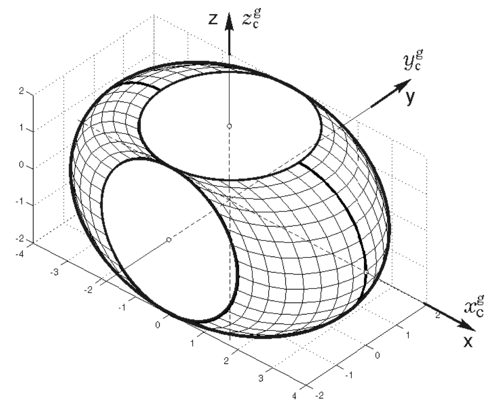

Рис. 4. Оболочка области вариации КМ схемы *2-SPE*

“проигрывает” схемам *2-SPE* и *3-SPE* по сложности алгоритмов настройки. Поэтому в классе гиродинных систем наиболее рациональными схемами СГК являются схема *3-SPE* на базе 6 ГД (рис. 1) и минимально избыточная схема *2-SPE* ($m = 4$, рис. 2). На этих рис. представлены канонические структуры указанных схем, когда оси подвесов ГД параллельны осям ортогонального канонического гироскопического базиса (КГБ) $\mathbf{G}^{\mathrm{c}}(\mathrm{O}x_{\mathrm{c}}^{\mathrm{g}}y_{\mathrm{c}}^{\mathrm{g}}z_{\mathrm{c}}^{\mathrm{g}})$, который будем считать совпадающим с базисом $\mathbf{B}(\mathrm{O}xyz)$ связанной с корпусом КА системе координат (ССК). Оболочки областей $\mathbf{S}$ вариации нормированного КМ данных схем представлены на рис. 3 и рис. 4.

Математическая постановка задач

Схема *2-SPE* является частным случаем схемы *3-SPE* (при отсутствии в ней третьей пары ГД), поэтому далее более подробно выполняется анализ схемы *3-SPE* и указываются дополнительные аналитические результаты, которые удается получить для схемы *2-SPE*. Свяжем с каждым $p = 1 \div m$ из m ГД, имеющих вектор КМ $\mathbf{H}_p = h_g\,\mathbf{h}_p$ с одинаковым модулем h_g , правый триэд его осей: орт $\mathbf{h}_p(\beta_p)$ вектора КМ ГД, положение которого определяется углом β_p, фиксированный в ССК орт $\mathbf{g}_p$ оси подвеса ГД и орт $\mathbf{p}_p(\beta_p) = \mathbf{h}_p(\beta_p) \times \mathbf{g}_p$.

Введем вектор-столбец $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_p\}$, составленный из углов поворота ГД относительно осей их подвеса, см. рис. 1 и рис. 2. Тогда вектор суммарного нормированного КМ СГК $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \sum \mathbf{h}_p(\beta_p)$, а парковые состояния СГК, когда вектор нормированного КМ СГК $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}$, представлены на рис. 5 и рис. 6. Орт $\mathbf{m}_p^g(\beta_p) = \partial \mathbf{h}_p(\beta_p) / \partial \beta_p = \mathbf{g}_p \times \mathbf{h}_p(\beta_p)$ гирос-

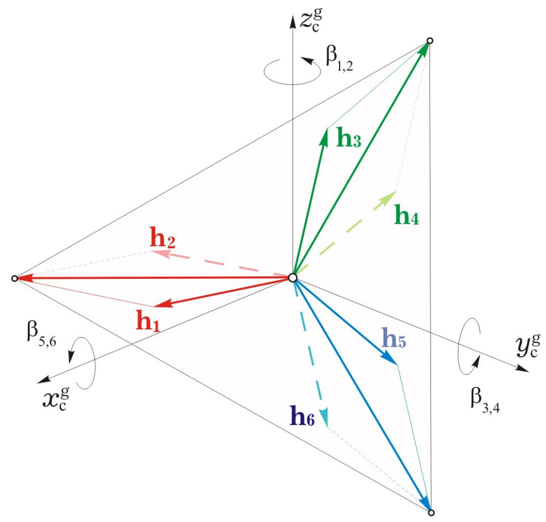

Рис. 5. Парковое состояние схемы *3-SPE*

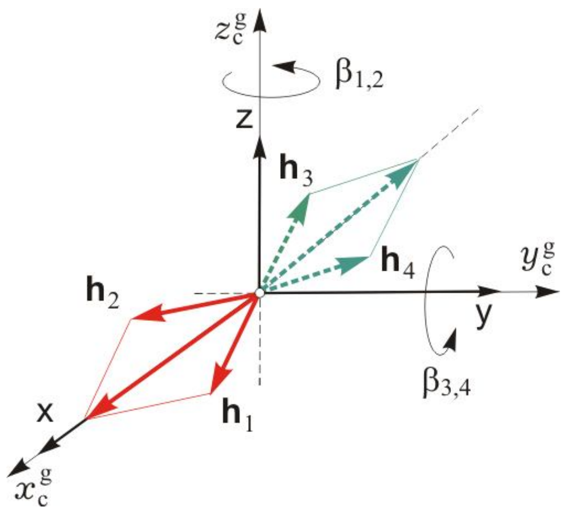

Рис. 6. Парковое состояние схемы *2-SPE*

копического момента p -го ГД всегда противоположен орту $\mathbf{p}_p(\beta_p)$.

Введем кватернион $\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_0, \boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i, i = 1 \div 3\}$ ориентации связанного с корпусом КА базиса $\mathbf{B}$ относительно некоторого инерциального базиса $\mathbf{I}$ и вектор $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_i\}$ абсолютной угловой скорости КА. Все векторы и тензор инерции корпуса КА $\mathbf{J}$ представляются в ССК и при $m \geq 4$ определяется прямоугольная матрица Якоби $\mathbf{A}_{\text{h}}(\boldsymbol{\beta}) = \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta} = [\mathbf{m}_p^g(\beta_p), p = 1 \div m]$.

Пусть $\forall t \in \mathrm{T}_{\mathrm{r}} \equiv [t_{\mathrm{i}}, t_{\mathrm{f}}]$ заданы функции времени $\boldsymbol{\Lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}^*(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{\varepsilon}(t)$, представляющие программное угловое движение базиса $\mathbf{B}$ относительно базиса $\mathbf{I}$. В рамках прецессионной теории силовых гироскопов при отсутствии внешнего возмущающего момента угловое движение КА удовлетворяет векторному интегралу нормированного КМ механической системы “КА+СГК” в виде

$$\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{k}(t) + \mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}(t)) = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(t) \circ \mathbf{g}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{I}} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t), \quad (1)$$

где нормированный КМ корпуса КА $\mathbf{k}(t) \equiv \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t)/h_g$, а $\mathbf{g}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{I}} \equiv \boldsymbol{\Lambda}(t_{\mathrm{i}}) \circ \mathbf{g}(t_{\mathrm{i}}) \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(t_{\mathrm{i}})$ – вектор накопленного КМ, постоянный в инерциальном базисе $\mathbf{I}$. Угловое движение КА описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}; \\ &\dot{\mathbf{k}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{g}(t) = -\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь вектор $\dot{\mathbf{k}}(t) \equiv \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)/h_g$ и нормированный вектор управляющего момента СГК $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ вычисляется в КГБ по формуле

$$\begin{aligned} &\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \sum \mathbf{m}_p^g(\beta_p)\dot{\beta}_p = \mathbf{A}_{\text{h}}(\boldsymbol{\beta})\,\mathbf{u}^{\mathrm{g}}; \\ &\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^{\mathrm{g}}; \quad \dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{g}} = \ddot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{v}^{\mathrm{g}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где “управлением” считается вектор-столбец $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{u}^{\mathrm{g}} = \{\mathrm{u}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{g}}\}$ с компонентами $\mathrm{u}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{g}}$ скоростей прецессии ГД, ограниченных по модулю заданным значением $\mathrm{u}_g^m = \mathrm{const}$. При этом вектор-столбец производных “управления” $\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{g}} = \ddot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{v}^{\mathrm{g}} = \{\mathrm{v}_p^g\}$ имеет компоненты v_p^g угловых ускорений ГД относительно осей подвеса, также ограниченные по модулю заданным значением $\mathrm{v}_g^m = \mathrm{const}$.

Верхняя оценка модуля $g_{\mathrm{i}} \equiv |\mathbf{g}_{\mathrm{i}}| \leq g_0$ вектора $\mathbf{g}_{\mathrm{i}} \equiv \mathbf{g}(t_{\mathrm{i}})$ накопленного КМ в ССК в начальный момент времени $t = t_{\mathrm{i}}$ считается известной, но направление этого вектора неопределенно, т.е. оно может быть произвольным. Модуль g_{i} вектора $\mathbf{g}_{\mathrm{i}}$ принимается постоянным и максимально допустимым, что справедливо при существенно меньшем темпе накопления КМ по сравнению с темпом поворотного маневра КА.

Решаемые в статье задачи состоят:

в создании явных функций настройки СГК (распределения суммарного КМ СГК между гиродинами) для исключения избыточности и возможных сингулярных состояний;

в разработке метода оперативной бортовой гарантирующей оценки реализуемости очередного ПМ КА при известном (измеренном и вычисленном) векторе накопленного КМ;

в разработке метода априорной наземной гарантирующей оценки реализуемости последовательности ПМ КА на заданных смежных интервалах времени при неопределенности направления накопленного КМ.

Явные законы настройки СГК

Введем обозначения проекций ортов КМ каждого ГД на оси ортогонального КГБ $\mathbf{G}^{\mathrm{c}}(\mathrm{O}x_{\mathrm{c}}^{\mathrm{g}}y_{\mathrm{c}}^{\mathrm{g}}z_{\mathrm{c}}^{\mathrm{g}})$, см. рис. 1 и рис. 2:

$$x_1 = C_1 \equiv \cos\beta_1; \; x_2 = C_2 \equiv \cos\beta_2;$$
$$y_1 = S_1 \equiv \sin\beta_1; \; y_2 = S_2 \equiv \sin\beta_2;$$
$$x_3 = S_3 \equiv \sin\beta_3; \; x_4 = S_4 \equiv \sin\beta_4;$$
$$z_3 = C_3 \equiv \cos\beta_3; \; z_4 = C_4 \equiv \cos\beta_4;$$
$$y_5 = C_5 \equiv \cos\beta_5; \; y_6 = C_6 \equiv \cos\beta_6;$$
$$z_5 = S_5 \equiv \sin\beta_5; \; z_6 = S_6 \equiv \sin\beta_6.$$

Тогда вектор-столбец нормированного суммарного КМ СГК $\mathbf{h}$ в ортогональном КГБ $\mathbf{G}^{\mathrm{c}}$ и градиентная матрица Якоби $\mathbf{A}_{\text{h}}(\boldsymbol{\beta}) = \partial \mathbf{h} / \partial \boldsymbol{\beta}$ представляются для схемы *3-SPE* в виде

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 + S_3 + S_4 \\ S_1 + S_2 + C_5 + C_6 \\ C_3 + C_4 + S_5 + S_6 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{\text{h}}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 & 0 & -S_5 & -S_6 \\ 0 & 0 & -S_3 & -S_4 & C_5 & S_6 \end{bmatrix},$$

а для схемы *2-SPE* – в виде

$$\mathbf{h}=\begin{bmatrix}\mathsf{x}\\ \mathsf{y}\\ \mathsf{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1+C_2+S_3+S_4\\ S_1+S_2\\ C_3+C_4\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{\mathsf{h}}(\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}-S_1 & -S_2 & C_3 & C_4\\ C_1 & C_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -S_3 & -S_4\end{bmatrix}.$$

Сингулярные состояния СГК возникает при таких положениях ГД, когда матрица Грамма $\mathbf{G}(\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}))=\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta})\equiv\mathbf{A}_{\mathsf{h}}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{A}_{\mathsf{h}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta})$ теряет полный ранг, т.е. при $\mathsf{G}\equiv\det(\mathbf{G}(\boldsymbol{\beta}))=0$. Определитель $\mathsf{G}(\boldsymbol{\beta})$ матрицы Грамма представляет объем области вариации вектора нормированного управляющего гироскопического момента $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$, соответствующего значению $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$.

Угловые скорости и ускорения каждого ГД относительно оси подвеса ограничены по модулю заданными постоянными u_g^m и v_g^m, а именно

$$|\dot{\beta}_p(t)|\le \mathrm{u}_g^m;\ |\ddot{\beta}_p(t)|\le \mathrm{v}_g^m \quad t\in\mathrm{T}_{\mathrm{r}}, \quad (4)$$

что соответствует ограниченным ресурсам его привода. Такие ограничения существенно нелинейным образом (3) “трансформируются” в ограничения на компоненты вектора нормированного управляющего момента СГК $\mathbf{m}^g(\boldsymbol{\beta},\dot{\boldsymbol{\beta}})$ и производной от него по времени, т.е. моментные характеристики СГК зависят как от предыстории, так и текущего расположения векторов КМ гиродинов в его составе.

Вводятся обозначения

$$x_{12}=x_1+x_2;\ x_{34}=x_3+x_4;$$

$$y_{12}=y_1+y_2;\ y_{56}=y_5+y_6;$$

$$z_{34}=z_3+z_4;\quad z_{56}=z_5+z_6;$$

$$\tilde{x}_{12}=\frac{x_{12}}{\sqrt{4-y_{12}^2}};\ \tilde{x}_{34}=\frac{x_{34}}{\sqrt{4-z_{34}^2}};$$

$$\tilde{y}_{12}=\frac{y_{12}}{\sqrt{4-x_{12}^2}};\ \tilde{y}_{56}=\frac{y_{56}}{\sqrt{4-z_{56}^2}};$$

$$\tilde{z}_{34}=\frac{z_{34}}{\sqrt{4-x_{34}^2}};\ \tilde{z}_{56}=\frac{z_{56}}{\sqrt{4-y_{56}^2}}.$$

Компоненты явного векторного закона настройки $\mathbf{f}_\rho(\boldsymbol{\beta})=\{f_{\rho1},f_{\rho2},f_{\rho3}\}\equiv\mathbf{0}$ СГК схемы *3-SPE* принимаются в виде

$$\begin{aligned}f_{\rho x}(\boldsymbol{\beta})&=f_{\rho1}(\boldsymbol{\beta})\equiv\tilde{x}_{12}-\tilde{x}_{34}+\rho(\tilde{x}_{12}\tilde{x}_{34}-1);\\ f_{\rho y}(\boldsymbol{\beta})&=f_{\rho2}(\boldsymbol{\beta})\equiv\tilde{y}_{56}-\tilde{y}_{12}+\rho(\tilde{y}_{56}\tilde{y}_{12}-1);\quad (5)\\ f_{\rho z}(\boldsymbol{\beta})&=f_{\rho3}(\boldsymbol{\beta})\equiv\tilde{z}_{34}-\tilde{z}_{56}+\rho(\tilde{z}_{34}\tilde{z}_{56}-1),\end{aligned}$$

где постоянный параметр ρ удовлетворяет условию $0<\rho<1$.

Для значении $\rho=2\sqrt{2}/3\approx 0.9428$ парковое состояние схемы *3-SPE* определяется аналитически: углы ГД в парах составляют $\pm 45^\circ$ относительно плоскости, которая имеет нормаль, совпадающую с главной биссектрисой координатных плоскостей КГБ, см. рис. 5. При обозначении $a=1/\sqrt{2}$ такому парковому состоянию СГК соответствуют значения

$$x_1=x_2=a;\ \ y_1=y_2=-a;$$

$$z_3=z_4=a;\ x_3=x_4=-a;$$

$$y_5=y_6=a;\ z_5=z_6=-a.$$

При значении $\rho\approx 0.87$ в парковом состоянии СГК по схеме *3-SPE* достигается глобальный максимум определителя $\mathsf{G}(\mathbf{h})=\mathsf{G}(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z})$, именно $\mathrm{gl\,max}\,\mathsf{G}=\mathsf{G}^{\mathrm{m}}=\mathsf{G}(0{,}0{,}0)=8$, однако даже в сечении $\mathsf{z}=0$ области $\mathbf{S}$ вариации нормированного КМ СГК проявляется существенно несимметричный и многоэкстремальный характер зависимости $\mathsf{G}(\mathsf{x},\mathsf{y},0)$, (рис. 7), в частности, имеется глубокий провал с дном $\mathsf{G}(2,-2,0)\approx 3.3$.

При $\rho=0.65$ в парковом состоянии такого СГК значение $\mathsf{G}(0{,}0{,}0)=6$, а в сечении $\mathsf{z}=0$ области $\mathbf{S}$ вариации КМ зависимость $\mathsf{G}(\mathsf{x},\mathsf{y},0)$ имеет вполне приемлемую несимметричность и многоэкстремальную “волнистость”, (рис. 8).

Важное достоинство векторного закона (5) настройки СГК заключается в возможности аналитического симметричного “размещения” внутри области $\mathbf{S}$ двух сфер, а именно сферы $\mathbf{S}^g$ и сферы $\mathbf{S}_0^g$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. радиус r^g сферы $\mathbf{S}^g$ соответствует потребной области вариации нормированного КМ СГК с учетом возможного накопленного КМ;

2. радиус $r_0^g=r^g-g_0$ сферы $\mathbf{S}_0^g$ соответствует потребной области вариации нормированного КМ СГК без учета накопленного КМ;

3. для $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})\in\partial\mathbf{S}^g$ (на поверхности сферы $\mathbf{S}^g$) определитель Грамма $\mathsf{G}(\boldsymbol{\beta})$

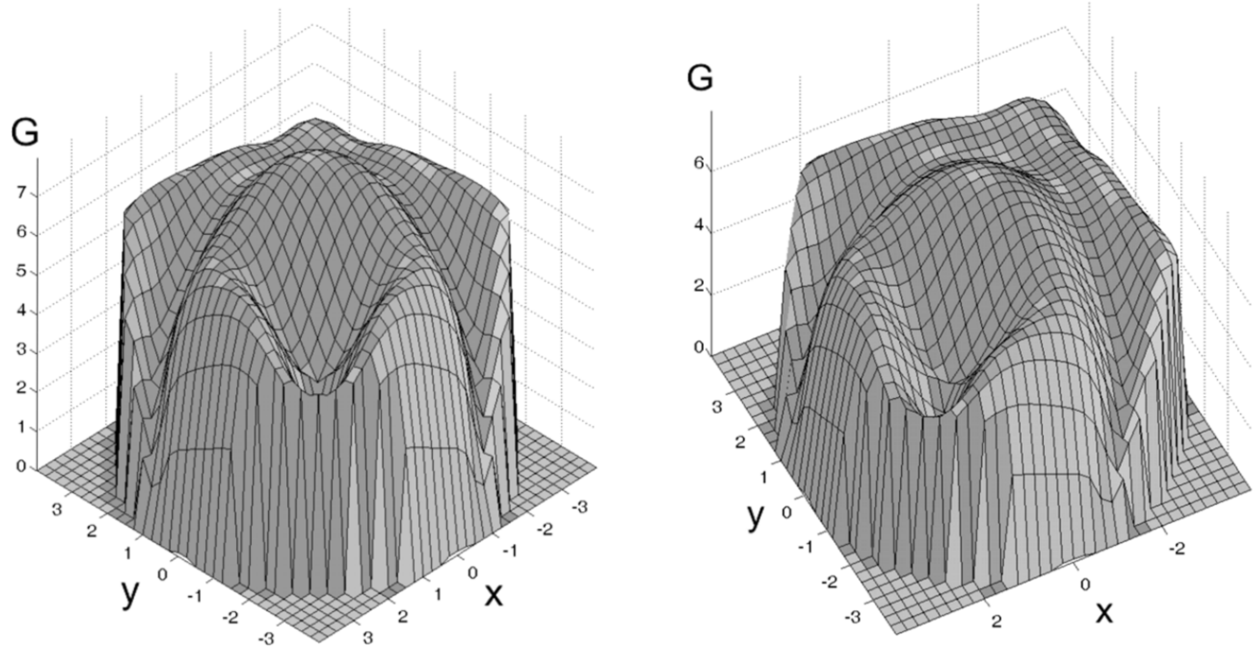

Рис. 7. Значения определителя G матрицы Грамма в сечении $\mathsf{z}=0$ при $\rho=0.87$

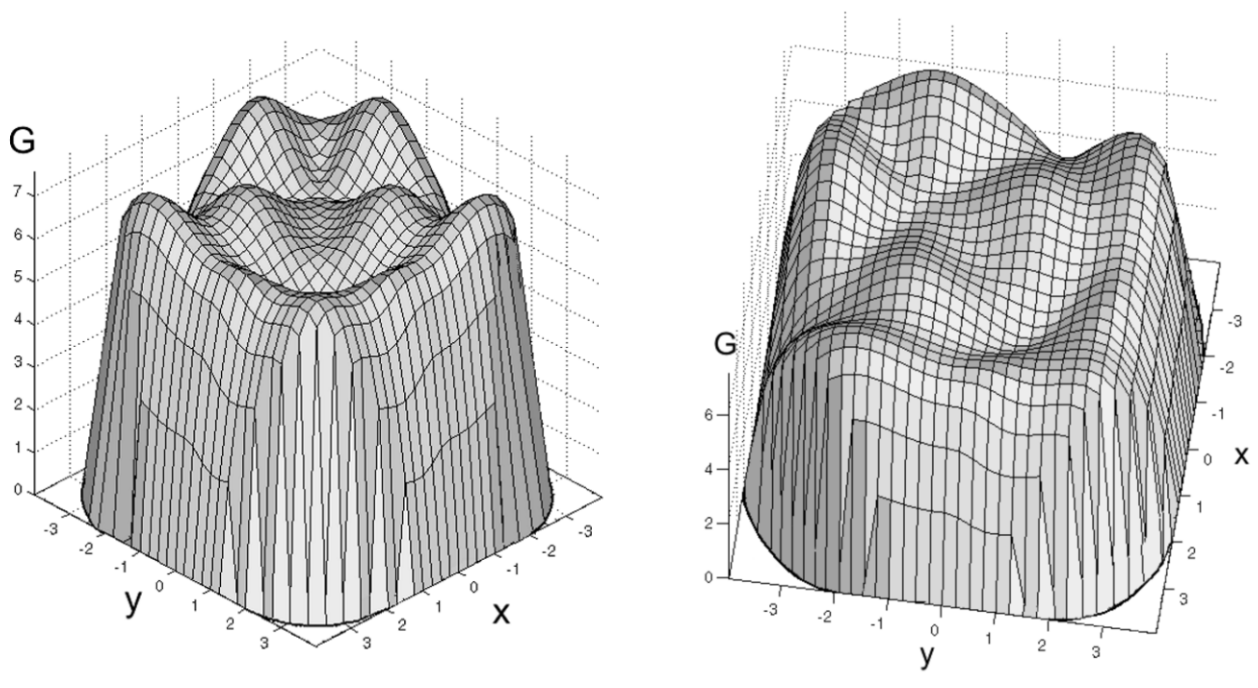

Рис. 8. Значения определителя G матрицы Грамма в сечении $\mathsf{z}=0$ при $\rho=0.65$

принимает положительные значения $\mathsf{G}(\mathbf{h}(\beta))=\mathsf{G}^g(\mathbf{h}(\beta))>0$, причем $d\,\mathsf{G}^{\mathrm{m}} \le \mathsf{G}^g(\mathbf{h}(\beta)) << \mathsf{G}_{\mathrm{m}}$, где $\mathsf{G}_{\mathrm{m}} = \mathrm{gl}\min \mathsf{G}(\boldsymbol{\beta})$ $\exists \mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{S}_0^g$ и постоянный положительный коэффициент $d << 1$;

4. при $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}) \in \mathbf{S}^g/\mathbf{S}_0^g$ (в шаровом слое $\mathbf{S}^g/\mathbf{S}_0^g$) определитель Грамма $\mathsf{G}(\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}))$ монотонно уменьшается с возрастанием модуля нормированного вектора $\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta})$ КМ СГК.

Для компактного представления условий однозначной разрешимости вытекающего из (1) векторного соотношения

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\beta}(t)) = \mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{g}(t) - \mathbf{k}(t), \qquad (6)$$

где $\mathbf{h}(t) = \{\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t), \mathsf{z}(t)\}$ является известной векторной функцией, относительно синусов и косинусов всех углов $\beta_p(t)$ гиродинов, вводятся обозначения

$$p_{12} = \sqrt{4-(x_{12})^2}\ ;\ q_{12} = \sqrt{4-(y_{12})^2}\ ;$$

$$p_{34} = \sqrt{4-(z_{34})^2}\ ;\ q_{34} = \sqrt{4-(x_{34})^2}\ ;$$

$p_{56}=\sqrt{4-(y_{56})^2}$; $q_{56}=\sqrt{4-(z_{56})^2}$;

$x_{12}=\dfrac{\mathsf{x}+\Delta_x}{2}$; $x_{34}=\dfrac{\mathsf{x}-\Delta_x}{2}$;

$x_{56}=\dfrac{\mathsf{y}+\Delta_y}{2}$; $y_{12}=\dfrac{\mathsf{y}-\Delta_y}{2}$;

$z_{34}=\dfrac{\mathsf{z}+\Delta_z}{2}$; $z_{56}=\dfrac{\mathsf{z}-\Delta_z}{2}$;

$d_x=q_{12}+p_{34}$;

$d_y=q_{56}+p_{12}$;

$d_z=q_{34}+p_{56}$.

Условия однозначной разрешимости уравнения (6) имеют вид

$$\Delta_x=d_x\{1-[1-4\rho((q_{12}-p_{34})(\mathsf{x}/2)+\rho(q_{12}p_{34}-(\mathsf{x}/2)^2))/d_x^2]^{1/2}\}/\rho\ ;$$

$$\Delta_y=d_y\{1-[1-4\rho((q_{56}-p_{12})(\mathsf{y}/2)+\rho(q_{56}p_{12}-(\mathsf{y}/2)^2))/d_y^2]^{1/2}\}/\rho\ ;$$

$$\Delta_z=d_z\{1-[1-4\rho((q_{34}-p_{56})(\mathsf{z}/2)+\rho(q_{34}p_{56}-(\mathsf{z}/2)^2))/d_z^2]^{1/2}\}/\rho \qquad (7)$$

и при введении вектора-столбца $\boldsymbol{\Delta}(t)=\{\Delta_x(t),\Delta_y(t),\Delta_z(t)\}$ очевидным образом преобразуются к нелинейному векторному уравнению $\boldsymbol{\Delta}(t)=\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{h}(t),\boldsymbol{\Delta}(t))$. Получить аналитическое решение этого векторного уравнения весьма затруднительно, но его численное решение достигается практически мгновенно по методу простой итерации – при рациональном выборе начального точки итерационного цикла достаточно лишь 1-2 итерации для получения результата с приемлемой точностью. Далее вычисление синусов и косинусов углов $\beta_p(t)$ всех шести гиродинов выполняется по явным аналитическим соотношениям

$a_1=\dfrac{\mathsf{x}+\Delta_x}{2}$; $b_1=\dfrac{\mathsf{y}-\Delta_y}{2}$;

$c_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2}$; $d_1=\sqrt{4-c_1^2}\,/\,c_1$;

$a_2=\dfrac{\mathsf{z}+\Delta_z}{2}$; $b_2=\dfrac{\mathsf{x}-\Delta_x}{2}$;

$c_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2}$; $d_2=\sqrt{4-c_2^2}\,/\,c_2$;

$a_3=\dfrac{\mathsf{y}+\Delta_y}{2}$; $b_3=\dfrac{\mathsf{z}-\Delta_z}{2}$;

$c_3=\sqrt{a_3^2+b_3^2}$; $d_3=\sqrt{4-c_3^2}\,/\,c_3$;

первая пара (ГД 1 и ГД 2):

$x_1=\dfrac{a_1-d_1b_1}{2}$; $y_1=\dfrac{b_1+d_1a_1}{2}$;

$x_2=\dfrac{a_1+d_1b_1}{2}$; $y_2=\dfrac{b_1-d_1a_1}{2}$;

вторая пара (ГД 3 и ГД 4):

$x_3=\dfrac{b_2+d_2a_2}{2}$; $z_3=\dfrac{a_2-d_2b_2}{2}$;

$x_4=\dfrac{b_2-d_2a_2}{2}$; $z_4=\dfrac{a_2+d_2b_2}{2}$;

третья пара (ГД 5 и ГД 6):

$y_5=\dfrac{a_3-d_3b_3}{2}$; $z_5=\dfrac{b_3+d_3a_3}{2}$;

$y_6=\dfrac{a_3+d_3b_3}{2}$; $z_6=\dfrac{b_3-d_3a_3}{2}$.

При явном законе настройки (5) схемы *3-SPE* принципиально отсутствуют сингулярные состояния СГК для всех внутренних точек области вариации $\mathbf{S}$ его суммарного вектора КМ $\mathbf{h}(t)$. Значения углов $\beta_p(t)\in[0,2\pi]$ гиродинов представляют интерес только для графической интерпретации результатов, явное однозначное аналитическое представление этих углов получается очевидным образом.

Для схемы *2-SPE* используются единственная скалярная функция распределения нормированного КМ СГК между первой и второй парами гиродинов

$$f_{\rho x}(\boldsymbol{\beta})=f_{\rho 1}(\boldsymbol{\beta})\equiv\tilde{x}_{12}-\tilde{x}_{34}+\rho(\tilde{x}_{12}\tilde{x}_{34}-1)=0 \quad (8)$$

и соотношения

$x_{12}=\mathsf{x}_1=\dfrac{\mathsf{x}+\Delta_x}{2}$; $x_{34}=\mathsf{x}_2=\dfrac{\mathsf{x}-\Delta_x}{2}$;

$p_{12}=\sqrt{4-(x_{12})^2}$; $q_{34}=\sqrt{4-(x_{34})^2}$;

$y_{12}=\mathsf{y}$; $q_{12}=q_{\mathsf{y}}=\sqrt{4-(\mathsf{y})^2}$;

$z_{34}=\mathsf{z}$; $p_{34}=p_{\mathsf{z}}-\sqrt{4-(\mathsf{z})^2}$;

$d_x=q_{\mathsf{y}}+p_{\mathsf{z}}$.

Это позволяет получить явную однозначную аналитическую зависимость

$$\Delta_x=d_x\{1-[1-4\rho((q_{\mathsf{y}}-p_{\mathsf{z}})(\mathsf{x}/2)+\rho(q_{\mathsf{y}}p_{\mathsf{z}}-(\mathsf{x}/2)^2))/d_x^2]^{1/2}\}/\rho$$

и затем аналитическое представление как синусов и косинусов углов $\beta_p(t)$, так и собственно значения этих углов всех четырех гиродинов. При законе настройки (8) СГК данной схемы внутри области вариации его суммарного нормированного КМ остается лишь множество сингулярных состояний $\mathbf{Q}_{yz}(\beta)=\mathbf{Q}_y^p\cup\mathbf{Q}_z^p$ – два не пересекающихся между собой подмножества в виде двух полуэллипсов в сочетании с сингулярными направлениями вариации КМ пар гиродинов

$$\mathbf{Q}_s^p = \mathbf{Q}_s^* \cap \mathbf{S}_s^*;\quad \mathbf{S}_s^* = \{\mathsf{s}=0; |\mathsf{s}_1| = |\mathsf{s}_2| = 1, \mathsf{s} = \mathsf{y},\mathsf{z};\tag{9}$$

$$\mathbf{Q}_y^* = \{(x_{34}/2\rho))^2 + (\mathsf{z}/2)^2 = 1; x_{34} < 0\};$$

$$\mathbf{Q}_z^* = \{(x_{12}/2\rho))^2 + (\mathsf{y}/2)^2 = 1; x_{12} > 0\}.$$

В парковом состоянии СГК схемы *2-SPE* глобально оптимальной как по объему области вариации нормированного управляющего гироскопического момента $\mathbf{m}^g$, так и по гарантированной величине его модуля в произвольном направлении, является конфигурация

$$\beta_{1,2} = \pm\beta^p;\ \beta_{3,4} = -(\pi/2) \pm \beta^p,$$

где при значении $\rho = 2\sqrt{6}/5$ угол $\beta^p = \arccos\sqrt{2/3} = 35^o15'$, (рис. 6). В этом состоянии достигается глобальный максимум $\mathrm{gl}\max \mathsf{G} = \mathsf{G}^{\mathrm{m}} = 64/27 \approx 2.37$ определителя G матрицы Грамма. Значение этого определителя монотонно уменьшается с возрастанием модуля нормированного КМ СГК и обращается в нуль на множестве сингулярных состояний (9).

Расчет характеристик движения ГД

Наличие векторного интеграла КМ (1) и применение известных правил дифференцирования вектора с учетом подвижности связанного базиса $\mathbf{B}$ относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$ позволяет получить явное аналитическое представление вектора $\mathsf{h}(t) \subset \mathbf{S}$ и его производных по времени $t \in \mathrm{T}_{\mathrm{r}}$ для произвольного вектора $\mathbf{g}(t) \equiv \tilde{\Lambda}(t) \circ \mathbf{g}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{I}} \circ \Lambda(t)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{h}(t) &= \mathbf{g}(t) - \mathbf{k}(t);\\ \dot{\mathsf{h}}(t) &= \mathbf{g}_1(t) - \dot{\mathbf{k}}(t);\\ \ddot{\mathsf{h}}(t) &= \mathbf{g}_2(t) - \ddot{\mathbf{k}}(t) \end{aligned}\tag{10}$$

где

$$\mathbf{g}_1(\mathrm{t}) = -\boldsymbol{\omega}(\mathrm{t}) \times \mathbf{g}(\mathrm{t});$$

$$\mathbf{g}_2(\mathrm{t}) = -\dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathrm{t}) \times \mathbf{g}(\mathrm{t}) - \boldsymbol{\omega}(\mathrm{t}) \times \mathbf{g}_1(\mathrm{t}),$$

кватернион $\Lambda(t)$, векторы

$$\boldsymbol{\omega}(\mathrm{t}),\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t),$$

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \text{ и } \mathbf{k}(t) = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}(t)/h_g,$$

$$\dot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}(t)/h_g,\ \ddot{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)/h_g$$

являются известными функциями времени. В результате получается явное аналитическое представлению вектора $\mathsf{h}(t) = \{\mathsf{x}(t), \mathsf{y}(t), \mathsf{z}(t)\}$ и его производных в КГБ.

В свою очередь аналитические зависимости

$$\dot{\mathsf{h}}(t) = \partial\mathsf{h}/\partial\boldsymbol{\beta}\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}_{\mathsf{h}}(\boldsymbol{\beta})\,\dot{\boldsymbol{\beta}};$$

$$\ddot{\mathsf{h}}(t) = \mathbf{A}_{\mathsf{h}}(\boldsymbol{\beta})\,\ddot{\boldsymbol{\beta}} + [\partial(\mathbf{A}_{\mathsf{h}}(\boldsymbol{\beta})\ \dot{\boldsymbol{\beta}})/\partial\boldsymbol{\beta}\,]\,\dot{\boldsymbol{\beta}}$$

с учетом производных компонентов (5) явного векторного закона настройки СГК по схеме *3-SPE* для индексов $s = 1 \div 3$ позволяют получить явные формулы для однозначного аналитического расчета векторов-столбцов $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$ и $\ddot{\boldsymbol{\beta}}(t)$. Здесь основная задача состоит в аналитическом обращении матрицы

$$\left\langle \partial f_{\rho s}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}\,, \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \partial f_{\rho s}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}\,, \ddot{\boldsymbol{\beta}} \right\rangle + \left\langle \partial([\partial f_{\rho s}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}]\,\dot{\boldsymbol{\beta}})/\partial\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}} \right\rangle = 0\text{'}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathsf{h}}(\boldsymbol{\beta}) \\ \partial f_{\rho 1}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta} \\ \partial f_{\rho 2}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta} \\ \partial f_{\rho 3}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & z_3 & z_4 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & -z_5 & -z_6 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_4 & y_5 & y_6 \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} & \tilde{a}_{44} & 0 & 0 \\ \tilde{a}_{51} & \tilde{a}_{52} & 0 & 0 & \tilde{a}_{55} & \tilde{a}_{56} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{63} & \tilde{a}_{64} & \tilde{a}_{65} & \tilde{a}_{66} \end{bmatrix}$$

с учетом 6 тождеств

$$x_1^2 + y_1^2 \equiv 1;\ x_2^2 + y_2^2 \equiv 1;$$

$$x_3^2 + z_3^2 \equiv 1;\ x_4^2 + z_4^2 \equiv 1;$$

$$y_5^2 + z_5^2 \equiv 1;\ y_6^2 + z_6^2 \equiv 1.$$

При обозначениях

$$s_{12} = q_{12} - \rho x_{12};\ s_{34} = q_{34} - \rho z_{34};$$

$$s_{56} = q_{56} - \rho y_{56};\ v_{12} = p_{12} + \rho y_{12};$$

$$v_{34} = p_{34} + \rho x_{34};\ v_{56} = p_{56} + \rho z_{56};$$

$$r_{12} = 1 + y_1 y_2 + x_1 x_2;$$

$r_{34} = 1 + z_3 z_4 + x_3 x_4$;

$r_{56} = 1 + z_5 z_6 + y_5 y_6$;

$\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \{\langle \partial([\partial f_{\rho s}(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta}]\,\dot{\boldsymbol{\beta}})/\partial\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}\rangle, s = 1 \div 3\}$

получаются аналитические соотношения

$$\tilde{a}_{41} = -v_{34}\,\frac{4y_1 - r_{12}y_{12}}{p_{34}(q_{12})^3};$$

$$\tilde{a}_{42} = -v_{34}\,\frac{4y_2 - r_{12}y_{12}}{p_{34}(q_{12})^3};$$

$$\tilde{a}_{43} = -s_{12}\,\frac{4z_3 - r_{34}z_{34}}{q_{12}(p_{34})^3};$$

$$\tilde{a}_{44} = -s_{12}\,\frac{4z_4 - r_{34}z_{34}}{q_{12}(p_{34})^3};$$

$$\tilde{a}_{51} = -s_{56}\,\frac{4x_1 - r_{12}x_{12}}{q_{56}(p_{12})^3};$$

$$\tilde{a}_{52} = -s_{56}\,\frac{4x_2 - r_{12}x_{12}}{q_{56}(p_{12})^3};$$

$$\tilde{a}_{55} = -v_{12}\,\frac{4z_5 - r_{56}z_{56}}{p_{12}(q_{56})^3};$$

$$\tilde{a}_{56} = -v_{12}\,\frac{4z_6 - r_{56}z_{56}}{p_{12}(q_{56})^3};$$

$$\tilde{a}_{63} = -v_{56}\,\frac{4x_3 - r_{34}x_{34}}{p_{56}(q_{34})^3};$$

$$\tilde{a}_{64} = -v_{56}\,\frac{4x_4 - r_{34}x_{34}}{p_{56}(q_{34})^3};$$

$$\tilde{a}_{65} = -s_{34}\,\frac{4y_5 - r_{56}y_{56}}{q_{34}(p_{56})^3};$$

$$\tilde{a}_{66} = -s_{34}\,\frac{4y_6 - r_{56}y_{56}}{q_{34}(p_{56})^3},$$

матрица $\tilde{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\beta}) = (\tilde{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\beta}))^{-1}$ и искомое аналитическое представление векторов-столбцов

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t) = \tilde{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\beta}(t))\{\dot{\mathbf{h}}(t), \mathbf{0}\}; \tag{11}$$

$$\ddot{\boldsymbol{\beta}}(t) = \tilde{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\beta}(t))\{\ddot{\mathbf{h}}(t), -\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})\}. \tag{12}$$

Оценка реализуемости ПМ

Бортовая гарантирующая оценка реализуемости поворотного маневра КА при известных кинематических параметрах $\boldsymbol{\Lambda}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ движения его корпуса и известном (измеренном и вычисленном) в ССК в начальный момент времени $t = t_{\text{i}}$ фиксированном векторе $\mathbf{g}_{\text{i}} \equiv \mathbf{g}(t_{\text{i}})$ накопленного КМ для СГК по схеме *3-SPE* получается проверкой для $t \in \mathrm{T}_{\text{r}}$ условия $\mathbf{h}(t) \in \mathbf{S}^g$ и далее по соотношениям (7) и (10) – (12) с явной проверкой выполнения условий (4) для каждого p-го гиродина, $p = 1 \div 6$. Здесь все вычисления осуществляются по аналитическим соотношениям, за исключением численного решения векторного уравнения $\Delta(t) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{h}(t), \Delta(t))$ (7), на сетке дискретных моментов времени из заданного интервала, причем такая сетка сгущается в окрестности моментов времени, когда компоненты вектора производной ускорения $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ обращаются в нуль либо происходит конечный разрыв их непрерывности.

В случае применения СГК по схеме *2-SPE* все вычисления для оперативной бортовой оценки реализуемости ПМ КА выполняются по явным аналитическим соотношениям.

Наземная априорная оценка реализуемости ПМ КА с учетом неопределенности направления вектора накопленного КМ осуществляется в два этапа. Согласно (10) наличие накопленного КМ приводит к смещению траектории вектора $\mathbf{h}(t)$ КМ СГК на величину вектора $\mathbf{g}(t) \equiv \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(t) \circ \mathbf{g}_{\text{i}}^{\text{I}} \circ \boldsymbol{\Lambda}(t)$. Введем обозначение орта $\mathbf{h}(t)$ вектора $\mathbf{h}(t)$.

На *этапе 1* определяется набор моментов времени $\mathrm{T}_{\text{R}} = \{t_j \in \mathrm{T}_{\text{r}}\}$, в которые достигаются максимальные значения модулей потребных угловых скоростей $\dot{\beta}_p(t)$ и ускорений $\ddot{\beta}_p(t)$ каждого ГД, когда вектор нормированного КМ СГК $\mathbf{h}(t)$ изменяется по закону $\mathbf{h}(t) = -\mathbf{k}(t)$, т.е. когда вектор накопленного КМ $\mathbf{g}_{\text{i}} \equiv \mathbf{g}(t_{\text{i}}) = \mathbf{0}$. Здесь на сетке дискретных моментов времени $t \in \mathrm{T}_{\text{r}}$ по указанной выше методике проверяется справедливость условия $\mathbf{h}(t) \in \mathbf{S}_0^g$ и определяются как множество моментов времени T_{R}, так и орты $\mathbf{h}_j = \mathbf{h}(t_j)$ вектора $\mathbf{h}(t_j) \in \mathbf{S}_0^g$, имеющих наихудшее влияние на реализуемость ПМ КА в отношении угловых скоростей $\dot{\beta}_p(t)$ и ускорений $\ddot{\beta}_p(t)$ гиродинов.

На *этапе 2* выполняется повторный расчет максимальных значений модулей угловых скоростей и ускорений прецессии каждого ГД при $t \in \mathrm{T}_{\text{r}}$ для набора нормированных векторов накопленного КМ $\mathbf{g}_{oj}^{\text{I}}$, определенных в инерциальном базисе $\mathbf{I}$ соотношением

$$\mathbf{g}_{\text{i}j}^{\text{I}} = g_0\,\boldsymbol{\Lambda}(t_j) \circ \mathbf{h}(t_j) \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(t_j),\ t_j \in T_R.$$

Если получаемые в результате такого

расчета максимальные значения модулей угловых скоростей $\dot{\beta}_p(t)$ и ускорений $\ddot{\beta}_p(t)$ гиродинов при каждом значении вектора накопленного КМ $\mathbf{g}_{ij}^{\mathrm{I}}$ удовлетворяют ограничениям (4), то поворотный маневр КА считается гарантированно реализуемым, в противном случае нереализуемым – указываются конкретные “критические” направления максимального по модулю накопленного КМ, при которых нарушаются условия (4) для конкретных ГД в составе СГК.

Заключение

Разработаны и проанализированы явные функции настройки СГК кратных схем на основе четырех и шести гиродинов при их каноническом расположении на корпусе КА. Созданы конструктивные вычислительные алгоритмы оперативной бортовой и априорной наземной гарантирующих оценок реализуемости ПМ КА, в том числе при неопределенности накопленного КМ.

Работа поддержана РФФИ (07-08-97611, 08-08-99101, 08-08-00512), Президиумом РАН (программа фундаментальных исследований 22) и Отделением энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН (программы 15 и 18)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сомов Е.И., Герасин И.А.* Оценка реализуемости поворотного маневра космического аппарата, управляемого избыточной системой гиродинов // Управление движением и навигация летательных аппаратов. Том 2. Самара: СГАУ, 1997.
2. *Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сорокин А.В., Платонов В.Н.* Управление силовыми гирокомплексами космических аппаратов // Труды X Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург: ЦНИИ “Электроприбор”, 2003.

ESTIMATION OF REALIZABILITY FOR A SPACECRAFT ROTATIONAL MANEUVER AT UNCERTAINTY BY AN ACCUMULATED ANGULAR MOMENTUM OF GYROMOMENT CLUSTER

© 2008 Ye.I. Somov, S.S. Meshcheryakov

Samara Science Centre of Russian Academy of Sciences

A rotational maneuver of a spacecraft with the gyromoment clusters by multiply schemes based on six and forth gyrodines, is considered. Methods for a priori guarantee estimation of such maneuver’s realizability at uncertainty by the clusters’ accumulated angular momentum, are presented.