УДК 681.518.3, 514:681.323(043.3)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ ПО ОРТОГОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ

© 2008 С.А. Прохоров, В.В. Графкин

Самарский государственный аэрокосмический университет

Спектральная плотность мощности является одной из распространенных характеристик в анализе случайных процессов и существует множество способов ее определения. В данной работе рассматриваются особенности определения спектра по ортогональной модели структурной функции в случае стационарности исследуемого процесса, а также когда рассматривается случайный процесс со стационарными приращениями.

Обработка случайных процессов (СП) во многих случаях требует определения спектра. Это относится как к стационарным (ССП), так и к нестационарным процессам (НСП). В случае стационарных процессов справедливо следующее выражение, связывающее корреляционную (КФ) и структурную функции (СФ) процесса [1]:

$$K_x(\tau) = -\frac{1}{2}\left[S_x(\tau) - S_x(\infty)\right]. \qquad (1)$$

Необходимо отметить, что правая часть выражения (1) содержит уменьшенную в два раза и центрированную относительно значения в бесконечности структурную функцию (ЦСФ). Подставляя выражение (1) в формулу Винера-Хинчина [2], можно определить спектральную плотность мощности (СПМ) следующим образом:

$$g_x(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \overset{\circ}{S}_x(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau, \qquad (2)$$

где $\overset{\circ}{S}_x(\tau) = S_x(\tau) - S_x(\infty)$.

Представляя модель ЦСФ в виде [3]

$$\overset{\circ}{S}_a(\tau) = \sum_{k=0}^{m}\beta_k\psi_k(\tau,\alpha), \qquad (3)$$

где m – число членов разложения ряда;

β_k – коэффициенты разложения;

$\psi_k(\tau,\alpha)$ – семейство ортогональных функций (α – параметр масштаба ортогональных функций),

выражение (2) примет вид

$$g_x(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\beta_k\int_0^\infty \psi_k(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\beta_k\,\mathrm{Re}W_k(j\omega), \qquad (4)$$

где $\mathrm{Re}W_k(j\omega)$ – вещественная часть частотной характеристики ортогональных фильтров [4].

В табл. 1 представлены выражения для определения СПМ в ортогональных базисах Лагерра, Лежандра и Дирихле.

Но выражение (4) позволяет определять СПМ только в случае стационарности СП, хотя структурная функция чаще является характеристикой случайных процессов со стационарными приращениями (СПСП), которые классифицируются, как вид НСП. Это

Таблица 1. СПМ в случае ССП

Базис	$g_x(\omega)$	φ
Лагерра	$-\frac{\cos\varphi}{\pi\alpha}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\beta_k\cdot\cos[(2k+1)\varphi]$	$\mathrm{arctg}(A)$, $A = \frac{2\omega}{\alpha}$
Лежандра	$-\frac{1}{2\pi\alpha}\sum_{k=0}^{m}\frac{\beta_k}{2k+1}\cdot\cos\varphi_k\cdot\cos\left[\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_s\right]$	$\varphi_n = \mathrm{arctg}(A_n)$, $A_n = \frac{\omega}{(2n+1)\alpha}$
Дирихле	$-\frac{1}{2\pi\alpha}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\beta_k}{k+1}\cos\varphi_k\cdot\cos\left[\varphi_k + 2\sum_{s=0}^{k-1}\varphi_s\right]$	$\varphi_n = \mathrm{arctg}(A_n)$, $A_n = \frac{\omega}{(n+1)\alpha}$

обстоятельство предполагает несколько иное определение СПМ [1]:

$$g_x(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^\infty \sin(\omega\tau)\,\overset{\circ}{S}'_x(\tau)d\tau\,, \qquad (5)$$

где $\overset{\circ}{S}'_x(\tau) = \dfrac{\partial \overset{\circ}{S}_x(\tau)}{\partial\tau}$.

После математических преобразований выражение (5) примет вид [3]

$$g_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{m}\beta_k\sum_{s=0}^{k}A_{k,s}(\alpha)\cdot B_s(\alpha,\omega)\,. \qquad (6)$$

$A_{k,s}(\alpha)$ и $B_s(\alpha,\omega)$ для различных базисов представлены в табл. 2.

Определение СПМ с помощью выражения (6) влечет за собой определенные ограничения на его использование: в состав этого выражения входят коэффициенты $A_{k,s}(\alpha)$, которые представляют собой алгебраические действия с факториалами чисел, пропорциональных числу членов разложения ряда (3). Таким образом, при относительно небольшом m (для функций Лагерра это число равно 20-22 члена), во время вычисления $A_{k,s}(\alpha)$ происходит переполнение мантиссы числа, что приводит к некорректным результатам вычисления СПМ (рис. 1).

К определению выражения (5) можно

Таблица 2. Коэффициенты для СПМ

Базис	$A_{k,s}(\alpha)$	$B_s(\alpha,\omega)$
Лагерра	$(-1)^s\alpha^s\cdot\dfrac{k!}{(k-s)!(s!)^2}$	$\dfrac{s!\cos^s(\varphi)}{\omega\left(\frac{\alpha}{2}\right)^s}\left[\sin(s\cdot\varphi) - \sin((s+1)\varphi)\cdot\cos(\varphi)\right]$, где $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{2\omega}{\alpha}\right)$
Лежандра	$(-1)^{s+1}(2s+1)\alpha\cdot\dfrac{(k+s)!}{(k-s)!(s!)^2}$	$\dfrac{1}{(2s+1)^2\alpha^2+\omega^2}$
Дирихле	$(-1)^{k-s+1}(s+1)\alpha\cdot\dfrac{(k+s+1)!}{(k-s)!(s+1)!s!}$	$\dfrac{1}{(s+1)^2\alpha^2+\omega^2}$

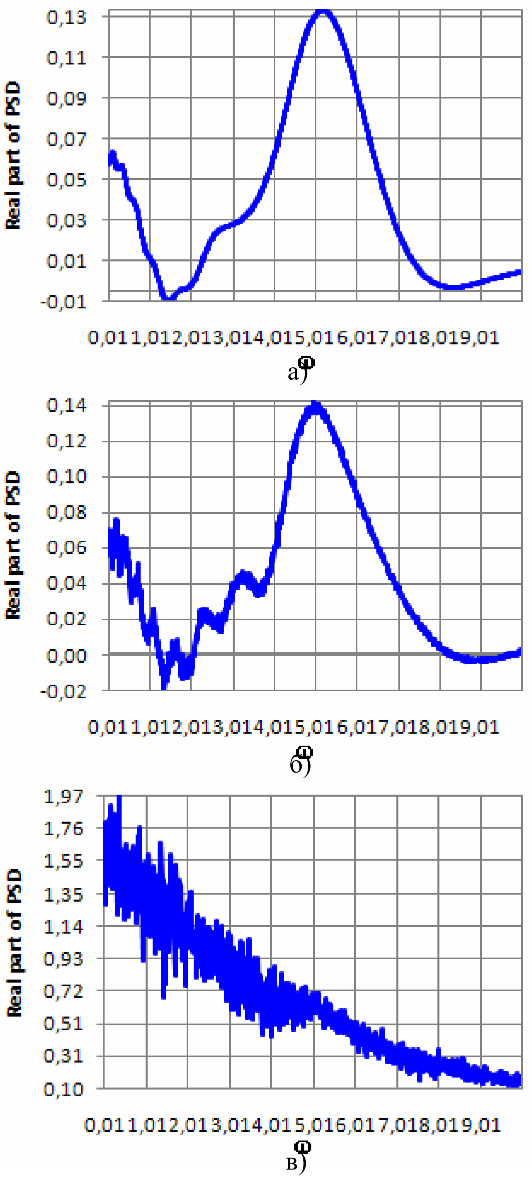
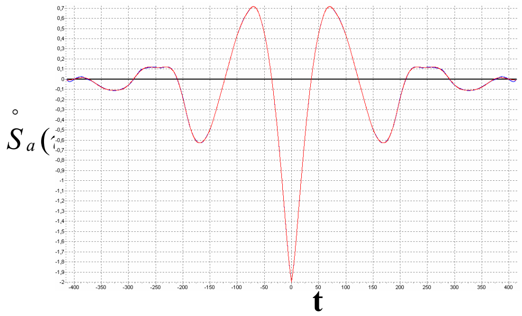


Рис. 1. СПМ при использовании выражения, содержащего факториалы:
а) относительная погрешность аппроксимации ЦСФ δ=0,079; m=19; базис:Лагерра;
б) относительная погрешность аппроксимации ЦСФ δ=0,067; m=22; базис:Лагерра;
в) относительная погрешность аппроксимации ЦСФ δ=0,061; m=24; базис:Лагерра

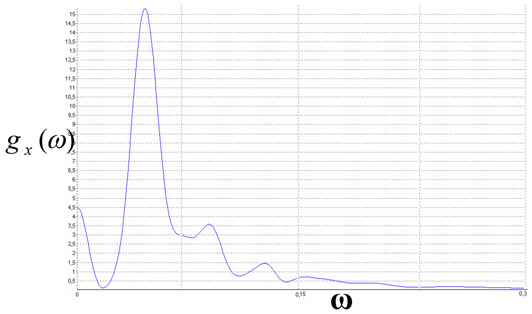
также применить иной подход. Применяя формула Эйлера и учитывая, что

$$\frac{\partial Lag_k(\tau,\alpha)}{\partial\tau} = \sum_{s=0}^{k}C_k^s(-\alpha)^s\frac{1}{s!}\cdot \left[s\tau^{s-1}e^{-\frac{\alpha\tau}{2}} - \tfrac{\alpha}{2}\tau^s e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}\right], \qquad (7)$$

где $Lag_k(\tau,\alpha)$ – ортогональная функция Лагерра k-го порядка;
выражение (5) легко представить в виде



а)



б)

Рис. 2. Пример определения СПМ без ограничений на модель ЦСФ:
а) ЦСФ и ее модель. δ=0,0003; m=170; базис:Лагерра;
б) СПМ, полученная по модели СПМ

$$g_x(\omega) = -\frac{1}{4j\omega\pi}\sum_{k=0}^{m}\beta_k\sum_{s=0}^{k}C_k^s(-\alpha)^s \cdot \cdot\left(\left[\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2}+j\omega\right)^s}-\frac{\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}+j\omega\right)^{s+1}}\right]- -\left[\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{2}-j\omega\right)^s}-\frac{\frac{\alpha}{2}}{\left(\frac{\alpha}{2}-j\omega\right)^{s+1}}\right]\right) . \quad (8)$$

Выполнив простейшие алгебраические преобразования и используя формулу бинома Ньютона, конечное выражение будет иметь вид

$$g_x(\omega) = \frac{\cos\varphi}{\pi\alpha}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1}\beta_k\cos[(2k+1)\varphi], \quad (9)$$

где $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\omega}{\alpha}\right)$.

Полученное выражение может применяться для СПСП и не ограничивается числом членов разложения ряда ЦСФ. Пример использования выражения (9) приведен на рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
2. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
3. *Прохоров С.А., Графкин В.В.* Аппроксимация структурных функций случайных процессов // Математическое моделирование и краевые задачи: М33. Труды Третьей dсероссийской научной конференции. Ч. 4: Математические модели в информационных технологиях. Самара: СамГТУ, 2006.
4. Прикладной анализ случайных процессов / Под ред. *Прохорова С.А.* Самара: СамНЦ РАН, 2007.

THE COMPARATIVE ANALYSIS OF POWER SPECTRAL DENSITY CALCULATED BY STRUCTURE FUNCTION ORTHOGONAL MODEL ESTIMATION METHODS

© 2008 S.A. Prokhorov, V.V. Grafkin

Samara State Aerospace University

The power spectral density is one of commonly used characteristics in the stochastic processes analysis area and many estimation methods of it is existed. Traits of power spectral density estimation calculated by structure function orthogonal model, while process is stationary and also when random process with stationary increments is analyzed, is briefly reviewed in this paper.