УДК621.983.3

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ РАЗНЫХ ПО ВЕЛИЧИНЕ ПРЕДЕЛАХ ТЕКУЧЕСТИ НА СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ

© 2008 Ф.В. Гречников[1], В.В. Уваров[2]

[1] Самарский государственный аэрокосмический университет
[2] Волжский филиал Института металлургии и материаловедения имени А.А. Байкова РАН

На основе теории пластичности анизотропных сред и использовании энергетического условия пластичности исследована возможность его представления в виде соотношения с разными пределами текучести при растяжении и сжатии. Показана невозможность существования изотропного материала с различными пределами текучести при растяжении и сжатии.

Известно, что для анизотропных сред наибольшее распространение получило энергетическое условие пластичности Мизеса. Однако оно применимо лишь для тех материалов, у которых характеристики на сжатие и растяжение одинаковы, что не всегда отвечает действительности [1], [2].

Поэтому данная статья ставит своей целью показать возможность записи энергетического условия пластичности ортотропных сред, у которых пределы текучести на сжатие и растяжение не равны между собой. Как и в условии Р.Мизеса, примем тело несжимаемым. Тогда достаточно будет рассмотреть сечение предполагаемой поверхности пластичности девиаторной плоскостью (рис. 1). Откладывая по координатным осям (оси главных напряжений) соответствующие пределы текучести на сжатие (S) и растяжение (R) и соединяя найденные точки, получим замкнутую кривую. Эта кривая будет описывать шестиугольник, предложенный Д.Д. Ивлевым [3]. Прежде чем проводить анализ поверхности пластичности в целом, необходимо рассмотреть ее

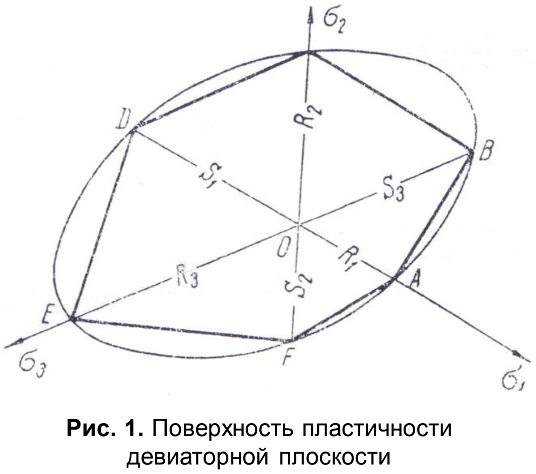

Рис. 1. Поверхность пластичности девиаторной плоскости

сечения координатными плоскостями. Это и позволит использовать известное свойство, что вид линии второго порядка можно определить, если даны координаты пяти точек.

В нашем случае таких точек шесть. Они позволяют общее уравнение

$$a_{11}\sigma_1^2 + 2a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{22}\sigma_2^2 + 2a_{13}\sigma_1 + 2a_{23}\sigma_2 + a_{33} = 0$$

при $\sigma_3 = 0$ записать в следующем виде:

$$\frac{\sigma_1^2}{R_1S_1} + \frac{\sigma_2^2}{R_2S_2} - \left(\frac{1}{R_1S_1} + \frac{1}{R_2S_2} - \frac{1}{R_3S_3}\right)\sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{S_1}\right)\sigma_1 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{S_2}\right)\sigma_2 = 1 \qquad (1)$$

В процессе определения коэффициентов a_{ij} получена связь между пределами текучести в разных направлениях:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} \qquad (2)$$

По аналогии запишем уравнения линий на двух других координатных плоскостях: когда $\sigma_1 = 0$

$$\frac{\sigma_2^2}{R_2S_2} + \frac{\sigma_3^2}{R_3S_3} - \left(\frac{1}{R_2S_2} + \frac{1}{R_3S_3} + \frac{1}{R_1S_1}\right)\sigma_2\sigma_3 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{S_2}\right)\sigma_2 + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{S_3}\right)\sigma_3 = 1 \qquad (3)$$

когда $\sigma_2 = 0$

$$\frac{\sigma_3^2}{R_3S_3} + \frac{\sigma_1^2}{R_3S_3} - \left(\frac{1}{R_3S_3} + \frac{1}{R_1S_1} - \frac{1}{R_2S_2}\right)\sigma_3\sigma_1 + \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{S_3}\right)\sigma_3 + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{S_1}\right)\sigma_1 = 1 \qquad (4)$$

По формулам (1), (3) и (4) нетрудно определить и общее уравнение поверхности пластичности

$$\frac{\sigma_1^2}{R_1S_1}+\frac{\sigma_2^2}{R_2S_2}+\frac{\sigma_3^2}{R_3S_3}-\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)\sigma_1\sigma_2 -$$
$$-\left(\frac{1}{R_2S_2}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{R_1S_1}\right)\sigma_2\sigma_3-\left(\frac{1}{R_3S_3}+\frac{1}{R_1S_1}-\frac{1}{R_2S_2}\right)\sigma_3\sigma_1 + \quad (5)$$
$$+\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{S_1}\right)\sigma_1+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{S_2}\right)\sigma_2+\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{S_3}\right)\sigma_3=1$$

С использованием выражения (2) уравнение (5) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\sigma_1^2}{R_1S_1}+\frac{\sigma_2^2}{R_2S_2}+\frac{\sigma_3^2}{R_3S_3}-\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)\sigma_1\sigma_2 -$$
$$-\left(\frac{1}{R_2S_2}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{R_1S_1}\right)\sigma_2\sigma_3-\left(\frac{1}{R_3S_3}+\frac{1}{R_1S_1}-\frac{1}{R_2S_2}\right)\sigma_3\sigma_1 + \quad (6)$$
$$+\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{S_1}\right)\cdot(\sigma_1-\sigma_3)+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{S_2}\right)\cdot(\sigma_2-\sigma_3)=1$$

В тех случаях, когда текучесть недостаточно резко выражена или имеют дело с листовым материалом, условие пластичности удобнее выразить через коэффициенты поперечной деформации [4]. С этой целью воспользуемся ассоциативным законом течения:

$$d\varepsilon_1=\lambda\frac{df}{d\sigma_m}(m=1,2,3), \quad (7)$$

где f – рассматриваемое условие пластичности.

Продифференцировав уравнение (5), найдем:

$$d\varepsilon_1=\lambda\left[\frac{2\sigma_1}{R_1S_1}-\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)\sigma_2-\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{S_2f_2}\right)\sigma_3+\frac{1}{R_1}-\frac{1}{S_1}\right];$$

$$d\varepsilon_2=\lambda\left[\frac{2\sigma_2}{R_2S_2}-\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)\sigma_1-\left(\frac{1}{R_3S_3}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_1S_1}\right)\sigma_3+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{S_2}\right];$$

$$d\varepsilon_3=\lambda\left[\frac{2\sigma_3}{R_3S_3}-\left(\frac{1}{R_3S_3}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_1S_1}\right)\sigma_2-\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{R_2S_2}\right)\sigma_1+\frac{1}{R_3}-\frac{1}{S_3}\right].$$

Рассмотрим случай линейного напряженного состояния, когда $\sigma_2=\sigma_3=0$, тогда

$$d\varepsilon_1=\lambda\left(\frac{2\sigma_1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_1}-\frac{1}{S_1}\right);$$

$$d\varepsilon_2=\lambda\left[\frac{1}{R_2}-\frac{1}{S_2}-\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)\sigma_1\right];$$

$$d\varepsilon_3=\lambda\left[\frac{1}{R_3}-\frac{1}{S_3}-\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{S_2f_2}\right)\sigma_1\right].$$

Отсюда определим коэффициенты поперечной деформации:

$$\mu_{21}=-\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}=\frac{\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)\sigma_1+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{R_2}}{\frac{2\sigma_1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_1}-\frac{1}{S_1}}; \quad (8а)$$

$$\mu_{31}=-\frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1}=\frac{\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{S_2R_2}\right)\sigma_1+\frac{1}{S_3}-\frac{1}{R_3}}{\frac{2\sigma_1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_1}-\frac{1}{S_1}};$$

В случае растяжения $\sigma_1=R_1$, следовательно,

$$\mu_{21}^p=\frac{\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)R_1+\frac{1}{S_2}-\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{S_1}};$$

(8а)

$$\mu_{31}^p=\frac{\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{S_2R_2}\right)R_1+\frac{1}{S_3}-\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{S_1}};$$

При сжатии $\sigma_1=-S_1$ и

$$\mu_{21}^c=\frac{\frac{1}{R_2}-\frac{1}{S_2}+\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)S_1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{S_1}};$$

(8б)

$$\mu_{31}^c=\frac{\frac{1}{R_3}-\frac{1}{S_3}+\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{S_2R_2}\right)S_1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{S_1}}.$$

Из полученных выражений следует, что

$$\mu_{21}^p+\mu_{21}^c=\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)\cdot R_1S_1;$$

(9)

$$\mu_{31}^p+\mu_{31}^c=\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_3S_3}-\frac{1}{R_2S_2}\right)\cdot R_1S_1;$$

и

$$\mu_{21}^p+\mu_{21}^c+\mu_{31}^p+\mu_{31}^c=2,$$

а

$$\mu_{21}^p+\mu_{31}^c=\mu_{21}^c+\mu_{31}^c=1$$

Аналогично рассматривая два других случая линейного напряженного состояния, когда $\sigma_1=\sigma_3=0$ и $\sigma_2=\sigma_1 0$, найдем:

$$\mu_{12}^p+\mu_{12}^c=\left(\frac{1}{R_1S_1}+\frac{1}{R_2S_2}-\frac{1}{R_3S_3}\right)\cdot R_2S_2;$$

$$\mu_{32}^{p} + \mu_{32}^{c} = \left(\frac{1}{R_2 S_2} + \frac{1}{R_3 S_3} + \frac{1}{R_1 S_1} \right) \cdot R_2 S_2;$$

$$\mu_{13}^{p} + \mu_{13}^{c} = \left(\frac{1}{R_3 S_3} + \frac{1}{R_1 S_1} - \frac{1}{R_2 S_2} \right) \cdot R_3 S_3;$$

$$\mu_{23}^{p} + \mu_{23}^{c} = \left(\frac{1}{R_2 S_2} + \frac{1}{R_3 S_3} - \frac{1}{R_1 S_1} \right) \cdot R_3 S_3;$$

$$\mu_{12}^{p} + \mu_{32}^{p} = \mu_{32}^{c} + \mu_{12}^{c} = 1;$$

$$\mu_{13}^{p} + \mu_{23}^{p} = \mu_{13}^{c} + \mu_{23}^{c} = 1.$$

Откуда

$$\frac{\mu_{21}^{p} + \mu_{21}^{c}}{\mu_{12}^{p} + \mu_{12}^{c}} = \frac{R_1 S_1}{R_2 S_2}; \quad \frac{\mu_{32}^{p} + \mu_{32}^{c}}{\mu_{23}^{p} + \mu_{23}^{c}} = \frac{R_2 S_2}{R_3 S_3};$$

$$\frac{\mu_{31}^{p} + \mu_{31}^{c}}{\mu_{13}^{p} + \mu_{13}^{c}} = \frac{R_1 S_1}{R_3 S_3};$$

$$\frac{\left(\mu_{32}^{p} + \mu_{32}^{c}\right)\left(\mu_{13}^{p} + \mu_{13}^{c}\right)}{\mu_{23}^{p} + \mu_{23}^{c}} = \frac{\left(\mu_{12}^{p} + \mu_{12}^{c}\right)\left(\mu_{31}^{p} + \mu_{31}^{c}\right)}{\mu_{21}^{p} +{}_{21}^{c}}. \quad (11)$$

Кроме соотношений (9), (10) и (11), можно показать, что

$$\frac{\mu_{12}^{p}}{R_2} - \frac{\mu_{12}^{c}}{S_2} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{R_1}; \quad \frac{\mu_{21}^{p}}{R_1} - \frac{\mu_{21}^{c}}{S_1} = \frac{1}{S_2} - \frac{1}{R_2};$$

$$\frac{\mu_{32}^{p}}{R_2} - \frac{\mu_{32}^{c}}{S_2} = \frac{1}{S_3} - \frac{1}{R_3}; \quad \frac{\mu_{23}^{p}}{R_3} - \frac{\mu_{23}^{c}}{S_3} = \frac{1}{S_2} - \frac{1}{R_2};$$

$$\frac{\mu_{13}^{p}}{R_3} - \frac{\mu_{13}^{c}}{S_3} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{R_1}; \quad \frac{\mu_{31}^{p}}{R_1} - \frac{\mu_{31}^{c}}{S_1} = \frac{1}{S_3} - \frac{1}{R_3}; \quad (12)$$

С помощью полученных зависимостей условие пластичности преобразуется к виду:

$$R_1 S_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\mu_{21}^{p} + \mu_{21}^{c}\right)\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\mu_{21}^{p} + \mu_{21}^{c}\right)\frac{\mu_{32}^{p} + \mu_{32}^{c}}{\mu_{12}^{p} + \mu_{12}^{c}}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\mu_{31}^{p} + \mu_{31}^{c}\right)\left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2 \right] +$$
$$+ \left(S_1 - R_1\right)\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) + \left(\mu_{21}^{c} R_1 - \mu_{21}^{p} S_1\right)\left(\sigma_2 - \sigma_3\right). \quad (13)$$

Полученное условие пластичности геометрически интерпретируется эллиптическим цилиндром. Его ось равнонаклонена к координатным плоскостям и смещена относительно начала координат. Величина этого смещения зависит от показателей анизотропии и в плоскости $\sigma_3 = 0$ составляет:

$$\sigma_2^0 = \frac{\left(R_1 - S_1\right)\left(\mu_{21}^{p} + \mu_{21}^{c}\right) + 2\left(R_2 - S_2\right)}{4 - \left(\mu_{21}^{p} + \mu_{21}^{c}\right)\left(\mu_{12}^{p} + \mu_{12}^{c}\right)}; \quad (14)$$

$$\sigma_1^0 = \frac{\left(R_2 - S_2\right)\left(\mu_{21}^{p} + \mu_{21}^{c}\right) + 2\left(R_1 - S_1\right)}{4 - \left(\mu_{21}^{p} + \mu_{21}^{c}\right)\left(\mu_{12}^{p} + \mu_{12}^{c}\right)}.$$

Выводы

1. Показана возможность записи энергетического условия пластичности ортотропного тела (6) и (13) с разными пределами текучести при растяжении и сжатии.

2. В полученное условие пластичности входят пять независимых показателей, отражающих анизотропию тела.

3. При использовании принципа несжимаемости невозможно существование изотропного материала с разными пределами текучести на растяжение и сжатие. Это видно из выражений (2) и (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашкенази Е.К.* Анизотропия машиностроительных материалов. Л.: Машиностроение, 1969.
2. *Гольденблат И.И. Копнов В.А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968.
3. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
4. *Гречников Ф.В.* Деформирование анизотропных материалов (Резервы интенсификации). М.: Машиностроение, 1998.

ENERGY CONDITION OF PLASTICITY ON DIFFERENT VALUE OF STRAIGHT AND YIELD STRESS ON COMPRESSION AND SPRAIN

© 2008 F.V. Grechnikov[1], V.V. Uvarov[2]

[1] Samara State Aerospace University
[2] Volga Branch of Institute of Metallurgy and Materiology named for A.A. Baikov of Russian Academy of Sciences

On a base of the anisotropic environment theories and using of the energy plasticity condition possibility of its presentation in the manner of correlations with various straight and yield stress for sprain and compression was explored. Impossibility of isotropic material existence with different yield stress at sprain and compression is shown.