УДК 504:628.44

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В ГРУНТЕ

© 2009 В.А. Шабанов, Ю.М. Галицкова
Самарский государственный архитектурно-строительный университет

Рассмотрены проблемы загрязнения компонентов окружающей среды от необустроенных свалок на городских территориях. Выделены этапы развития необустроенной свалки. Разработана математическая модель проникновения загрязняющих веществ в грунт под необустроенной свалкой. Использование аппарата математической модели позволяет определить глубину проникновения загрязнений, время проникновения загрязняющих веществ в глубь грунта. Использование модели позволит обоснованно определять толщу загрязненного грунта при ликвидации свалки.

Ключевые слова: *твердые бытовые отходы, загрязняющие вещества, модель проникновения*

В процессе образования и развития необустроенной свалки наблюдается специфические процессы воздействия такой свалки на компоненты окружающей среды. Поэтому предлагается жизненный цикл необустроенной свалки разделить на этапы с учетом этих особенностей:

1 этап – образование свалки, начинается с момента появления на свободной территории первой порции отходов, вокруг которых начинает формироваться необустроенная свалка. Вследствие процессов, протекающих в теле свалки, на поверхности грунта под отходами накапливаются загрязняющие вещества.

2 этап – развитие свалки, характеризуется активным проникновением образовавшихся на поверхности грунта под отходами загрязняющих веществ непосредственно в грунт и дальнейшем ростом занимаемой необустроенной свалкой территории.

3 этап – развитая свалка, характеризуется расширением зоны загрязнения грунта под свалкой. При этом в грунте достигаются максимальные значения концентраций загрязняющих веществ, перенесенных водой в процессе механического переноса.

Так как на первом этапе воздействие от необустроенной свалки выражается только в виде образования небольшого количества загрязняющих веществ на поверхности грунта, то целесообразно рассматривать последующие этапы развития, когда происходит проникновение накопившихся веществ в толщу грунта. Образующиеся на поверхности загрязняющие вещества проникают в глубь грунта за счет снеготаяния и сильных дождей, то есть периодически – процесс нестационарный. Значит, процесс проникновения загрязняющей жидкости в почву под свалкой можно рассматривать как процесс инфильтрации жидкости в грунт под действием силы тяжести и давления воды, находящейся на поверхности. Проведенные ранее исследования Костякова А.Н. и Аверьянова С.Ф. опираются на модель грунта в виде сплошной среды. В соответствии с этой моделью, в результате расчета получаются средние скорости течений, то есть скорости, осредненные по некоторой площадке.

Для получения «истинных» скоростей движения жидкости в порах примем в качестве модели – модель идеального грунта. Дифференциальное уравнение движения, для рассматриваемой модели с учетом переменной массы движущейся воды имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{mg}{k}\cdot\frac{y}{\Delta+(1-m)y}\cdot\frac{dy}{dt}-g=0 \qquad (1),$$

здесь y – глубина проникновения жидкости в поры грунта на момент времени t, m – эффективная пористость грунта, g – ускорение свободного падения, k – коэффициент фильтрации грунта под телом свалки, Δ – высота слоя воды на поверхности грунта в начальный момент времени t=0. Данное уравнение представляется эпюрой с восходящей и нисходящей ветвью. Нисходящую ветвь эпюры скоростей можно аппроксимировать гиперболой

$$v=A\cdot t^{-0,5}+b \qquad 2)$$

Анализ уравнения (2) показывает, что первый член уравнения (вторая производная) заметно влияет на движение только в начальный, весьма короткий период времени. Пренебрежем первым членом и получим упрощенное уравнение движения жидкости, при просачивании ее в грунт.

Шабанов Всеволод Александрович, кандидат технических наук, профессор кафедры природоохранного и гидротехнического строительства
Галицкова Юлия Михайловна, старший преподаватель кафедры природоохранного и гидротехнического строительства. E-mail: galickova@yandex.ru

$$\frac{m}{k}\cdot\frac{y}{\Delta+(1-m)y}\cdot\frac{dy}{dt}-1=0 \tag{3}$$

Или, обозначив для удобства $n=(1-m)$, получим

$$dt=\frac{m}{k}\cdot\frac{y\cdot dy}{\Delta+n\cdot y} \tag{4}$$

Интегрируя, при начальных условиях $y(0)=0$, найдем:

$$t=\frac{m}{k\cdot n}y-\frac{m\cdot\Delta}{k\cdot n^2}\ln(1+\frac{n}{\Delta}y) \tag{5}$$

Эта формула является приближенной, поэтому для ее уточнения введем коэффициенты

$$t=\alpha\cdot\frac{m}{k\cdot n}y-\beta\cdot\frac{m\cdot\Delta}{k\cdot n^2}\ln(1+\frac{n}{\Delta}y) \tag{6}$$

Коэффициенты α и β находятся при обработке экспериментальных данных. Экспериментально полученная зависимость времени проникновения жидкости от глубины проникновения с использованием математического пакета Mathcad 13 аппроксимируем функцией

$$t=A\cdot y-B\cdot\ln(1+\frac{n}{\Delta}\cdot y) \tag{7}$$

Расхождение между экспериментальными данными и вычислениями оценивались с помощью программы ChiSquareGoodnessOfFitTest Maple 10. Результаты расчетов подтвердили отсутствие значимых расхождений на 0.05 уровне. В результате обработки получены значения коэффициентов A и B, которые являются функциями параметров, определяющих движение жидкости, а именно *m*, *k*, *Δ*. *n* является функцией *m*.

Сравнивая уравнения (6) и (7), получим:

$$A=\alpha\cdot\frac{m}{k\cdot n};\quad B=\beta\cdot\frac{m\cdot\Delta}{k\cdot n^2}$$

или

$$\alpha=A\cdot\frac{k\cdot n}{m};\quad \beta=B\cdot\frac{k\cdot n^2}{m}.$$

α и β также являются случайными величинами. Их можно представить в виде системы точек в четырехмерном пространстве с координатными осями *m*, *k*, Δ, расположенных на некоторой поверхности. Приближенно эту поверхность можно аппроксимировать гиперплоскостью. Уравнения этих гиперплоскостей можно записать так:

$$\alpha=r_1\cdot m+r_2\cdot k+r_3\cdot\Delta;$$
$$\beta=q_1\cdot m+q_2\cdot k+q_3\cdot\Delta. \tag{8}$$

Анализ отношения β/α показал, что эти значения распределены нормально с средним значением 1,07 и дисперсией 0,1. Поэтому доверительный интервал для среднего значения 1,07±0,03.

Для определения численного значения α и β использовалась функция *линейн*, имеющаяся в математическом пакете Excel. В качестве нулевой гипотезы было выдвинуто предположение, что величина α не зависит от параметров *m*, *k* и Δ. Расчетное значение статистики получено F_{ex}=26,78. Критическое значение статистики – F=5,409. Расчетное значение значительно превышает критическое и нулевая гипотеза, с вероятностью 95% отвергается. Это позволяет сделать вывод о том, что существует достаточно сильная зависимость между коэффициентом α и параметрами *m*, *k* и Δ.

Далее была определена статистическая значимость коэффициентов разложения, которая показала, что α зависит, в основном, от высоты слоя воды на поверхности грунта и коэффициента фильтрации. Таким образом, в результате расчетов предложена формулу для определения α:

$$\alpha=0.04\cdot\Delta+25\cdot k-0.2 \tag{9}$$

Для получения более простой зависимости y(t) разложим правую часть уравнения 10:

$$t=\alpha\cdot\frac{m}{k\cdot n}y-\beta\cdot\frac{m\cdot\Delta}{k\cdot n^2}\cdot\ln(1+\frac{n}{\Delta}y) \tag{10}$$

в степенной ряд по y и удержим два члена. Получим:

$$t=m\cdot(\beta-\alpha)y+\frac{1}{2}\cdot\frac{\beta\cdot m}{\Delta\cdot k}\cdot y^2 \tag{11}$$

Правая часть полученного уравнения является приближенным решением. Для уточнения коэффициентов при переменной *y* аппроксимируем опытные данные параболой, то есть:

$$t=ry+q\cdot y^2 \tag{12}$$

После обработки получим:

$$t=\frac{m}{k\cdot n}(\beta-\alpha)\cdot y+\frac{1}{r}\cdot\beta\cdot\frac{m\cdot y^2}{\Delta\cdot k} \tag{13}$$

Или

$$t=\alpha\cdot\left(\frac{0.07\cdot m\cdot y^2}{r\cdot\Delta\cdot k}+1.07\cdot\frac{y\cdot m}{k\cdot n}\right) \quad (14)$$

где r – уточняющий коэффициент, позволяющий учесть остальные члены степенного ряда.

Решая относительно y, получим зависимость глубины проникновения y от времени:

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{r\cdot m\cdot\Delta\cdot(\beta-\alpha)}{\beta\cdot m\cdot n}+ \\ +\frac{\sqrt{m^2\cdot\Delta^2\cdot r^2\cdot(\beta-\alpha)^2+4\cdot r\cdot\beta\cdot m\cdot n^2\cdot k\cdot\Delta\cdot t}}{\beta\cdot m\cdot n} \quad (15)$$

Дифференцируя (15) по времени, получим скорость инфильтрации в различные моменты времени:

$$V=\frac{r\cdot k\cdot n\cdot\Delta}{\sqrt{\left[r\cdot m\cdot\Delta(\beta-\alpha)\right]^2+4\cdot r\cdot\beta\cdot m\cdot n^2\cdot k\cdot\Delta\cdot t}} \quad (16)$$

После сопоставления полученной формулы с результатами лабораторных экспериментов получили, что для грунтов с однородной крупностью (первый и второй тип грунта) r соответствует 5. Приведенные выше уравнения можно применять при области изменения параметров:

- коэффициента фильтрации $k_ф$ от $0{,}05\cdot10^{-2}$ см/с до $0{,}01\cdot10^{-2}$ см/с,
- исходной величине слоя жидкости на поверхности от 5 до 15 см или слое выпадения осадков от 25 до 75 мм.

В качестве начальных условий принято, что первоначально жидкость в порах отсутствует, а жидкость, оказывающая воздействие на почву и грунт, находится в состоянии покоя, то есть отсутствует движение по поверхности. Приведенные формулы можно применять только при $\Delta\geq0$, далее движение жидкости становится безнапорным и применение вышеописанных формул не возможно. Для практического применения можно рекомендовать следующую последовательность вычислений характеристик движения загрязненной жидкости в грунт под свалкой:

1. По формуле 10 определяется время проникновения жидкости на заданную глубину.
2. По формуле 15 определяется глубина проникновения жидкости за заданный период времени.
3. По формуле 16 определяется скорость движения в заданный момент времени.

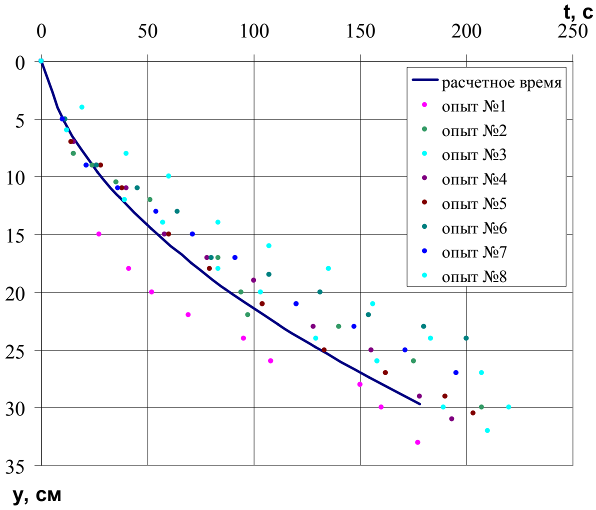

Рис. 1 Результаты расчета времени проникновения

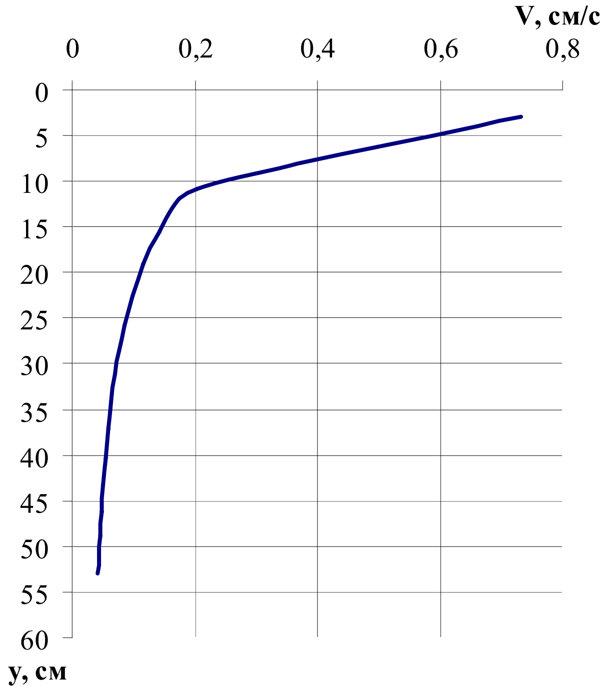

Рис. 2. Распределение скоростей проникновения жидкости в грунт ($k_ф$ = $1{,}1\cdot10^{-2}$ см/с) при Δ=15 см

Для грунта с $k_ф=1{,}1\cdot10^{-2}$ см/с при Δ=5 см в результате расчетов были получены данные представленные в табл. 1. Таким образом, полученные зависимости показали приемлемую сходимость с экспериментальными данными.

Таблица 1. Результаты расчетов

Экспериментальные		Расчетные		
время проникновения, с	глубина, см	время проникновения, с	глубина, см	скорость, см/с
0	0	0	0	1,399
3,45	8,82	6,17	3,4537	0,457
6,73	22,64	18,85	6,72695	0,336
10,00	43,09	38,18	10,0003	0,278
13,55	68,64	66,62	13,5459	0,240
17,27	108,27	104,92	17,2724	0,213

Выводы:

1. Получена математическая модель проникновения загрязняющих веществ в грунт.
2. Разработанная модель позволяет определять время проникновения жидкости на заданную глубину в зависимости от начального слоя жидкости и таких параметров грунта как пористость и коэффициент фильтрации, а также решить обратную задачу − определить глубину проникновения жидкости на любой момент времени, в зависимости от названных выше параметров. Модель позволит рассчитать также скорость движения жидкости на любой глубине в заданный момент времени.
3. Модель проникновения загрязняющей жидкости в грунт позволит спрогнозировать глубину загрязнения грунта под телом необустроенной свалки.

MATHEMATICAL MODEL OF DISTRIBUTION THE POLLUTING SUBSTANCES IN GROUND

© 2009 V.A. Shabanov, Yu.M. Galitskova
Samara State Architecturally-Building University

Problems of environmental components from not equipped dumps in city territories are considered. Stages of development of not equipped dump are allocated. The mathematical model of penetration the polluting substances in a ground under not equipped dump is developed. Use of mathematical model means allows to define depth of pollution penetration, time of penetration the polluting substances in depth of a ground. Use of model will reasonly allow to define thickness of the polluted ground at liquidation of a dump.

Key words: *hard domestic waste, polluting substances, model of penetration*

Vsevolod Shabanov, Candidate of Technical Sciences, Professor at the Nature Protective and Hydrotecnical Engineering Department
Yuliya Galitskova, Senior Lecturer at the Nature Protective and Hydrotecnical Engineering Department. E-mail: galickova@yandex.ru