

О СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ
СТАЦИОНАРНЫХ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ© 2009 А.В. Данеев¹, В.А. Козырев², А.Е. Куменко³, В.А. Русанов²¹ Восточно-Сибирский институт МВД России, г. Иркутск² Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск³ 13 Государственный научно-исследовательский институт МО России, г. Люберцы

Поступила в редакцию 09.04.2009

Проведено исследование качественных свойств апостериорных динамических процессов типа “вход-выход”, допускающих модельную реализацию Калмана-Месаровича в классе линейных инвариантных во времени многомерных систем “вход-состояние-выход” минимального порядка. Предложена конструктивная процедура для получения таких реализаций (как с управляющими программно переменными, так и без них).
Ключевые слова: структурно-параметрическая идентификация, динамический процесс, задача реализации Калмана-Месаровича

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие математических способов, с помощью которых можно на основе непрерывной апостериорной информации моделировать геометрическую структуру и параметры дифференциальных уравнений динамики исследуемого физического процесса, делает актуальным вопрос о выборе среди них тех, которые оптимальны с точки зрения некоторого формального критерия, характеризующего определённое структурно-параметрическое качество идентифицируемой модели [1]. Трудность состоит в том, что на этот вопрос нет однозначного ответа; выбор того или иного методологического подхода как правило зависит не только от физической природы исследуемого процесса, но и от того, каким образом заданы ограничения, являются экспериментальные данные полными или нет, а также от других факторов, в частности, связанных с целями моделирования [2].

В этом методологическом контексте в данной работе определены и обсуждаются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи многомерной дифференциальной реализации [3, с. 21], [4, с. 54] для апостериорной математической модели динамики в классе линейных инвариантных во времени дифференциальных уравнений состояния с программным управлением и стационарной матрицей выходного сигнала (система “вход-состояние-выход”); при этом исходная модель, подлежащая дифференциальной реализации минимального порядка, рассматривается [4, с. 21] в теоретико-системной концепции “чёрного ящика”, т.е. как многосвязный процесс “вход-выход”, полученный экспериментально [5].

Данеев Алексей Васильевич, доктор технических наук, начальник отдела. E-mail: daneev@mail.ru.
Козырев Владимир Александрович, аспирант.
Куменко Антон Евгеньевич, кандидат технических наук, заведующий лабораторией.
Русанов Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник.

Данная постановка обозначена в выводах работы [6] и является идейным развитием теоретических результатов из [2, 7]; заметим, что в статье [7] не делалось попытки построить конструктивную теорию линейной дифференциальной реализации многомерных уравнений динамики с матричным оператором выходного сигнала (в частности в [2], порядок апостериорной модели реализации определялся эмпирически) поскольку для этого нужны алгебраические структуры, требующие другого (более высокого) уровня сложности, чем это возможно обеспечить в рамках классических линейных структур систем типа “вход-состояние”.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ

Везде далее R – поле вещественных чисел, R^q – q -мерное евклидово пространство над R (со скалярным произведением, обозначаемым через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R^q}$), $M_{n,m}(R)$ – пространство всех $n \times m$ -матриц с элементами из R , $T := [t_0, t_1]$ – отрезок числовой прямой R . Как обычно, $C^\infty(T, R^q)$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых на T функций со значениями в R^q , при этом считаем, что $C^\infty(T, R^q)$ наделено структурой евклидова пространства со скалярным произведением $\langle \phi, \psi \rangle_{C^\infty} := \int_T \langle \phi(\tau), \psi(\tau) \rangle_{R^q} d\tau$ для любых $\phi, \psi \in C^\infty(T, R^q)$.

Выделим класс динамических систем, движение которых в пространстве состояний R^n описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) - Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \in R^n, \quad t \in T, \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x \in C^\infty(T, R^n)$ – траектория системы, $u \in C^\infty(T, R^m)$ – управление (“вход” системы), $y \in C^\infty(T, R^p)$ – “выход” системы, $A \in M_{n,n}(R)$, $B \in M_{n,m}(R)$, $C \in M_{p,n}(R)$, $p \leq n$.

П о с т а н о в к а задачи реализации: пусть $(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ – наблюдаемый (экспериментально) процесс “вход-выход” с перемен-

ными от p -вектор-функции выходных сигналов y и m -вектор-функции управляющих воздействий u , линейно независимыми (у каждой вектор-функции) в пространстве $C^\infty(T, R)$. Определить необходимые и достаточные условия (разрешимость задачи реализации), при которых (y, u) удовлетворяет некоторой системе «вход-состояние-выход» (1.1) с минимальной размерностью n пространства состояний R^n .

В прикладном аспекте структурно-параметрическая идентификация, – как центральная проблема задачи реализации, заключается в том чтобы, исходя из произвольного наблюдаемого многосвязного отображения «вход-выход» определенного в форме апостериорного процесса $(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ такого, что

$$\begin{aligned} \dim \text{Span}\{y_i \in C^\infty(T, R^p): i=1, \dots, p\} &= \\ &= p, \text{col}(y_1, \dots, y_p) = y; \\ \dim \text{Span}\{u_j \in C^\infty(T, R^m): j=1, \dots, m\} &= \\ &= m, \text{col}(u_1, \dots, u_m) = u, \end{aligned} \quad (1.2)$$

построить (если задача реализации разрешима) некоторое конечномерное линейное многообразие R^n минимальной размерности n (называемое минимальным пространством состояний), начальное состояние $x(t_0) = x_0 \in R^n$ и линейную инвариантную во времени систему (1.1) (с некоторыми матрицами A, B, C), эволюционирующую на фазовом многообразии R^n и имеющую такое же (идентичное) отображение «вход-выход» – (y, u) .

З а м е ч а н и е 1. Если (априорное предположение [8]) задача реализации разрешима, то, как показано в [8], матрицы A, B, C системы (1.1) не имеют в этой реализации единственное параметрическое представление. Тем не менее, необходимо подчеркнуть, что ниже нас в основном интересует проблема структурного «синтеза» а не параметрического «расчета» систем; при этом употребляем эти термины в том смысле, что решение задачи синтеза должно определять структуру системы, в то время как расчет предполагает манипулирование (в идеале оптимизацию) численными значениями свободных параметров в рамках той геометрической структуры модели, которая зафиксирована решением задачи синтеза.

В следующем разделе задачу реализации рассмотрим как построение на базе информации о некотором собственном движении уравнений неуправляемой динамики (1.1). В такой постановке в [8] было предложено апостериорно восстанавливать минимальный порядок n однородной системы исследуемого объекта; иными словами, считать, что этот порядок соответствует и динамической модели объекта, но уже с управлением, что в общем случае не верно (см. ниже пример 2).

2. РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ

Прежде чем излагать решение задачи реализации в классе моделей «вход-состояние-выход», обсудим ее для однородных систем (1.1). Везде далее в этом разделе считаем, что соответствующий процесс $y \in C^\infty(T, R^p)$ обладает переменными линейно независимыми в $C^\infty(T, R)$; в прикладном аспекте наличие этого свойства у процесса y определяет минимальную размерность пространства выходных сигналов, что означает – любая функциональная переменная y_i векторного выходного сигнала y не может быть выражена (заменена) через линейную комбинацию других y_j .

О п р е д е л е н и е 1 [9, с. 213]. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_k$ – вектор-функции евклидова пространства $C^\infty(T, R^q)$, тогда определитель $\Gamma(z_1, z_2, \dots, z_k)$ матрицы

$$\begin{bmatrix} \langle z_1, z_1 \rangle_{C^\infty} & \langle z_1, z_2 \rangle_{C^\infty} & \dots & \langle z_1, z_k \rangle_{C^\infty} \\ \langle z_2, z_1 \rangle_{C^\infty} & \langle z_2, z_2 \rangle_{C^\infty} & \dots & \langle z_2, z_k \rangle_{C^\infty} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle z_k, z_1 \rangle_{C^\infty} & \langle z_k, z_2 \rangle_{C^\infty} & \dots & \langle z_k, z_k \rangle_{C^\infty} \end{bmatrix}$$

образует определитель Грама, составленный для $z_1, z_2, \dots, z_k$

З а м е ч а н и е 2 [9, с. 213]. Если какой-либо главный минор определителя Грама, составленного для вектор-функций из $C^\infty(T, R^q)$ равен нулю, то равен нулю и сам определитель Грама; данное замечание полезно для вычислительных целей при анализе свойства линейной зависимости наборов вектор-функций из $C^\infty(T, R^q)$, в частности, алгоритм проверки корректности наблюдаемого процесса $y \in C^\infty(T, R^p)$ постановке рассматриваемой задачи составляет выражение

$$\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_p) \neq 0. \quad (2.1)$$

Основа следующего определения – математическая идея использовать конструкцию максимального элемента в семействе линейно независимых множеств.

О п р е д е л е н и е 2. Конечную последовательность $\langle L_j \rangle_{j=0, \dots, k}$ множеств $L_j \subset C^\infty(T, R^p)$ назовем $\langle L_j \rangle_k$ -кортежем, если $L_j, j=0, \dots, k$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{k-1} \subset L_k, \\ L_0 \neq L_1 \neq \dots \neq L_{k-1} \neq L_k, \end{aligned}$$

при этом будем говорить, что $\langle L_j \rangle_k$ -кортеж обладает индексом l , если

$$\begin{aligned} \text{Span } L_k &= \text{Span } L_{k-1}, \\ \dim \text{Span } L_{k-1} &= l. \end{aligned}$$

Свойство – “ $\langle L_j \rangle_k$ -кортеж обладает индексом l ”, можно установить численной процедурой, основные элементы которой содержит лемма 1.

Л е м м а 1. $\langle L_j \rangle_k$ -кортеж имеет индекс l в том и только том случае, если отыщется l вектор-функций $z_1, z_2, \dots, z_l \in L_k$ таких, что $\Gamma(z_1, z_2, \dots,$

$z_i) \neq 0$, тогда как для любых $l+1$ вектор-функций из L_k определитель Грама равен нулю.

Доказательство леммы 1 прозрачно в силу теоремы 1 [9, с. 213].

Дальнейшее изложение целиком основывается на понятии кортежа, что ставит задачу определения математических конструкций его элементов; по существу будем иметь дело с двумя из них, структуру первой формализует определение 3.

Определение 3. Пусть $y \in C^\infty(T, R^n)$, тогда $S_k = \{y, dy/dt, \dots, d^k y/dt^k\} \subset C^\infty(T, R^n)$, ($k \geq 0$) назовем k -струей вектор-функции y на всем интервале времени T .

Для уточнения основных понятий развиваемой ниже теории и согласованности ее с матричным анализом обозначим еще две хорошо известные конструкции.

Определение 4 [9, с. 160]. Минимальным полиномом матрицы $A \in M_{n,n}(R)$ называется полином $\pi(\lambda)$ наименьшей степени, для которого $\pi(A) = 0$.

Нормированный минимальный полином (т.е. с коэффициентом при его старшем члене равным 1) всегда единственен и делит без остатка любой отличный от нулевого полином $\eta(\lambda)$, для которого $\eta(A) = 0$; например, таковым является $\chi(\lambda)$ – характеристический полином матрицы A (теорема Гамильтона-Кэли [9, с. 87]).

Определение 5 [10, с. 262]. Если для матрицы $A \in M_{n,n}(R)$ найдется такой вектор $b \in R^n$, что справедливо

$$\text{Span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\} = R^n,$$

то A называется циклической матрицей, а b – ее циклическим генератором.

Замечание 3 [11, с. 37]. Матрица $A \in M_{n,n}(R)$ циклична в том и только том случае, если ее характеристический полином $\chi(\lambda)$ равен $\pi(\lambda)$, при этом пара (A, b) является полностью управляемой (теорема 3.4 [3, с. 47]); эквивалентно, когда каждому собственному значению A соответствует ровно один жорданов блок.

Лемма 2. Пусть $A \in M_{n,n}(R)$ – некоторая циклическая матрица, $b \in R^n$ – ее циклический генератор и $c \neq 0 \in R^n$. Тогда существует (единственная) матрица $X \in M_{n,n}(R)$, такая, что X коммутирует с A (т.е. $XA = AX$) и при этом $Xb = c$.

Доказательство. Система векторов $\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\}$ образует базис в R^n . Следовательно, вектор c имеет единственное представление вида

$$\beta_0 b + \beta_1 Ab + \beta_2 A^2 b + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1} b = c.$$

Теперь (с учетом введенного в условиях леммы алгебраического условия $Xb = c$) конструкция (представление) матрицы X вполне очевидна:

$$X = \beta_0 E_n + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1},$$

где E_n – единичная $n \times n$ -матрица, а коэффициенты β_i являются (что очевидно) решением следующей линейной системы алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} \langle z_0, z_0 \rangle_{R^n} & \langle z_0, z_1 \rangle_{R^n} & \dots & \langle z_0, z_{n-1} \rangle_{R^n} \\ \langle z_1, z_0 \rangle_{R^n} & \langle z_1, z_1 \rangle_{R^n} & \dots & \langle z_1, z_{n-1} \rangle_{R^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle z_{n-1}, z_0 \rangle_{R^n} & \langle z_{n-1}, z_1 \rangle_{R^n} & \dots & \langle z_{n-1}, z_{n-1} \rangle_{R^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix};$$

здесь $z_i = A^i b$ (считаем, что $A^0 = E_n$) и $\xi_i = \langle c, A^i b \rangle_{R^n}$, где $i = 0, \dots, n-1$.

Далее, поскольку матрица A циклична и b – ее циклический генератор, то определитель $\Gamma(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$, составленный для $z_i \in R^n$, будет ненулевой и, следовательно, данная алгебраическая система является совместной (более того, она имеет единственное решение относительно неизвестных коэффициентов β_i). Наконец, приняв во внимание тот аналитический факт (см. [3, с. 55]), что для любой циклической матрицы $A \in M_{n,n}(R)$ семейство всех коммутирующих с ней матриц D имеет описание $\{D \in M_{n,n}(R): D = \eta(A), \eta(\lambda) \in \Xi\}$, где Ξ – класс всех полиномов переменной λ степени не превышающей значения n , заключаем, что данная матрица X – единственная; что завершает доказательство леммы.

Лемма 3. Пусть $D \in M_{n,n}(R)$ коммутирует с $A \in M_{n,n}(R)$. Тогда для любого $x_0 \in R^n$ и соответствующему ему $z_0 = Dx_0$ будет $z(t) = Dx(t)$, $t \in T$, если $t \mapsto z(t)$ и $t \mapsto x(t)$ – решения дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dz(t)/dt &= Az(t), \quad z(t_0) = z_0 \in R^n, \quad (t \in T) \\ dx(t)/dt &= Ax(t), \quad x(t_0) = x_0 \in R^n. \end{aligned}$$

Теорема 1. Процесс $y \in C^\infty(T, R^n)$ удовлетворяет решению задачи дифференциальной реализации с однородной системой (1.1) минимального порядка n , если и только если $\langle S_j \rangle_n$ – кортеж j -струй на T от y имеет индекс n .

Доказательство. (Необходимость). Пусть y допускает дифференциальную реализацию минимального порядка n . С учетом $u(\cdot) = 0$, продифференцируем n раз второе уравнение в (1.1) (подставляя $dx(t)/dt$ из первого уравнения); в результате получим $n+1$ соотношений вида

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t), \\ dy(t)/dt &= CAx(t), \\ &\vdots \\ d^n y(t)/dt^n &= CA^n x(t). \end{aligned}$$

Сложим данные равенства, предварительно умножив первое из них на a_0 , второе – на a_1 , и т.д., последнее на единицу, где a_i , ($i = 0, \dots, n-1$) – коэффициенты нормированного характеристического полинома $\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ матрицы A . По теореме Гамильтона-Кэли матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению, поэтому члены с $x(t)$ в правой части

этих равенств исчезнут. В результате приходим к дифференциальному уравнению n -го порядка

$$d^n y(t)/dt^n + a_{n-1} d^{n-1} y(t)/dt^{n-1} + \dots + a_1 dy(t)/dt + a_0 y(t) = 0, \quad (2.2)$$

где a_i являются (определение 1) решением системы алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \langle z_1, z_1 \rangle_{C^\infty} & \langle z_1, z_2 \rangle_{C^\infty} & \dots & \langle z_1, z_n \rangle_{C^\infty} \\ \langle z_2, z_1 \rangle_{C^\infty} & \langle z_2, z_2 \rangle_{C^\infty} & \dots & \langle z_2, z_n \rangle_{C^\infty} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle z_n, z_1 \rangle_{C^\infty} & \langle z_n, z_2 \rangle_{C^\infty} & \dots & \langle z_n, z_n \rangle_{C^\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \dots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

здесь $z_i = d^{n-i} y/dt^{n-i}$ и $\xi_i = \langle -d^n y/dt^n, d^{n-i} y/dt^{n-i} \rangle_{C^\infty}$ для $i=1, \dots, n$.

Согласно дифференциального уравнения (2.2) S_n линейно зависимо в $C^\infty(T, R^p)$. Покажем, что $\dim \text{Span } S_n = n$, при этом «попутно» установим, что алгебраический базис в $\text{Span } S_n$ – суть $(n-1)$ -струя процесса y . Будем рассуждать от обратного предположения. Пусть найдутся n вещественных чисел $\hat{a}_i$, не все из которых равны нулю и такие, что имеет место

$$\hat{a}_{n-1} d^{n-1} y(t)/dt^{n-1} + \dots + \hat{a}_1 dy(t)/dt + \hat{a}_0 y(t) = 0, \quad (2.4)$$

при этом, не теряя общности, можно считать, что имеет место $\hat{a}_{n-1} = 1$; в противном случае порядок последнего дифференциального уравнения будет ниже $n-1$, что не влияет на дальнейший ход доказательства. Не трудно убедиться, что (2.4) приводит к противоречию (относительно порядка системы); в этом случае для y существует неуправляемая реализация с минимальной размерностью пространства состояний равной $n-1$, например (замечание 1), в такой математической постановке, очевидно, имеет место следующая система реализации:

$$\begin{aligned} dz(t)/dt &= \hat{A}z(t), \quad t \in T, \\ y(t) &= \hat{C}z(t), \\ \hat{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\hat{a}_0 & -\hat{a}_1 & -\hat{a}_2 & \dots & -\hat{a}_{n-2} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

конструкция $p \times (n-1)$ -матрицы $\hat{C}$ рассмотрена ниже (вторая часть доказательства); ограничимся общим замечанием, что элементы матрицы $\hat{C}$ зависят от начальных условий $z(t_0)$, элементов матрицы $\hat{A}$ и фиксированного выбора (лемма П.8 [10]) ее циклического генератора (см. ниже параметры матрицы C системы (2.7)).

(Достаточность). Пусть $\langle S_j \rangle_n$ -кортеж струй от процесса $y(\cdot)$ на интервале времени T имеет структурный индекс n . Тогда, поскольку S_n линейно зависимо, найдется, причем единственный (поскольку $\dim \text{Span } S_{n-1} = n$), набор вещественных a_i ($i=0, 1, \dots, n-1$), такой, что

$$d^n y(t)/dt^n + a_{n-1} d^{n-1} y(t)/dt^{n-1} + \dots + a_1 dy(t)/dt + a_0 y(t) = 0.$$

Теперь, обозначив через y_j – j -ую координату ($j \in \{1, \dots, p\}$) вектор-функции $y \in C^\infty(T, R^p)$, введем вспомогательный вектор состояния $\hat{y}_j \in C^\infty(T, R^n)$ с координатными переменными $\hat{y}_{ji}$, задаваемыми определяющими выражениями:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{j1}(t) &= y_j(t), \\ \hat{y}_{j2}(t) &= d\hat{y}_{j1}(t)/dt, \\ \hat{y}_{ji}(t) &= d^{i-1} y_j(t)/dt^{i-1}, \quad (i=3, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В результате приходим к дифференциальной векторно-матричной системе вида

$$\begin{aligned} d\hat{y}_j(t)/dt &= A\hat{y}_j(t), \quad t \in T, \\ y_j(t) &= \hat{C}\hat{y}_j(t), \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= [1, 0, \dots, 0]. \end{aligned}$$

Обозначим через b некоторый (лемма П.8 [10]) циклический генератор матрицы A и пусть $D_j \in M_{n,n}(R)$ – матрица, удовлетворяющая алгебраическим условиям

$$D_j A = A D_j, \quad D_j b = \hat{y}_j(t_0).$$

Очевидно, что такая матрица D_j существует в силу леммы 2, причем

$$D_j = \beta_0 E_n + \beta_1 A + \beta_2 A^2 + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1}, \quad (2.6)$$

где коэффициенты β_i ($i=0, \dots, n-1$) – решение линейной системы уравнений

$$\beta_0 b + \beta_1 A b + \beta_2 A^2 b + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1} b = \hat{y}_j(t_0).$$

Введем в рассмотрение вектор состояния $x(t)$ системы $dx(t)/dt = Ax(t)$. Тогда $\hat{y}_j(t) = D_j x(t)$, $x(t_0) = b$, что справедливо в силу леммы 3. В результате приходим к системе реализации для отдельной переменной $y_j(\cdot)$ выходного сигнала

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t), \quad x(t_0) = b, \quad t \in T, \\ y_j(t) &= \hat{C} D_j x(t). \end{aligned}$$

Ясно, что подобную систему (с теми же A , b и $\hat{C}$, но своей D_j) можно, построить для любого индекса $j=1, \dots, p$. Таким образом, имеем окончательное решение дифференциальной реализации для процесса $y(\cdot)$

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t), \quad x_0 = b, \quad t \in T, \\ y(t) &= Cx(t), \\ C &= \begin{bmatrix} \hat{C} D_1 \\ \dots \\ \hat{C} D_p \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

что завершает доказательство теоремы.

С л е д с т в и е 1. Процесс $y \in C^\infty(T, R^p)$ удовлетворяет решению задачи реализации с системой (2.7) минимального порядка n , если и только если для вектор-функций $s_1, \dots, s_n \in S_{n-1}$ будет

$$\Gamma(s_1, \dots, s_n) \neq 0, \quad (2.8)$$

тогда как для $n+1$ вектор-функций $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{n+1} \in S_n$ имеет место

$$\Gamma(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{n+1}) = 0. \quad (2.9)$$

Следствие 1 устанавливается комбинированием теоремы 1 и леммы 1; оно позволяет постро-

ить алгоритмическую процедуру для анализа разрешимости задачи реализации минимального порядка в классе линейных многомерных однородных систем.

С л е д с т в и е 2. *Пара (C, A) системы (2.7) полностью наблюдаема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пара матриц (C, A) не является наблюдаемой. Тогда, как известно (теорема 3.1 [11, с. 88]), существует нетривиальное (т.е. ненулевое) A -инвариантное подпространство $N \subset R^n$, геометрически определяемое как

$$N = \cap \{ \text{Ker} (CA^{i-1}) : i=1, \dots, n \} \neq \{0\} \in R^n,$$

которое представляет наибольшее A -инвариантное подпространство, содержащееся в $\text{Ker } C$ – ядро матрицы C выходного сигнала $y(t)$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ фактор-пространство R^n/N , через $\hat{A}: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ – линейное отображение, индуцированное в фактор-пространстве $\mathfrak{N}$ оператором A и, поскольку $\text{Ker } C \supset N$, то существует и такое линейное отображение $\hat{C}: \mathfrak{N} \rightarrow R^p$, что

$$\hat{C}P = C,$$

где $P: R^n \rightarrow \mathfrak{N}$ – каноническое фактор-отображение. Таким образом, для вектор-функции y имеем возможность построить «фактор-систему» реализации вида

$$\begin{aligned} dz(t)/dt &= \hat{A}z(t), \quad z(t_0) = Pb, \quad t \in T, \\ y(t) &= \hat{C}z(t); \end{aligned}$$

иными словами, всегда можно построить однородную систему минимальной реализации «состояние-выход» по модулю максимального ненаблюдаемого подпространства. Поскольку $\dim \mathfrak{N} < \dim R^n$, то порядок этой реализации меньше n , что противоречит исходной посылке. Доказательство завершено.

С л е д с т в и е 3. *Для матрицы A системы (2.7) имеет место $\chi(\lambda) = \pi(\lambda)$.*

(Это следует из замечания 3 и леммы П.8 [10, с. 263]).

Сделаем несколько общих заключительных замечаний по поводу прикладного значения полученных в этом разделе теоретических результатов. Информационную избыточность комплекса подготовительных апостериорных измерений исключает характеристический признак исследуемого процесса «на предмет» корректности рассмотренной выше постановки, при этом условие (2.1) обеспечивает численную проверку этого признака.

Теорема 1 позволяет утверждать, что интервал T наблюдения n -струи ограничен снизу (см. теорему 5 [6]) лишь техническими возможностями измерительной и вычислительной аппаратуры, поскольку представление n -струи (в кортеже с индексом n) определяется фазовой траекторией системы, которую можно рассматривать как «кусок» орбиты циклического генератора b матрицы реализации A относительно однопараметрической группы преобразований R , действующей в R^n .

Следствие 1 приводит к численной процедуре проверки характеристического признака разрешимости задачи реализации процесса (2.1). Следствие 2 утверждает: любая линейная однородная реализация минимального порядка по существу является наблюдаемой фактор-системой по модулю максимального ненаблюдаемого подпространства пространства состояний полной линейной однородной системы уравнений моделируемой динамики. Проблему существования алгоритма параметрической идентификации в классе линейных однородных систем минимального порядка, сводящуюся к задаче алгоритмизации процесса построения минимального полинома матрицы однородного объекта, решает следствие 3, обеспечивающее свойство цикличности линейной оболочки фазовой траектории в структуре фазового потока с циклическим генератором и фундаментальной матрицей системы реализации.

Доказательство теоремы 1 определяет основные «шаги» в построения однородной системы реализации минимального порядка n :

шаг 1 – определение минимального порядка n однородной системы дифференциальной реализации через вычисление соответствующего индекса кортежа струй исследуемого процесса (2.1) (согласно (2.8), (2.9));

шаг 2 – вычисление элементов $\{-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1}\}$ фробениусовой матрицы A моделируемой однородной системы дифференциальных уравнений (на базе построенного на шаге 1 минимального порядка n и решения системы (2.3));

шаг 3 – фиксация начального вектора состояния x_0 системы реализации в форме некоторого (любого заданного) циклического генератора b для A и расчет матриц D_j ($j=1, \dots, p$) и C выходного сигнала (согласно выражений (2.5)-(2.7), b и положения $(n-1)$ -струи в момент времени t_0).

Хотя выше в основном было уделено внимание проблеме существования алгоритма реализации, отметим, что вопрос о его помехозащищенности решается положительно на основе заложенной в нем минимизации числа параметров системы, подлежащих оценке (в отличие от подхода, культивированного в [8]), а именно, идентификации минимального полинома матрицы A («шаг 2») и элементов матрицы C («шаг 3») по осредненным на T измерениям выходного сигнала.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ «ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД»

Условия (1.2) постановки задачи реализации оправданы с позиции определения минимальных размерностей пространств «входных» и «выходных» сигналов, но все-таки (по большому счету) недостаточны. Чтобы исключить статическую связь между координатами пары «вход-выход», необходимо, помимо означенных условий, чтобы

любая переменная выходного сигнала не сводилась к линейной комбинации переменных вектора входных воздействий; это естественное требование формализует:

Определение 6. Пару $(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ назовем динамической, если для нее выполняются следующие три условия

$$\dim \text{Span}\{y_i \in C^\infty(T, R): i=1, \dots, p\}=p, \text{col}(y_1, \dots, y_p)=y; \\ \dim \text{Span}\{u_j \in C^\infty(T, R): j=1, \dots, m\}=m, \text{col}(u_1, \dots, u_m)=u, \\ y_i(\cdot) \notin \text{Span}\{u_j(\cdot): j=1, \dots, m\}, i=1, \dots, p.$$

Лемма 4. Пара $(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ является динамической в том и только том случае, если имеют место оба равенства

$$\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_p) \neq 0, \quad (3.1)$$

$$\Gamma(y_1, u_1, \dots, u_m) \neq 0, i=1, \dots, p;$$

везде далее процесс “вход-выход”

$(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ – динамическая пара.

Далее, заметим, что степень Мак-Миллана [10, с. 22] – степень “правильной” передаточной функции, соответствующая минимальному порядку, требует внесения коррективы языка струй (определение 3); на самом деле, не считая сокращений “нулей-полюсов” в условии реализации правильной передаточной функции [10, с. 21], большого различия в возможных математических конструкциях этого корректива по существу не имеется. Поэтому ниже разработаем вариант реализации, обеспечивающий отсутствие данных “нулей”.

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ – стандартный (естественный) базис в R^p и $U_j = \{u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jm}\}$, где u_j – j -ая координата ($j \in \{1, \dots, m\}$) вектор-функции $u \in C^\infty(T, R^m)$. Следующее определение важно как для уточнения основных математических понятий развиваемой ниже теории апостериорного моделирования уравнений динамики, так и согласованности их с введенными ранее (определение 3).

Определение 7. Пусть $(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ – процесс “вход-выход” и k – некоторое неотрицательное целое число. Тогда множество $S_{k,pm}$

$$S_{k,pm} = \{y, dy/dt, \dots, d^k y/dt^k\} \cup \{U_j: j=1, \dots, m\} \quad (3.2)$$

назовем k, pm -струей процесса (y, u) на интервале времени T .

Замечание 4. Отсутствие в конструкции k, pm -струи производных от переменных входного сигнала u по существу *a priori* исключает наличие нулей правильной передаточной функции системы реализации; в этом контексте далее под системой дифференциальной реализации динамической пары (3.1) будем подразумевать систему “вход-состояние-выход” минимального порядка, обеспечивающую отсутствие нулей у векторной передаточной функции “вход-выход”; что не исключает (методологически) нарушение теоремы 2.4 [10, с. 60].

Ясно, что на интервале времени T любой $\langle S_{j,pm} \rangle_k$ -кортеж из j, pm -струй динамического процесса $(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ может обладать (или не обладать) структурным индексом в смысле определения 2; разрешимость этого вопроса устанавливает следующая лемма.

Лемма 5. $\langle S_{j,pm} \rangle_k$ -кортеж j, pm -струй процесса $(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ обладает индексом $k+pm$ в том и только том случае, если для $k+pm$ вектор-функций $s_1, \dots, s_{k+pm} \in S_{k+1,pm}$ имеет место $\Gamma(s_1, \dots, s_{k+pm}) \neq 0$, тогда как для $k+1+pm$ вектор-функций $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{k+1+pm}$ из $S_{k,pm}$ определитель Грама равен нулю.

Доказательство. (Необходимость). Если индекс кортежа j, pm -струй $S_{j,pm}, j=0, \dots, k$ динамического процесса (y, u) равен $k+pm$, то (согласно определению 2) справедливы равенства

$$\dim \text{Span } S_{k,pm} = \dim \text{Span } S_{k+1,pm} = k+pm$$

и, следовательно, для соответствующих определителей Грама будет

$$\Gamma(s_1, \dots, s_{k+pm}) \neq 0, \quad \Gamma(\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_{k+1+pm}) = 0,$$

что имеет место в силу представления (3.2) и леммы 1.

Достаточность устанавливается прямым обращением приведенного выше вывода. Лемма доказана

Теорема 2. Пусть $(y, u) \in C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$ – динамический процесс «вход-выход». Тогда (y, u) удовлетворяет решению задачи реализации в классе систем (1.1) минимального порядка n , если и только если $\langle S_{j,pm} \rangle_k$ -кортеж из j, pm -струй, индуцированных вектор-функцией (y, u) на интервале времени T , имеет индекс $k+pm$, при этом $kp \geq n \geq k$.

Замечание 5. Вариант, когда порядок n реализации равен k , иллюстрирован ниже в примере 1 (кроме того, он заведомо осуществляется для процессов с нулевым управлением – теорема 1), случай $n=kp$ в приведен примере 2.

Доказательство теоремы 2. (Достаточность). Поскольку множество $S_{k,pm}$ линейно зависимо в $C^\infty(T, R^p)$, то найдутся, согласно леммы 1, такие (причем единственные) два набора вещественных чисел $\hat{a}_i$ ($i=0, 1, \dots, k-1$) и g_{ij} ($i=1, \dots, p; j=1, \dots, m$), что процесс (y, u) будет удовлетворять векторно-матричному дифференциальному уравнению

$$d^k y(t)/dt^k + \hat{a}_{k-1} d^{k-1} y(t)/dt^{k-1} + \dots + \hat{a}_1 dy(t)/dt + \hat{a}_0 y(t) = \\ = (g_{11}e_1 + \dots + g_{p1}e_p)u_1(t) + \dots + (g_{1m}e_1 + \dots + g_{pm}e_p)u_m(t) = \\ = \beta_1 u_1(t) + \dots + \beta_m u_m(t) = Gu(t), \quad (3.3)$$

где $\beta_j \in R^p$ ($j=1, \dots, m$) и $G \in M_{p,m}(R)$ имеют структуру согласно соответствующих им коэффициентов g_{ij} ; нумерация чисел g_{ij} суть нумерация элементов матрицы G , при этом векторы β_j полезны при составлении передаточных вектор-функций для выходного сигнала y относительно конкретного входного воздействия u_j .

Теперь наметим (в продолжении хода доказательства) общую вычислительную процедуру

динамической реализации моделируемых дифференциальных уравнений; условно ее можно составить из двух шагов. На шаге 1 будем строить реализацию системы “вход-выход” (3.3) в терминах некоторой системы с геометрической структурой типа “вход-состояние-выход” с kp -мерным пространством состояний (и, следовательно, $n \leq kp$). Второй шаг процедуры реализации заключается в построении системы «вход-состояние-выход», обладающей минимальным порядком; или, говоря более формально, на шаге 2 должны построить “фактор-систему” по модулю максимального ненаблюдаемого подпространства пространства состояний системы реализации типа “вход-состояние-выход”, найденной на шаге 1.

Шаг 1. Введем в рассмотрение $z(t)$ – kp -мерный вектор состояния:

$$z(t) = \text{col}(z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)) \in R^{kp}, \\ z_1(t) = y(t), z_2(t) = dy(t)/dt, \dots, z_k(t) = d^{k-1}y(t)/dt^{k-1}.$$

Это аналитическое представление приводит (в силу дифференциальных уравнений (3.3)) к новой векторно-матричной дифференциальной системе

$$dz(t)/dt = \hat{A}z(t) + \hat{G}u(t), \quad t \in T, \quad (3.4) \\ z_0 = z(t_0) = \text{col}(y(t_0), dy(t_0)/dt, \dots, d^{k-1}y(t_0)/dt^{k-1}), \quad t = t_0, \\ y(t) = \hat{C}z(t),$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & E_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_k \\ -\hat{a}_0 E_k & -\hat{a}_1 E_k & -\hat{a}_2 E_k & \dots & -\hat{a}_{k-1} E_k \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ G \end{bmatrix}, \\ \hat{C} = [E_k, 0, \dots, 0];$$

где E_k – единичная $k \times k$ -матрица, матрицы $\hat{A}$, $\hat{G}$, $\hat{C}$ суть элементы соответствующих пространств $\hat{A} \in M_{kp, kp}(R)$, $\hat{G} \in M_{kp, m}(R)$, $\hat{C} \in M_{p, kp}(R)$. Система (3.4) решает задачу дифференциальной реализации, хотя возможно в чуть большей общности, чем это обычно бывает нужно; её порядок, как правило, не отвечает условию минимальности, что важно для преодоления процедурной “переобусловленности” задачи моделирования. Это затруднение снимает второй шаг реализации.

Шаг 2. Данный шаг процедуры реализации состоит в редукции системы (3.4) к минимальной реализации типа “вход-состояние-выход”; это делается весьма просто при помощи координатного построения максимального ненаблюдаемого подпространства $N \subset R^{kp}$ системы (3.4), и имеющего [11, с. 89] геометрический вид

$$N = \cap \{ \text{Ker}(\hat{C}\hat{A}^{i-1}) : i=1, \dots, kp \} \neq 0 \in R^{kp},$$

которое представляет наибольшее $\hat{A}$ -инвариантное подпространство, содержащееся в $\text{Ker} \hat{C}$ (ядро матрицы $\hat{C}$).

Пусть $n = kp - \dim N$. Далее, обозначим через R^n фактор-пространство R^{kp}/N , через $A: R^n \rightarrow R^n$ – линейное отображение, индуцированное в R^n оператором $\hat{A}$ системы (3.4) и, поскольку имеет

место включение $\text{Ker} \hat{C} \supset N$, то существуют такие, линейные отображения $B: R^m \rightarrow R^n$ и $C: R^n \rightarrow R^p$, что для них справедливо $B = P\hat{G}$, $CP = \hat{C}$, где $P: R^{kp} \rightarrow R^n$ – каноническое фактор-отображение по модулю N . Таким образом, для процесса (y, u) имеем возможность построить «фактор-систему» дифференциальной реализации вида

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = Px_0, \quad t \in T, \quad (3.5) \\ y(t) = Cx(t).$$

Поскольку $\dim R^n \leq \dim R^{kp}$, то порядок n данной реализации не превышает значения kp ; система (3.5), вообще говоря (см. замечание 4), возможно не будет полностью управляемой, однако она обладает одним приятным свойством, выраженным языком структуры матрицы $G \in M_{p, m}(R)$, а именно, система (3.5) полностью управляема тогда и только тогда, когда G не имеет нулевых строк.

(Необходимость). Пусть процесс (y, u) удовлетворяет решению некоторой системы (1.1), с минимальным пространством состояний R^n , и пусть k – степень минимального полинома матрицы A . Продифференцировав k раз второе уравнение системы, и подставляя, каждый раз, выражение $dx(t)/dt$ из первого уравнения, в результате этих векторных “манипуляций” получим $k+1$ равенств

$$y(t) = Cx(t), \\ dy(t)/dt = CAx(t) + CBu(t), \\ d^2y(t)/dt^2 = CA^2x(t) + CABu(t) + CBdu(t)/dt, \\ \dots \\ d^jy(t)/dt^j = CA^jx(t) + CA^{j-1}Bu(t) + \\ + CA^{j-2}Bdu(t)/dt + \dots + CBd^{j-1}u(t)/dt^{j-1}, \\ \dots \\ d^ky(t)/dt^k = CA^kx(t) + CA^{k-1}Bu(t) + \\ + CA^{k-2}Bdu(t)/dt + \dots + CBd^{k-1}u(t)/dt^{k-1}. \quad (3.6)$$

Сложим уравнения (3.6), умножив первое на a_0 , второе – на a_1 , и т.д., последнее на единицу, где a_i – коэффициенты нормированного минимального полинома

$$\pi(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

матрицы A системы (1.1). Учитывая, что A удовлетворяет уравнению $\pi(A) = 0$, вектор-функция $x(t)$ в правой части суммы уравнений системы (3.6) исчезнет. Как результат приходим к векторно-матричному дифференциальному уравнению k -го порядка относительно процесса (y, u)

$$d^ky(t)/dt^k + a_{k-1}d^{k-1}y(t)/dt^{k-1} + \dots + a_1dy(t)/dt + a_0y(t) = \\ = B_{k-1}d^{k-1}u(t)/dt^{k-1} + \dots + B_1du(t)/dt + B_0u(t), \quad (3.7)$$

где матрицы $B_j \in M_{p, m}(R)$ в силу (3.6) имеют вид

$$B_j = C(A^{k-j-1} + a_{k-1}A^{k-j-2} + \dots + a_{j+2}A + a_{j+1}E_n)B, \\ j=0, \dots, k-1;$$

матрицы B_{j-1} , $j=1, \dots, k-1$ заведомо нулевые в силу априорного предположения об отсутствии нулей векторной передаточной функции “вход-выход” (замечание 4).

Далее, поскольку степень полинома $\pi(\lambda)$ не выше n , то минимальный порядок отвечает оценке $n \geq k$. Поэтому из структуры уравнения (3.7) вытекает: вектор-функции k, pm -струи $S_{k, pm}$ ли-

нейно зависимы в $C^\infty(T, R^p) \times C^\infty(T, R^m)$, откуда, если $\dim \text{Span } S_{k-1, pm} = k+pm$, то в доказательстве можно ставить «точку». В противном случае в силу (3.1), (3.2) найдется такой минимальный j ($k-1 \geq j \geq 1$), что $\dim \text{Span } S_{j, pm} = \dim \text{Span } S_{j-1, pm} = j+pm$, ясно, что индекс j соотносится с минимальным порядком как $n > j$ при этом $n \leq jp$; вариант $n > jp$ приводит к противоречию, т.к. всегда можно построить реализацию для (y, u) , аналогичную представлению (3.4). Доказательство завершено.

Следствие 4. Динамический процесс (y, u) удовлетворяет решению задачи дифференциальной реализации в классе систем (1.1) с минимальным порядком n (с оценкой $kp \geq n \geq k$) при u только при условии, когда для $k+pm$ вектор-функций $s_1, \dots, s_{k+pm} \in S_{k-1, pm}$ имеет место

$$\Gamma(s_1, \dots, s_{k+pm}) \neq 0, \quad (3.8)$$

тогда как для $k+1+pm$ вектор-функций $s_1, \dots, s_{k+1+pm}$ из $S_{k, pm}$ будет

$$\Gamma(s_1, \dots, s_{k+1+pm}) = 0. \quad (3.9)$$

Следствие 4 позволяет построить вычислительный алгоритм анализа разрешимости задачи реализации уравнений линейной динамики «вход-состояние-выход» с минимальным фазовым пространством состояний.

Следствие 5. Пара (C, A) реализации (1.1) (с минимальным порядком n) процесса (y, u) полностью наблюдаема.

Следующие примеры кратко комментируют замечание 5.

Пример 1. Пусть $y(t) = \text{col}(e^{2t}, e^t - 1)$, $u(t) = 1$, $T = [0, 1]$; в такой постановке (y, u) – динамическая пара (в силу (3.1)) с индексами выходного и входного сигналов, равными $p=2$ и $m=1$. Следствие 4 справедливо с индексом $k=2$

$$d^2 y(t)/dt^2 - 3 dy(t)/dt + 2y(t) = -2u(t)e_2,$$

при этом для процесса (y, u) система дифференциальных уравнений его реализации минимального порядка $n=k$ имеет вид

$$dx_1(t)/dt = 2x_1(t), \quad dx_2(t)/dt = x_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = 1,$$

$$x_2(0) = 0, \quad t \in T,$$

$$y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = x_2(t).$$

Пример 2. Пусть $y(t) = \text{col}(e^t, e^t - 1)$, $u(t) = 1$, $T = [0, 1]$. В силу (3.1) (y, u) – динамическая пара с $p=2$ и $m=1$. Следствие 4 справедливо с $k=1$

$$dy(t)/dt - y(t) = u(t)e_2,$$

Для (y, u) реализация минимального порядка $n=kr$ имеет вид

$$dx_1(t)/dt = x_1(t), \quad dx_2(t)/dt = x_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = 1,$$

$$x_2(0) = 0, \quad t \in T,$$

$$y_1(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = x_2(t).$$

Из примера 1 следует, что кортеж струй отдельной j -ой переменной выходного сигнала может иметь значение k_j индекса кортежа, которое меньше (в примере 1 для y_2 имеем $k_j=1$) чем аналогичный индекс от всего выходного сигнала (имеем $k=2$); т.е. j -ая строка матрицы выходного сигнала такова, что не все жордановы клетки мат-

рицы системы активируют сигнал j -ой переменной от y ; это приводит к тому, что передаточная функция этой переменной содержит не все полюсы общей векторной передаточной функции модели реализации (см. этап 4 раздела 4).

Пример 2 показывает, что минимальный порядок системы “вход-состояние-выход” (в примере 2 $n=2$) не во всех случаях можно восстановить по данным измерений, полученным на собственном движении объекта, т.е. предварительно восстановив структуру однородной системы (соответственно $n=1$); что, например, культивировалось для идентификации этого порядка в [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные идеи можно развить в нескольких направлениях:

- на системы с кусочно-непрерывным управлением, и имеющие структуру передаточных функций с произвольной степенью Мак-Миллана (в этом контексте имеется в виду естественный симбиоз с теорией распределений [12]);
- на конечные пучки исследуемых траекторий (с различными вариантами, как вектор-функции управляющих воздействий, так и вектора начальных состояний);
- на системы, описываемые уравнениями с запаздываниями;
- на квазилинейные системы “вход-состояние-выход”, включающие учет нелинейных членов в правой части уравнений состояния.

Работа поддержана грант-контрактами: Российский фонд фундаментальных исследований (проект № 09-01-00274), Программа фундаментальных исследований № 15 Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, Грант Президента Российской Федерации по государственной поддержке научных школ Российской Федерации (№ НШ-1676.2008.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. - М.: Наука, 1991.
2. Русанов В.А., Козырев В.А., Д.Е. Урбанович, Шишкин Г.М. Оптимизация процесса гальваностегии на базе апостериорной модели ее динамики // Вестник Московского государственного технического университета. Сер. “Естественные науки”. - 2007. - № 4. - С. 98-109.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. - М.: Мир, 1971.
4. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. - М.: Мир, 1978.

5. Polderman J.W., Willems J.C. Introduction to mathematical systems theory: A behavioral approach. - Berlin: Springer-Verlag, 1997.
6. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. От реализации Калмана-Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа // Кибернетика и системный анализ. - 2005. - № 6. - С. 137-157.
7. Данеев А.В., Лакеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. К теории реализации сильных дифференциальных моделей. I // Сибирский журнал промышленной математики. - 2005. - Т. VIII. - № 1. - С. 53-63.
8. Дмитриев А.В., Дружинин Э.И. Идентификация динамических характеристик непрерывных линейных моделей в условиях полной параметрической неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. - 1999. - № 3. - С. 44-52.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
10. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002.
11. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. - М.: Наука, 1980.
12. Гайшун И.В. Идентификация линейных нестационарных систем по реакции на обобщенные управления // Дифференциальные уравнения. - 2008. - Т. 44. - № 3. - С. 301-307.

ABOUT STRUCTURALLY-PARAMETRICAL IDENTIFICATION OF STATIONARY MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS

© 2009 A.V. Daneev¹, V.A. Kozyrev², A.E. Kumenko³, V.A. Rusanov²

¹East-Siberian institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Irkutsk

²Institute of Dynamics of Systems and the Theory of Management
of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Irkutsk

³13-th State Scientific Research Institute of the Ministry of Defence of Russia, Lyubertsy

In the paper it conducted research of the qualitative properties of aposteriorial dynamic processes of a type "input-exit", supposing modelling realisation of Kalman-Mesarovich in a class of linear invariant in time multidimensional systems "input-condition-exit" of minimal order. Constructive procedure for reception of such realisations (both with managing program variables, and without them) is offered.

Key words: structurally-parametrical identification, dynamic process, the task of realisation Kalman-Mesarovich

Alexey Daneev, Doctor of Technics, Chief of Department.

E-mail: daneev@mail.ru.

Vladimir Kozyrev, Graduate Student.

Anton Kumenko, Candidate of Technics, Head of Laboratory.

Vyacheslav Rusanov, Doctor of Physics and Mathematics,
Chief Research Fellow.