

АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОНЦЕВОГО ТЕЛА ПРИ РАЗВЕРТЫВАНИИ ОРБИТАЛЬНОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ

© 2009 Ю.М. Заболотнов, О.Н. Наумов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 26.01.2009

Построена пространственная математическая модель движения концевого тела с учетом его вращения относительно центра масс при разворачивании тросовой системы с космического аппарата, совершающего полет по орбите ИСЗ. При анализе вращательного движения учитываются гравитационный и аэродинамический моменты, момент от силы упругости троса. Исследовано влияние изменения силы упругости троса, динамической асимметрии и асимметрии точки крепления троса на вращательное движение концевого тела.

Ключевые слова: пространственная математическая модель, концевое тело, тросовая система, космический аппарат, сила упругости троса, динамическая асимметрия

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Космические тросовые системы (ТС) могут быть использованы для решения чрезвычайно широкого круга задач [1]: возвращение на Землю легкой спускаемой капсулы (ЛСК), содержащей полезный груз; исследование гравитационного поля Земли; создание искусственной гравитации на борту космического аппарата (КА); исследование ионосферы; съемка земной поверхности с более высоким разрешением; орбитальные маневры КА и др. При моделировании разворачивания ТС необходимо по возможности учитывать как можно больше возмущающих факторов, в том числе и собственное вращательное движение концевого груза относительно своего центра масс. Анализ вращательного движения концевого тела и выбор на этой основе параметров ТС, исходя из заданных ограничений на углы ориентации и угловые скорости вращения, позволят исключить запутывание троса, обеспечить приемлемые начальные условия движения концевого тела при его отделении от ТС, повысить безопасность проведения тросовых космических экспериментов.

В данной работе предполагается, что КА при проведении тросового эксперимента ориентирован по местной вертикали и удерживается в этом положении с помощью системы стабилизации. Концевой груз рассматривается как твердое тело, а трос считается невесомым. Движение механической системы проис-

ходит в центральном гравитационном поле. При анализе вращательного движения груза учитываются аэродинамический и гравитационный моменты, момент от силы натяжения троса. Сила натяжения троса вычисляется с помощью одностороннего закона Гука (трос не работает на сжатие). Работа механизма управления разворачиванием ТС моделируется с помощью дифференциальных уравнений, учитывающих его инерционность. Управляющая сила в механизме управления задается в соответствии с принципом обратной связи в зависимости от возникающих ошибок по длине троса и по скорости его разворачивания.

Анализируется влияние на пространственное вращательное движение груза силы упругости троса и коэффициентов обратной связи, которые определяют переходные процессы в системе управления. Проводится также анализ влияния динамической асимметрии концевого тела и асимметрии в точке крепления троса на движение тела вокруг своего центра масс. В качестве примера приводятся результаты численных расчетов вращательного движения спускаемой капсулы, возвращаемой с орбиты с помощью разворачиваемой ТС.

2. УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ

Уравнения движения центров масс КА и концевого тела, его уравнения вращательного движения записываются в геоцентрической неподвижной системе координат. Используется классический метод описания вращательного движения относительно центра масс: динамические и кинематические уравнения Эйлера

Заболотнов Юрий Михайлович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и механики. E-mail: yumz@yandex.ru

Наумов Олег Николаевич, студент Тольяттинского филиала. E-mail: olegnaumov6386@yandex.ru

$$\begin{aligned} I_X \cdot \frac{d\omega_X}{dt} + \omega_Y \cdot \omega_Z \cdot (I_Z - I_Y) &= \sum M_X, \\ I_Y \cdot \frac{d\omega_Y}{dt} + \omega_X \cdot \omega_Z \cdot (I_X - I_Z) &= \sum M_Y, \\ I_Z \cdot \frac{d\omega_Z}{dt} + \omega_X \cdot \omega_Y \cdot (I_Y - I_X) &= \sum M_Z, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\omega_X \cdot \sin \varphi + \omega_Y \cdot \cos \varphi}{\sin \theta}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_Z - \frac{(\omega_X \cdot \sin \varphi + \omega_Y \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \theta}{\sin \theta}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_X \cdot \cos \varphi - \omega_Y \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

где I_X, I_Y, I_Z - моменты инерции груза в главных связанных осях; ω_i и $\sum M_i$ ($i = x, y, z$) - проекции угловых скоростей вращения груза и действующих на него моментов на оси главной связанной системы координат; ψ, φ, θ - углы Эйлера, определенные относительно геоцентрической неподвижной системы координат; $M_i = M_{grav_i} + M_{aer_i} + M_{elast_i}$.

Проекции гравитационного момента (M_{grav}) для центрального поля имеют следующий вид [2]

$$\begin{aligned} M_{grav_x} &= \frac{3K}{r_2^3} (I_Z - I_Y) a_{[22]} a_{[23]}, \\ M_{grav_y} &= \frac{3K}{r_2^3} (I_X - I_Z) a_{[23]} a_{[21]}, \\ M_{grav_z} &= \frac{3K}{r_2^3} (I_Y - I_X) a_{[21]} a_{[22]}, \end{aligned} \quad (3)$$

где K - гравитационный параметр Земли, r_2 - расстояние центра масс груза до центра Земли $a_{[21]}, a_{[22]}, a_{[23]}$ - элементы матрицы перехода от орбитальной к связанной системе координат.

Вектор аэродинамического момента (\vec{M}_{aer}) определяется следующим образом

$$\vec{M}_{aer} = \vec{r}_{cd} \times \vec{F}_{aer}, \quad (4)$$

где \vec{F}_{aer} - вектор аэродинамической силы, а вектор \vec{r}_{cd} определяет положение центра давления относительно центра масс груза.

Вектор аэродинамической силы \vec{F}_{aer} для тела вращения имеет в системе координат, связанной с пространственным углом атаки (α) две составляющие, поэтому

$$\begin{aligned} F_{aerY_p} &= c_y \cdot s \cdot q \cdot \sin \alpha, \\ F_{aerX_p} &= -c_x \cdot s \cdot q \cdot \cos \alpha, \\ F_{aerZ_p} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

c_x, c_y - аэродинамические коэффициенты, s - площадь миделевого сечения, $q = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_2^2$ - скоростной напор, $\rho = f(h)$ - плотность атмосферы (ГОСТ 25645.101-83), h - высота полета, V_2 - модуль скорости груза.

Момент от силы упругости троса (\vec{M}_{elast}) определяется из выражения

$$\vec{M}_{elast} = \vec{\Delta R}_e \times \vec{F}_{elast}, \quad (6)$$

где $\vec{\Delta R}_e$ - радиус-вектор точки крепления троса относительно центра масс груза; \vec{F}_{elast} - сила упругости.

Для определения модуля силы упругости применяется односторонний закон Гука

$$F_{elast} = \begin{cases} \frac{c \cdot (L_{AB} - L)}{L}, & \text{при } L_{AB} - L > 0 \\ 0, & \text{при } L_{AB} - L \leq 0 \end{cases}, \quad (7)$$

где L_{AB} - расстояние между точками крепления троса на КА и на грузе, L - длина выпущенного из механизма троса, $c = ES$ - жесткость троса, E и S - модуль Юнга и площадь поперечного сечения троса.

Уравнения, описывающие работу механизма управления, записываются в виде

$$\begin{aligned} m_{in} \cdot \frac{dV_T}{dt} &= F_{elast} - F_c, \\ \frac{dL}{dt} &= V_T, \end{aligned} \quad (8)$$

где $F_c = K_L \cdot (L - L_{progr}) + K_V \cdot (V_T - V_{progr})$ - управляющая сила в механизме разворачивания, m_{in} - коэффициент, характеризующий инерционность механизма; K_L и K_V - коэффициенты обратной связи системы управления; V_T - скорость троса.

Уравнения (1), (2), (8) необходимо дополнить уравнениями движения центров масс КА и груза, которые имеют следующий вид

$$m_k \cdot \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = -\frac{K}{r_k^2} \cdot \frac{\vec{r}_k}{r_k} + \vec{F}_k. \quad (9)$$

\vec{F}_k ($k = 1, 2$) - сумма всех внешних сил (без гравитационной силы), действующих на КА и груз; \vec{r}_k - радиус-вектора центров масс тел, входящих в систему; m_k - массы тел.

Дифференциальные уравнения (1), (2), (8), (9) необходимо дополнить заданием значений коэффициентов обратной связи (K_L, K_V) и стандартными матрицами перехода между геоцентрической, орбитальной и главной связанной системами координат.

3. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ СИЛЫ НАТЯЖЕНИЯ ТРОСА НА ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ КОНЦЕВОГО ТЕЛА

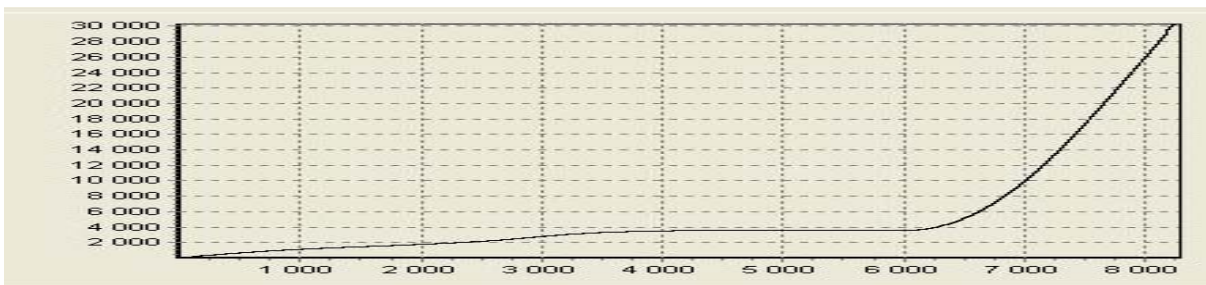
В работе в качестве примера рассматривался программный закон развертывания ТС, предназначенной для возвращения с орбиты легкой спускаемой капсулы [3, 4]. Данный эксперимент был проведен в сентябре 2007 года на КА “Фотон МЗ”. На рис. 1 и 2 приводятся зависимости длины троса и его скорости развертывания от времени. Развертывание ТС в этом случае состоит из двух этапов. На первом этапе (до 6000 секунд), развертывание происходит с малыми скоростями. На втором этапе сначала происходит быстрое развертывание троса (максимальная скорость достигает 17 м/с), а потом – резкое торможение (конечная скорость троса близка к нулю). Управление развертыванием ТС осуществлялась с помощью специального механизма за счет изменения силы трения при соскальзывании троса [4]. Харак-

теристики груза сферической формы следующие: масса $m = 20$ кг, моменты инерции $I_x = I_y = 0.32$ кг·м², $I_z = 0.30$ кг·м², диаметр 0.4 м. Характеристики троса: диаметр 0.6 мм, погонная масса 0.2 кг/км, модуль Юнга $2.5 \cdot 10^{10}$ н/м².

Закон изменения силы натяжения троса, соответствующий рассматриваемой программе развертывания ТС приводится на рис. 3, зависимость угла нутации от времени – на рис. 4. Угол нутации ϑ оси динамической симметрии груза в данном случае определяется относительно направления троса. Сравнение этих зависимостей показывает, что несмотря действие других моментов (аэродинамического и гравитационного), момент от силы натяжения троса непосредственно определяет вращение груза относительно своего центра масс. Причем, при увеличении силы натяжения наблюдается стабилизация вращательного движения капсулы относительно направления троса (участки 1000-3000 с. и 6250-8300 с.), а при ее уменьшении амплитуда колебаний угла нутации увеличивается (проявляется динамическая неустойчивость движения, участки 300-1000 с. и 6000-6250 с.). В том же случае, когда натяжение троса приблизительно постоянно, амплитуда колебаний по углу нутации практически не изменяется (участок 3000-6000 с.).

При пространственном движении груза важным также представляется поведение угла прецес-

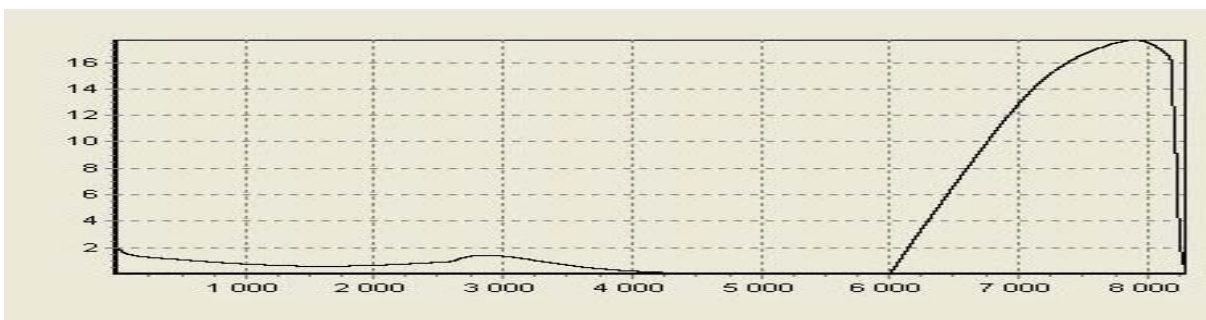
$L_{prog}, м$



t, с

Рис. 1. Закон изменения длины троса

$V_{prog}, м/с$



t, с

Рис. 2. Закон изменения скорости троса

$F_{elast}, Н$

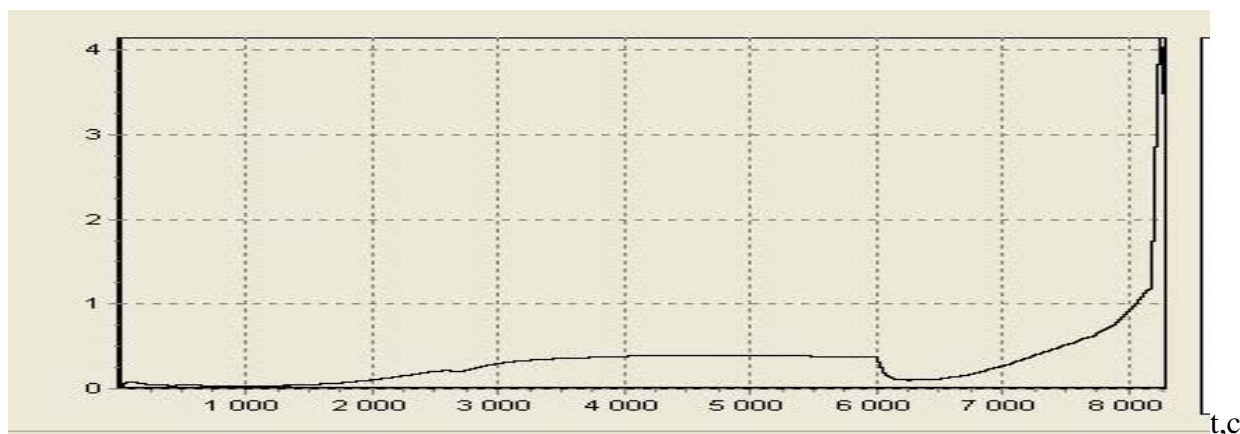


Рис.3. Зависимость силы упругости троса от времени ($K_L = 0.005$, $K_V = 0.5$)

ϑ , град

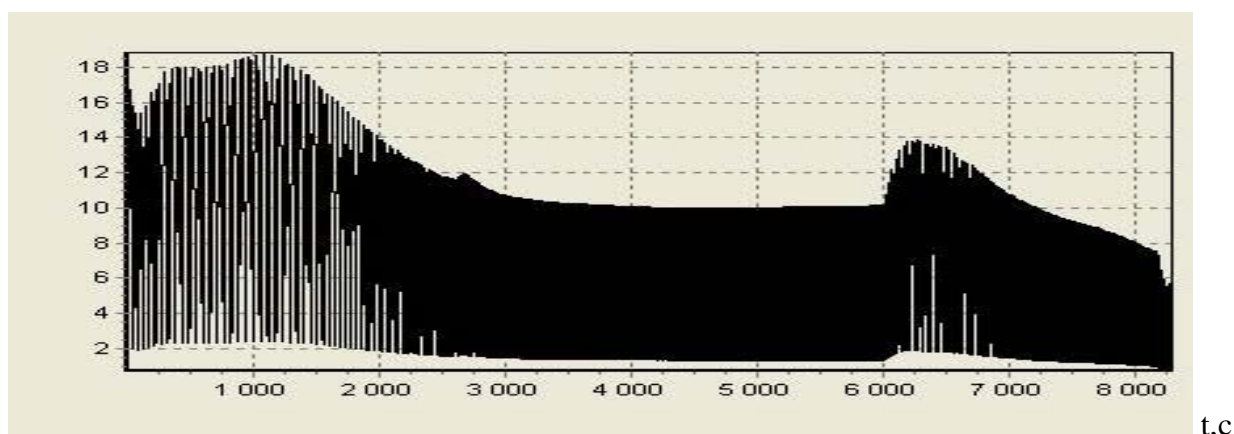


Рис.4. Изменение угла нутации от времени

сии (оси динамической симметрии груза) относительно направления троса. Оказалось, что ось динамической симметрии груза (при законе изменения силы натяжения троса, соответствующем рис.3) совершает прецессию в одном направлении против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z связанной системы координат вокруг направления троса. Причем на участках максимального значения силы упругости угловая скорость прецессии достигает наибольших значений, а на участках минимальных значений силы упругости – наименьших значений. На участках же с приблизительно постоянной силой упругости (3000 – 6000 с.) угловая скорость прецессии тоже практически не изменяется.

4. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ КАПСУЛЫ

В предыдущем пункте коэффициенты обратной связи (K_L , K_V) в механизме управления

были подобраны из условия чтобы трос был всегда натянут $F_{elast} > 0$. Для обеспечения этого условия можно, например, воспользоваться методикой выбора коэффициентов, изложенной в статье [5]. Методика заключается в использовании минимаксного критерия оптимальности при решении задачи регулирования программного развертывания ТС. Весовой коэффициент в критерии оптимальности перед минимальным значением силы упругости подбирается так, чтобы после решения задачи оптимизации выполнялось условие $F_{elast} > 0$. Минимизация критерия оптимальности осуществляется с помощью методов нелинейного программирования. В случае если коэффициенты обратной связи сильно отличаются от оптимальных, движение груза вокруг своего центра масс может быть неустойчивым. Неудачным можно считать такой выбор коэффициентов обратной связи, когда сила упругости становится равной нулю, в результате чего капсула начинает совершать почти свободное неуправляемое движение (действуют толь-

ϑ , град

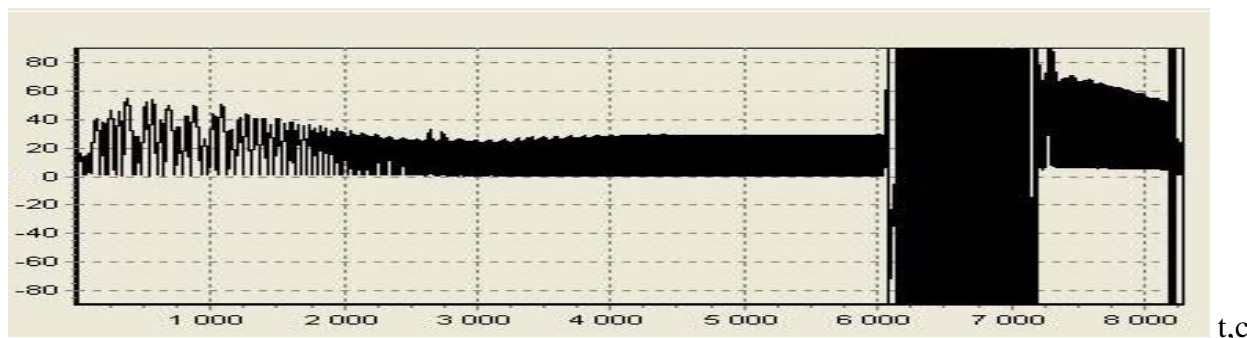


Рис. 5. Зависимость угла нутации от времени

F_{elast} , Н

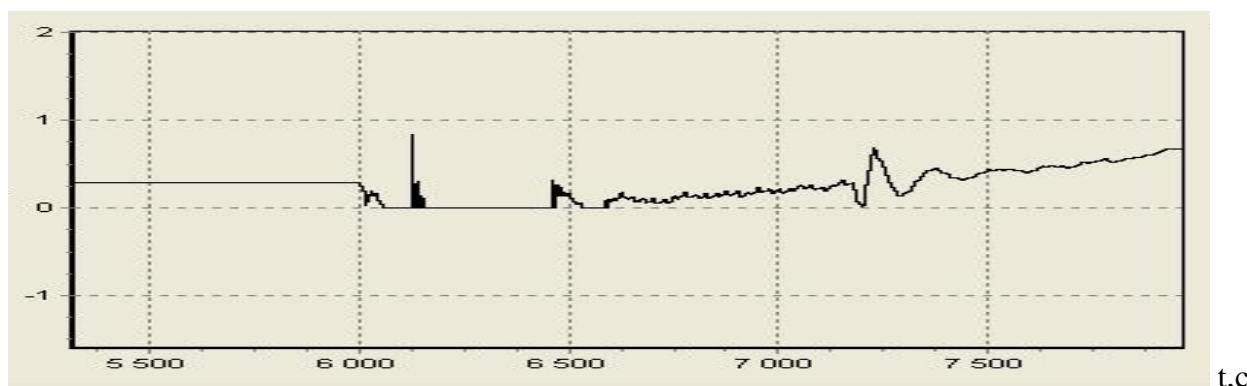


Рис. 6. Зависимость силы упругости от времени

ко аэродинамические и гравитационные моменты). В качестве примера на рис. 5 приводится зависимость угла нутации от времени в случае, когда при переходе от первого ко второму этапу разворачивания ТС движение груза становится неустойчивым ($K_L = 0.05$ $K_V = 1.5$). Соответствующая зависимость силы упругости от времени на участке, где движение груза стало неустойчивым, приводится на рис.6. В реальной ситуации при таком развитии событий, скорее всего, трос или запутается на концевом теле или концевое тело приобретет большую угловую скорость при отделении от ТС и эксперимент может завершиться неудачей.

Графики, приведенные на рис. 5 и 6, получены при значениях коэффициентов обратной связи больших, чем оптимальные. С другой стороны, сильное уменьшение коэффициентов обратной связи приводит к росту значений силы упругости и к улучшению эффекта стабилизации вращательного движения груза, однако малые значения коэффициентов обратной связи ведут к возрастанию ошибок в управлении ($L - L_{prog}$), ($V_T - V_{prog}$) и также недопустимы.

5. ВЛИЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ АСИММЕТРИИ ГРУЗА, ПОГРЕШНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ КРЕПЛЕНИЯ ТРОСА И ДРУГИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ КОНЦЕВОГО ГРУЗА

В случае, если груз имеет динамическую асимметрию вида $\Delta \bar{I} = \frac{I_Y - I_X}{I} \neq 0$

($I_X \neq I_Y > I_Z$), где $I = \frac{I_Y + I_X}{2}$, то на колебания

угла нутации груза от времени (рис. 4) накладываются колебания амплитуды, которые обычно называют биениями (рис.7, $\Delta \bar{I} = 0.05$). В случае увеличения динамической асимметрии частота и амплитуда биений увеличивается. Угловая скорость прецессии при этом увеличивается, так как в случае динамической асимметрии появляется дополнительный гироскопический момент относительно оси z связанной системы координат.

ϑ , град

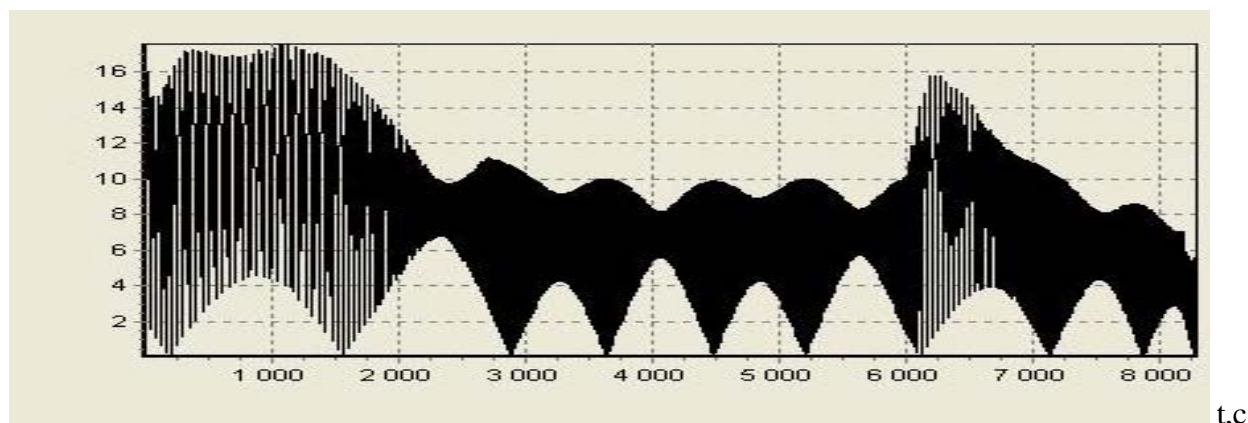


Рис. 7. Изменение угла нутации для динамически несимметричного груза

ϑ , град

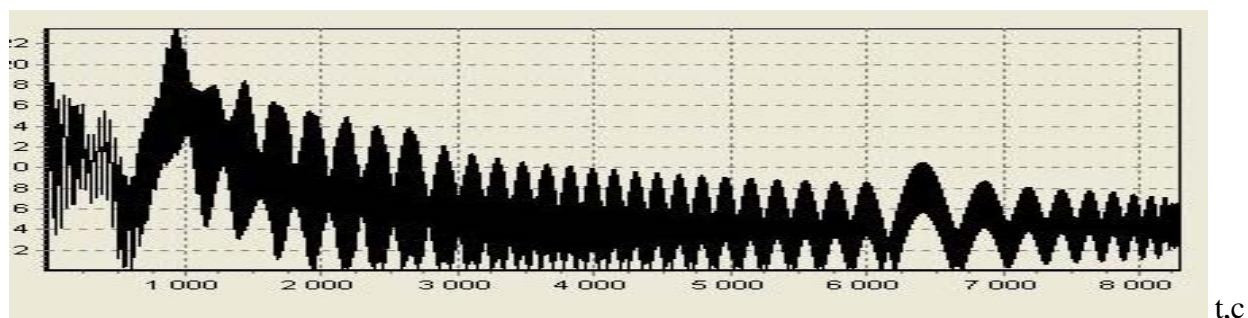


Рис. 8. Изменение угла нутации при действии аэродинамического момента

Как следует из выражений (3), действие гравитационного момента проявляется также, если сферический груз динамически несимметричен. Однако, как показывают численные расчеты, его действие практически не сказывается на зависимостях углов нутации и прецессии от времени. А вот аэродинамический момент проявляет свое действие только в начале развертывания, когда сила упругости является небольшой (порядка 0.1 Н), и немного на несколько градусов увеличивает амплитуду угла нутации (рис. 8).

В случае если точка крепления троса не находится на оси динамической симметрии груза Oz , то возникает дополнительный момент относительно данной оси, который влияет на угловую скорость прецессии. Так, например, при относительном смещении точки крепления груза равном 0.1 ВО, где ВО – расстояние от центра масс капсулы до точки крепления, угол прецессии совершает колебания с очень большой амплитудой, и вращательное движение груза становится нерегулярным (рис. 9). Несимметричность точки крепления троса также приводит к вращению концевой тела относительно оси Oz , что в свою очередь (если не использовать спе-

циальных устройств крепления троса) может приводить к кручению троса. Типичная зависимость угловой скорости относительно оси z от времени приводится на рис. 10. Однако при относительном смещении точки крепления троса равном 0.1L угловая скорость вращения концевой тела является сравнительно небольшой (среднее ее значение является величиной порядка 0.002 рад/с).

В случае, если точка крепления троса не находится на оси динамической симметрии груза Oz , то возникает дополнительный момент, который влияет на угловую скорость прецессии. Так, например, при относительном смещении точки крепления груза равном 0.1L, где L – расстояние от центра масс капсулы до точки крепления, угол прецессии совершает колебания с очень большой амплитудой, и вращательное движение груза становится нерегулярным (рис. 9). Несимметричность точки крепления троса также приводит к вращению концевой тела относительно оси Oz , что, в свою очередь (если не использовать специальных устройств крепления троса), может приводить к кручению троса. Типичная зависимость угловой скорости относительно оси z от времени

$\gamma, \text{ рад}$

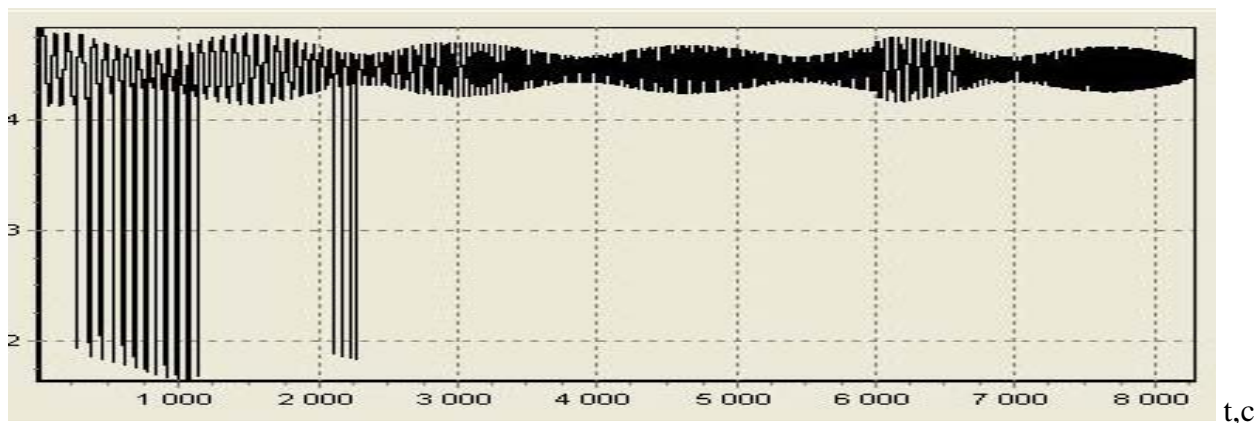


Рис. 9. Зависимость угла прецессии от времени при несимметричном креплении троса

$\omega_z, \text{ рад/с}$

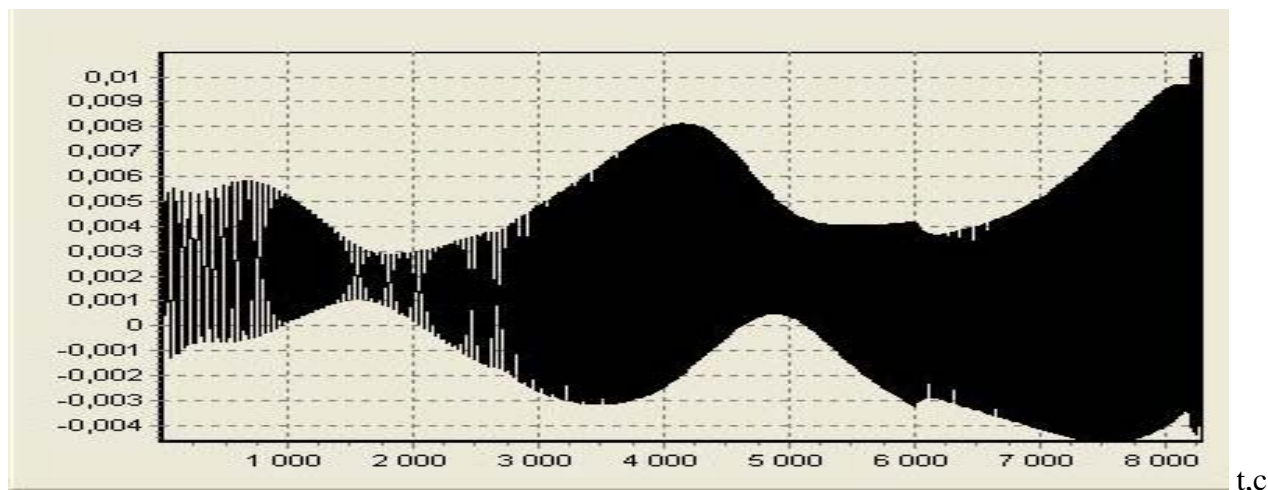


Рис. 10. Зависимость угловой скорости вращения концевое тела относительно оси z от времени

приводится на рис. 10. Однако при относительном смещении точки крепления троса равном 0.1L угловая скорость вращения концевое тела является сравнительно небольшой (среднее ее значение является величиной порядка 0.002 рад/с).

В действительности в процессе разматывания ТС, на груз все описанные выше возмущения могут действовать совместно. Это приводит к значительным трудностям при выборе оптимальных значений коэффициентов обратной связи, если принять их одинаковыми во все время разматывания. Существенно лучшие результаты получаются, если на первом и на втором этапе разматывания использовать разные коэффициенты. Дело в том, что первый этап разматывания (до 6000 с.) это этап разматывания с малыми скоростями (рис. 2) и малыми значениями силы натяжения. Поэтому на этом этапе для обеспечения устойчивости вращательного движения груза необходимо выбирать небольшие значения коэффициен-

тов ($K_L = 0.0002, K_V = 0.4$). На втором же этапе разматывания (после 6000 с.) скорость разматывания существенно выше (рис. 2) и для уменьшения ошибок управления в конце разматывания можно увеличить значения коэффициентов ($K_L = 0.002, K_V = 0.9$) при сохранении устойчивости вращательного движения груза. Естественное развитие данного подхода является разбиение всего интервала времени разматывания на большое количество интервалов и определение оптимальных коэффициентов обратной связи на каждом небольшом интервале. В этом случае фактически коэффициенты обратной связи становятся функциями времени. Таким образом, при выборе коэффициентов обратной связи с учетом обеспечения устойчивой ориентации груза относительно направления троса необходим компромисс между значениями амплитуды угла нутации и возникающими ошибками в управлении $|L - L_{prog}|$ и $|V_T - V_{prog}|$.

ВЫВОДЫ

1. Закон изменения силы натяжения троса непосредственно влияет на пространственное вращательное движение концевых тел. Причем увеличение силы натяжения троса приводит к стабилизации оси симметрии груза относительно направления троса и наоборот.

2. Учет вращательных движений концевых тел является обязательным при выборе значений коэффициентов обратной связи в системе управления развертыванием троса, так как в противном случае возможно неконтролируемое вращение груза относительно своего центра масс.

3. Такие возмущения, как динамическая асимметрия груза, погрешность расположения точки крепления груза, аэродинамические моменты необходимо учитывать для уточнения значений коэффициентов обратной связи с целью обеспечения устойчивой ориентации груза относительно направления троса.

4. Уменьшение значений коэффициентов обратной связи приводит с одной стороны к стабилизации вращательного движения груза, а с другой стороны к большим ошибкам в управлении

при развертывании. Поэтому при выборе коэффициентов обратной связи необходим своеобразный компромисс между возникающими ошибками в управлении (по длине и скорости развертывания троса) и значениями амплитуд колебаний груза относительно направления троса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алтатов А.П., Белецкий В.В. Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика", Институт компьютерных исследований, 2007.
2. Тертыйный-Даури В.Ю. Гиперреактивная механика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
3. Проект YES2 [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.yes2.info/>, свободный.
4. Фефелов Д.И. Моделирование развертывания тросовой системы и движения легкой капсулы с тросом на внеатмосферном участке спуска с орбиты // Сб. трудов 12 Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара: СГАУ, 2005. – С.131–136.
5. Заболотнова О.Ю. Выбор критерия при решении задачи регулирования программного развертывания космической тросовой системы. // Исследовано в России, электронный журнал. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2007/070.pdf>.

THE ANALYSIS OF A SPATIAL ROTARY MOTION OF TRAILER BODIES WITH DEPLOYMENT OF ORBITAL TETHER SYSTEM

© 2009 Yu.M. Zabolotnov, O.N.Naumov

Samara State Aerospace University

The spatial mathematical model of a motion of a trailer body is constructed in view of its rotation concerning centre of mass with deployment of tether system from a spacecraft making flight on an orbit around of the Earth. With the analysis of a rotary movement the gravitational and aerodynamic moments, moment from force of elasticity of a tether are taken into account. The influence of change of force of elasticity of a tether, dynamic asymmetry and asymmetry of a point of fastening of a tether on a rotary motion of a trailer body is investigated.

Key words: spatial mathematical model, trailer body, tether system, spacecraft, force of elasticity of a tether, dynamic asymmetry

Yuri Zabolotnov, Doctor of Technics, Professor, Head of the Mathematics and Mechanics Department,
E-mail: yumz@yandex.ru.
Oleg Naumov, Student of Togliatti Branch.
E-mail: olegnaumov6386@yandex.ru