УДК 539.3+519.6

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ СТРУКТУРИРОВАННОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ ОСРЕДНЕНИЯ

© 2009 Н.С. Астапов, В.М. Корнев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию 15.04.2009

Напряженно деформированное состояние высотной многоэтажной башни смоделировано состоянием структурированного стержня, в котором напряжения вычислены методом осреднения. Показано, что сжимающие напряжения в структурированном стержне существенно превышают максимальные напряжения в поперечном сечении в эквивалентном однородном стержне. При этом число таких поперечных сечений стержня со структурой пропорционально числу этажей в башне. Формулируется периодическая задача на ячейке, используя представление решения в виде суммы гладкой и быстроосциллирующей частей.

Ключевые слова: прочность стержня со структурой, асимптотическое разложение.

ВВЕДЕНИЕ

Многие материалы (композиты, пенопласты, перфорированные пластины, железобетонные плиты, материалы с системой трещин и др.) и конструкции (фермы мостов, каркасы высотных зданий, наделенных междуэтажными перекрытиями) имеют структуру, близкую к периодической. Процессы в средах с периодической структурой описываются уравнениями с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами, зависящими от малого параметра ε, характеризующего относительный размер периодической ячейки. Эффективным методом исследования макроскопических и микроскопических свойств периодических структур является асимптотический метод осреднения [1], в котором решение уравнения разыскивается в виде ряда по степеням малого параметра ε. Целью такого построения является получение уравнений, коэффициенты которых не являются быстроосциллирующими, а их решения близки в среднем к решениям исходных уравнений. Эти новые уравнения называют осредненными уравнениями, а их коэффициенты — эффективными коэффициентами материала или конструкции [1]. Отметим, что для применения метода осреднения необходимо наличие соответствующей гладкости коэффициентов уравнений.

В монографии [1] на стр. 40-49 проведено построение и подробное исследование асимптотического разложения решения задачи

$$\left(K\left(x/\varepsilon\right)u'\right)' = f(x), \qquad x \in (0,l), \tag{1}$$

$$u(0) = g_1, \ u(l) = g_2, \tag{2}$$

где $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, не зависящая от ε, $K(x/\varepsilon) = K(\xi)$, $\xi \in R$ — бесконечно дифференцируемая 1–периодическая по ξ функция. Уравнение (1) может описывать, например, состояние равновесия линейно упругого одномерного композита длиной l всюду вне поверхностей зерен [1].

В данной работе рассматривается применение метода осреднения в задаче оценки прочности высотной башни с междуэтажными перекрытиями. За основное определяющее уравнение выбрано уравнение $\left(S\left(x/\varepsilon\right)E\left(x\right)u'\left(x\right)\right)' = f(x)$, где $u(x)$ — величина смещения поперечного сечения башни, $S(x/\varepsilon)$ — площадь поперечного сечения с абсциссой x, $f(x)$ — плотность равнодействующей внешних сил, действующих на сечение с абсциссой x вдоль оси башни [2]. Модуль Юнга $E(x)$ считается постоянным, не зависящим от x. Аналогичные задачи возникают при растяжении–сжатии композитных стержней, когда структура стержня периодически меняется, причем параметр $\varepsilon = 2r_0/l$, где $2r_0$ — диаметр структурной ячейки, характеризует быструю осцилляцию [3]. Обратим внимание на то, что ниже исследуется задача прочности. А потому необходимо построение асимптотических разложений решений в высших приближениях.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем распределение напряжений при сжатии вертикального стержня под действием собственного веса с быстроменяющейся по периодическому закону площадью поперечного сечения стержня. Такой стержень может моделировать, например, высотное здание с учетом между-

Астапов Николай Степанович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник. E-mail: nika@hydro.nsc.ru.
Корнев Владимир Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник. E-mail: kornev@hydro.nsc.ru.

этажных перекрытий. В качестве математической модели данной задачи рассмотрим уравнение

$$\left(K\left(x/\varepsilon\right)U'\right)' = f(x)+g\left(x/\varepsilon\right), 0 \le x \le l, \quad (3)$$

при краевых условиях

$$U(0)=U'(l)=0, \quad (4)$$

где l — высота стержня, $\varepsilon = l/n$ — малый параметр (при достаточно больших натуральных n, n — количество этажей), характеризующий частоту изменения жесткости $K(x/\varepsilon)=S\left(x/\varepsilon\right)E\left(x\right)$ поперечного сечения стержня. Так как процедура осреднения [1] накладывает некоторые ограничения на выбор функции $K(x/\varepsilon)=K(\xi)$, $x/\varepsilon=\xi \in R$, то пусть $K(\xi)$ является бесконечно дифференцируемой 1–периодической функцией, удовлетворяющей условию $0<\kappa_1 \le K(\xi) \le \kappa_2$, где κ_1 и κ_2 — произвольные положительные числа. Правая часть уравнения (3) отличается от правой части уравнения (1), так как $f\left(x\right)$ описывает гладкую часть нагрузки, а $g(x/\varepsilon)$ — нагрузка, связанная со структурой ячейки (этажа). Пусть функция $g(x/\varepsilon)=g(\xi)$ также является дифференцируемой 1–периодической функцией, для которой $\langle g(\xi)\rangle \equiv 0$, где угловые скобки здесь и далее означают среднее значение функции по периоду $\langle g(\xi)\rangle \equiv \int\limits_0^1 g(\xi)d\xi$.

Кроме отличия правых частей уравнений (1) и (3) имеется и второе отличие: краевое условие (4) при $x=l$ записано для напряжений и этим отличается от условия (2). Эти отличия обуславливают внесение изменений в метод осреднения [1]. Кроме того, в отличие от задачи (1)–(2) в задаче (3)–(4) большее значение имеет оценка напряжений, то есть производной $U'(x)$ решения, а не само решение $U(x)$, представляющее перемещение поперечного сечения стержня.

Построим методом осреднения формальное асимптотическое разложение решения задачи (3)–(4) в высших приближениях. Предположительно целесообразно строить асимптотическое разложение до членов, содержащих ε^2 включительно, чтобы с достаточной точностью можно было получить оценки напряжений, как для гладкой, так и для быстроосциллирующей составляющей решения. На конкретном примере проведем сравнение численных результатов, полученных с помощью построенного асимптотического решения с точностью до членов, содержащих ε и ε^2 включительно, и аналитического точного решения.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Учитывая линейность уравнения (3), его решение $U(x,\varepsilon)$ будем разыскивать в виде

$$U(x,\varepsilon)=u(x,\varepsilon)+w(x/\varepsilon). \quad (5)$$

Так как

$$\left(KU'\right)' = \left(K\left(u+w\right)'\right)' = \left(Ku'+Kw'\right)' =$$

$$=\left(Ku'\right)' + \left(Kw'\right)' = f(x)+g(x/\varepsilon),$$

то функцию $u(x,\varepsilon)$ — асимптотическое разложение уравнения

$$\left(Ku'\right)' = f(x) \quad (6)$$

— построим с помощью аналогичного [1] алгоритма, причем функция $u\left(x\right) \equiv u\left(x,\varepsilon\right)$ не будет зависеть от ε сингулярно; а функцию $w(x/\varepsilon)$ найдем из уравнения

$$\left(Kw'\right)' = g(x/\varepsilon). \quad (7)$$

Произвольные постоянные в общем решении $U(x,\varepsilon)$ выберем так, чтобы выполнялись краевые условия (4). Частное решение обыкновенного дифференциального уравнения (7) можно записать в виде

$$w(\xi)=\int\limits_0^{\xi} K^{-1}(y)\left(\int\limits_0^{y} g(t)dt + C_\varepsilon\right)dy + C_2, \quad (8)$$

где $C_\varepsilon = -\langle K^{-1}\rangle^{-1}\langle K^{-1}(y)\int_0^y g(t)dt\rangle = \varepsilon^2 C_1$, причем C_1 не зависит от ε, $C_2=0$. Так как функции $K(\xi)$ и $g(\xi)$ являются 1–периодическими, то, благодаря лемме 1 из [1] и указанному выбору постоянных интегрирования C_1 и C_2, построенное решение (8) оказывается 1–периодической функцией, причем

$$w(0)=0, \quad w'(l)=\varepsilon^{-1}w'_\xi(l)=\varepsilon C_1 K^{-1}(0). \quad (9)$$

Перейдем к построению функции $u(x)$. Асимптотическое разложение решения уравнения (6) разыскивается в виде

$$u(x)=v(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i N_i(\xi)\frac{d^i v(x)}{dx^i}, \quad (10)$$

где $\xi = x/\varepsilon$, функции $N_i(\xi)$ — 1 периодические функции ξ; функция $v(x)$ не зависит от ξ и имеет асимптотическое разложение

$$v(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j v_j(x), \quad (11)$$

причем $v_j(x)$ не зависят от ε. Из краевых условий (4), учитывая выражение (5) и условия (9), получим следующие краевые условия для функции $u(x)$

$$u(0)=0, \quad u'(l)=-\varepsilon C_1 K^{-1}(0). \quad (12)$$

Подставим ряд (10) в левую часть уравнения (6) и краевые условия (12) и сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях ε. Будем формально считать, что переменные x и ξ независимы. Выберем функции $v_j(x)$ и $N_i(\xi)$ так, чтобы слагаемые порядка ε^{-2} и ε^{-1} обратились в нуль, а все слагаемые более высоких порядков относительно ε не зависели от ξ. Так как функции N_i определяются из дифференциальных уравнений с точностью до некоторых постоянных слагаемых, то для определенности положим $N_i(0)=0$ при $i \ge 1$.

Построение функций N_i, $i \ge 1$ проводится по следующей рекуррентной процедуре. Для очередного по порядку значения i определим функцию $T_i(\xi)$ по формулам

$$T_1(\xi) = -dK(\xi)/d\xi,$$
$$T_i(\xi) = -K(\xi)\left(dN_{i-1}/d\xi + N_{i-2}\right) - d\left(K(\xi)N_{i-1}\right)/d\xi,$$
$$i > 1. \qquad (13)$$

Заметим, что функции $T_i(\xi)$ выражаются через функции N_j с меньшим индексом $j < i$, причем полагается $N_0 \equiv 1$. Определим константы h_i через средние по периоду значения функций $T_i(\xi)$, а именно положим $h_i = -\langle T_i \rangle$, например, $h_1 = 0$ и $h_2 = \langle K^{-1} \rangle^{-1}$ в силу 1 периодичности функции $K(\xi)$. Затем находим очередную функцию $N_i(\xi)$, удовлетворяющую условию $N_i(0)=0$ при $i \ge 1$, как 1 периодическое решение уравнения

$$\left(K\left(N_i\right)'_{\xi}\right)'_{\xi} = T_i(\xi) + \langle h_i \rangle. \qquad (14)$$

Благодаря лемме 1 из [1], такое решение $N_i(\xi)$ существует и единственно.

Для построения функции $v(x)$ разложения (10) найдем функции $v_j(x)$ разложения (11), шаг за шагом решая краевые задачи следующей цепочки задач

$$h_2 \frac{d^2 v_0}{dx^2} = f(x),$$

$$h_2 \frac{d^2 v_q}{dx^2} = -\sum_{j=0}^{q-1} h_{q-j+2} \frac{d^{q-j+2} v_j}{dx^{q-j+2}} \text{ при } q > 0, \qquad (15)$$

$v_q(0)=0$ при $q \ge 0$, а краевые условия для $v'_q(l)$ определяются следующим образом. Так как $N_i\left(l/\varepsilon\right)=0$, то в выражении производной асимптотического разложения (10)

$$u'(x) = v'(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\varepsilon^{i-1} N'_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{dv^i(x)}{dx^i} + \varepsilon^i N_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{dv^{i+1}(x)}{dx^{i+1}}\right) \qquad (16)$$

второе слагаемое под знаком суммы при $x = l$ обращается в нуль. Подставляя в (16) разложение $v(x)$ в ряд (11) и собирая члены при одинаковых степенях ε, запишем определяющее уравнение для краевых условий $v'_q(l)$ в виде

$$u'(l) = \left(1 + N'_1(n)\right)v'_0(l) +$$
$$+\varepsilon\left[\left(1+N'_1(n)\right)v'_1(l) + N'_2(n)v''_0(l)\right] + \ldots = -\varepsilon C_1 K^{-1}(0), \qquad (17)$$

где $n = l/\varepsilon$. В записи разложения (16) и уравнения (17) подразумевается, что для функций $N_i(x/\varepsilon) = N_i(\xi)$ производные вычисляются по ξ, а для функций $u(x)$, $v_i(x)$ производные вычисляются по x. Приравнивая в справедливом для любого ε равенстве (17) коэффициенты при различных степенях ε к нулю, получим цепочку соотношений, из которой последовательно для каждого $q = 0,1,2,\ldots$ найдем краевые условия для $v'_q(l)$. Выпишем первые три (для $q = 0,1,2$) соотношения этой цепочки

$$\left(1 + N'_1(n)\right)v'_0(l) = 0, \qquad (18)$$
$$\left(1 + N'_1(n)\right)v'_1(l) + N'_2(n)v''_0(l) = -C_1 K^{-1}(0), \qquad (19)$$
$$\left(1 + N'_1(n)\right)v'_2(l) + N'_2(n)v''_1(l) + N'_3(n)v'''_0(l) = 0. \qquad (20)$$

Для $x = l$ имеем

$1 + dN_1/d\xi = K^{-1}(l)\langle K^{-1}\rangle^{-1} \ne 0$, поэтому из равенства (18) найдем краевое условие для $v'_0(l)$ и, решив краевую задачу

$$h_2\left(v_0\right)''_{xx} = f(x),\quad v_0(0) = 0,\quad v'_0(l) = 0, \qquad (21)$$

где $h_2 = -\langle T_2 \rangle = \langle K^{-1}\rangle^{-1}$, определим функцию $v_0(x)$. Задача (21) называется осредненной задачей нулевого порядка. Она описывает напряженное состояние в таком однородном стержне, свойства которого в некотором смысле близки эффективным свойствам исходного стержня с периодической структурой. Хотя истинные перемещения $u(x)$ близки к средним перемещениям $v_0(x)$, однако разность между производными точного решения и решения осредненной задачи может заметно отличаться [1]. Следовательно, для правильного определения напряжений необходимо учитывать в разложении (10) члены, содержащие ε^2 включительно. Решением цепочки краевых задач (15) последовательно находим функции $v_q(x)$ при всех $q \ge 0$ и этим завершается построение асимптотического разложения решения задачи (3)–(4).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

Из уравнения (3) с учетом краевого условия $U'(l) = 0$ и неравенства $K(x/\varepsilon) > 0$ следует равенство

$$U'(x) = K^{-1}\left(x,\varepsilon\right)\int_l^x \left(f(z) + g(z/\varepsilon)\right)dz. \qquad (22)$$

Отсюда, учитывая краевое условие $U(0) = 0$, для задачи (3)–(4) получим точное решение

$$U(x) = \int_0^x\left(K^{-1}\left(y,\varepsilon\right)\int_l^y\left(f(z) + g(z/\varepsilon)\right)dz\right)dy. \qquad (23)$$

Для обоснования полезности сложных построений асимптотического разложения решения отметим, что хотя задача (3)–(4) имеет решение в квадратурах (23), однако непосредственный анализ структуры этого решения (например, влияние величины малого параметра ε на значение наибольшего напряжения) сложнее анализа асимптотического разложения (10). Кроме того, точного решения может не существовать, например, в математической модели задачи, описывающей двоякопериодическую структуру конструкции. Подробное изложение преимуществ асимптотических разложений можно найти в [4]. Возможно так же, как в рассмотренном ниже примере, что уже несколько первых членов асимптотического разложения представляют точное решение.

СРАВНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО И ТОЧНОГО РЕШЕНИЙ НА КОНКРЕТНОМ ПРИМЕРЕ

Построим асимптотическое разложение решения краевой задачи

$$\left(K\left(x/\varepsilon\right)U'\right)' = K\left(x/\varepsilon\right), \quad 0 \le x \le l, \quad (24)$$

$$U(0) = U'(l) = 0, \quad (25)$$

где $K(x/\varepsilon) = K(\xi) = 2 + \sin\left(2\pi x/\varepsilon\right)$. Выбор функции $K(\xi)$ в таком виде можно связать с выбором первых двух членов в разложении произвольной функции в ряд Фурье. Уравнение (24) является частным случаем уравнения (3), причем можно считать $f(x) = 2$, $g(x/\varepsilon) = \sin(2\pi x/\varepsilon)$. В этом случае 1 периодическим решением $w(x/\varepsilon)$ уравнения (7) является функция

$$w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{4\pi^2}\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)\right), \quad (26)$$

для которой $w(0) = 0$, $w'(l) = -\varepsilon/(4\pi)$. Поэтому для решения уравнения

$$\left(K\left(x/\varepsilon\right)u'\right)' = 2, \quad (27)$$

краевые условия с учетом выражения (5) и условия (25) имеют вид

$$u(0) = 0, \qquad u'(l) = \varepsilon/(4\pi). \quad (28)$$

Функции $N_i(\xi)$, $i \ge 1$ разложения (10) найдем из уравнения (14) с учетом соотношений (13). Так, для определения функции N_1 уравнение (14) при $i = 1$ можно записать в виде $d\left(K\left(dN_1/d\xi + 1\right)\right)/d\xi = 0$, следовательно, $dN_1/d\xi = c_1/K\left(\xi\right) - 1$. Отсюда, учитывая равенство $N_i(0) = 0$, получим $N_1 = c_1\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi}{K(\xi)} - \xi$,

где константа c_1 вычисляется из условия 1 периодичности функции N_1 следующим образом. Так как справедливо равенство $\left\langle dN_1/d\xi\right\rangle = N_1(1) - N_1(0) = 0$ и равенство $\left\langle dN_1/d\xi\right\rangle = c_1\left\langle K^{-1}\left(\xi\right)\right\rangle - 1$,

то $c_1 = \left\langle K^{-1}\right\rangle^{-1} = \left(\int\limits_0^1 \frac{d\xi}{2+\sin(2\pi\xi)}\right)^{-1} = \sqrt{3}$.

Окончательно для функции N_1 получим выражение

$$N_1\left(\xi\right) = \sqrt{3}\int\limits_0^{\xi}\frac{d\xi}{2+\sin\left(2\pi\xi\right)} - \xi. \quad (29)$$

Заметим, что так определенная функция $N_1\left(\xi\right)$ является 1 периодической, причем $N_1\left(n\right) = N_1\left(0\right)$. Для определения функции $N_2\left(\xi\right)$ сначала, пользуясь равенствами (13), (14) и учитывая 1 периодичность функций $K\left(\xi\right)$ и $N_i(\xi)$, находим функцию $T_2\left(\xi\right) = -\sqrt{3} - \frac{d}{d\xi}\left(K\left(\xi\right)N_1\right)$ и вычисляем среднее по периоду $\left\langle T_2\right\rangle = -\sqrt{3}$. Затем из уравнения (14) имеем

$$KdN_2/d\xi = \int\left(T_2 - \left\langle T_2\right\rangle\right)d\xi = -KN_1 + c_2,$$

где константа c_2 вычисляется аналогично вычислению константы c_1 из условия 1 периодичности функции N_2 следующим образом. Так как $\left\langle dN_2/d\xi\right\rangle = c_2\left\langle K^{-1}\right\rangle - \left\langle N_1\right\rangle = N_2\left(1\right) - N_2\left(0\right) = 0$, то $c_2 = \left\langle N_1\right\rangle/\left\langle K^{-1}\right\rangle = c_1\left\langle N_1\right\rangle = \sqrt{3}\left\langle N_1\right\rangle$. Наконец, учитывая равенство (29) и условие $N_2\left(0\right) = 0$, получим для 1 периодической функции N_2 выражение

$$N_2\left(\xi\right) = \int\limits_0^{\xi}\frac{dN_2}{d\xi}d\xi = \int\limits_0^{\xi}\left(\sqrt{3}\left\langle N_1\right\rangle/K - N_1\right)d\xi. \quad (30)$$

Функции $N_i\left(\xi\right)$ при $i > 2$ находятся аналогично из рекуррентных соотношений (13)–(14), но их вычисление для решения задачи (24)–(25) не требуется, потому что в этом случае, как будет показано ниже, ряд (10) не содержит членов с ε^i при $i \ge 3$.

Для определения функции $v\left(x\right)$ разложения (10) находим функции $v_j\left(x\right)$ разложения (11), решая последовательно краевые задачи цепочки задач (15). Краевая задача (21) при $h_2 = \langle K^{-1}\rangle^{-1} = \sqrt{3}$ и $f\left(x\right) = 2$ имеет решение $v_0\left(x\right) = x\left(x-2l\right)/\sqrt{3}$. Пользуясь представлениями (29), (30) вычислим значения выражений $1 + N_1'\left(l/\varepsilon\right) = \sqrt{3}/2$, $N_2'\left(l/\varepsilon\right) = \sqrt{3}\langle N_1\rangle/2$ и с учетом условий (28), (17) и (19) для определения функции $v_1\left(x\right)$ запишем краевую задачу

$$\sqrt{3}\left(v_1\right)''_{xx} = 0, \; v_1(0) = 0,$$

$$v_1'(l) = 2\left(1/4\pi - \left\langle N_1\right\rangle\right)/\sqrt{3},$$

решением которой является многочлен первой степени $v_1(x) = 2\left(1/4\pi - \langle N_1 \rangle\right) x/\sqrt{3}$. Следовательно, благодаря соотношению (20), для нахождения функций v_q краевая задача (15) при $q \geq 2$ принимает простой вид $\sqrt{3} v_q''(x) = 0$, $v_q(0) = v_q'(l) = 0$, решением которой является $v_q(x) \equiv 0$ для любого $q \geq 2$. Окончательно для функции $v(x)$ находим разложение (11) в виде многочлена второй степени относительно x

$$v(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) =$$

$$= \frac{x(x-2l)}{\sqrt{3}} + \varepsilon \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4\pi} - \langle N_1 \rangle\right)x. \quad (31)$$

Используя выражение (31) в разложении (10) для производной решения $u(x)$ краевой задачи (27)–(28) получим представление

$$u'(x) = 2\left(x - l + \varepsilon/(4\pi)\right)/K(x/\varepsilon). \quad (32)$$

Если в разложении (10) пренебречь членами, содержащими ε во второй и более степени, то получим приближенное выражение производной

$$u'(x) \approx \left(v(x) + \varepsilon N_1(x/\varepsilon) v'(x)\right)' =$$

$$= \frac{2}{K}\left(x - l + \frac{\varepsilon}{4\pi}\right) + 2\varepsilon\left(\frac{N_1}{\sqrt{3}} - \frac{\langle N_1 \rangle}{K}\right). \quad (33)$$

Интересно отметить, что приближенное с точностью до ε включительно выражение (33) оказалось сложнее точного представления (32). Согласно (26) функция $w(x/\varepsilon) \approx O(\varepsilon^2)$, поэтому приближенное с точностью до ε разложение производной $U'(x)$ решения задачи (24)–(25) дается по-прежнему выражением (33), а асимптотическое разложение производной решения с учетом всех членов записывается формулой

$$U'(x) = u'(x) + w'(x) =$$

$$= \frac{2}{K}\left(x - l + \frac{\varepsilon}{4\pi}\right) - \frac{\varepsilon}{2\pi}\frac{\cos(2\pi x/\varepsilon)}{K}, \quad (34)$$

где для функций $u'(x)$ и $w'(x)$ использованы представления (32) и (26) соответственно.

Теперь найдем точное решение задачи (24)–(25). Пользуясь равенством (22), получим для производной точного решения выражение

$$U'(x) = K^{-1}\int_l^x \left(2 + \sin(2\pi x/\varepsilon)\right) dx =$$

$$= \frac{2}{K}\left(x - l + \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\varepsilon}\right)\right)\right), \quad (35)$$

которое полностью совпадает с асимптотическим разложением (34).

Полученные выражения (33), (35) для напряжений в стержне со структурой (n –этажной башне) сравним с выражением напряжения $\sigma(x)$ в однородном стержне с постоянной площадью S_0 поперечного сечения [5, 6]

$$\sigma(x) = x - l. \quad (36)$$

Заметим, что формулу (36) для $\sigma(x) = U'(x)$ можно получить, вычислив производную точного аналитического решения задачи (24)–(25) при $K(x/\varepsilon) = S_0 = const$. Эту же формулу (36) можно получить для производной $\sigma(x) = v_0'(x)$ решения $v_0(x)$ осредненной задачи нулевого порядка (21), то есть для напряжений в эквивалентном однородном стержне, при $h_2 = \langle K^{-1} \rangle^{-1} = 2$, $f(x) = K$, где $K = K(x/\varepsilon) = 2$, причем в этом случае производная $U'(x)$ асимптотического разложения решения $U(x)$ задачи (24)–(25) совпадает с $v_0'(x)$, то есть $U'(x) = v_0'(x) = \sigma(x) = x - l$.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Приведем численное сравнение полученных результатов для стержня высотой $l = 1$. На рис. 1–3 для различных ε ($\varepsilon = 1/2$, 1/5 и 1/50) построены кривые 1–3 зависимости напряжения от высоты x поперечного сечения стержня, вычисленные по формулам (33), (35) и (36) соответственно. С уменьшением ε значения напряжений, вычисленные по формулам (33) и (35), почти совпадают, поэтому кривые 1 и 2 на рисунке 3 неразличимы.

На рис. 4 приведены графики трех первых волн зависимости напряжения $U'(x)$ от высоты x поперечного сечения стержня для $\varepsilon = 1/20$, вычисленные по формуле (34): при $0 \leq x \leq \varepsilon$ – волна 1 (нижняя), при $\varepsilon \leq x = x_1 \leq 2\varepsilon$ – волна 2 (средняя) и при $2\varepsilon \leq x = x_2 \leq 3\varepsilon$ – волна 3 (верхняя). Существенно, что напряжение (34) в структурированном стержне представлено алгебраической суммой гладкой и быстроосциллирующей частей, причем последняя, как видно из рис. 4, является почтипериодической функцией. Именно это обстоятельство позволяет сформулировать периодические граничные условия задачи (3) для структурной ячейки [7], опираясь только на гладкую часть решения [4] в точке $x = 0$. Периодические граничные условия ставятся как на саму функцию $U(x)$, так и на функцию напряжения

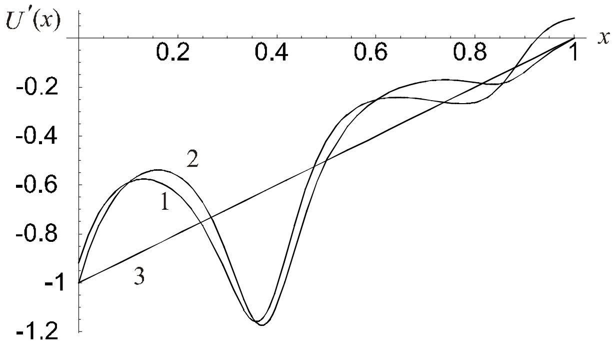

Рис. 1. Зависимость напряжения от высоты x для $\varepsilon = 1/2$

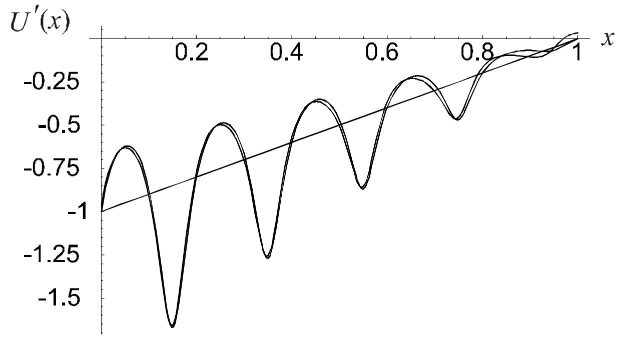

Рис. 2. Зависимость напряжения от высоты x для $\varepsilon = 1/5$

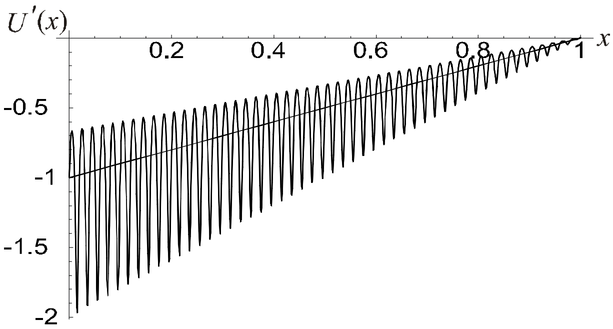

Рис. 3. Зависимость напряжения от высоты x для $\varepsilon = 1/50$

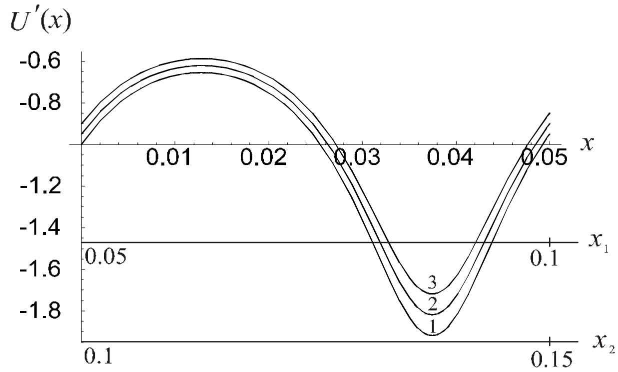

Рис. 4. Три первых волны зависимости напряжения $U'(x)$ для $\varepsilon = 1/20$

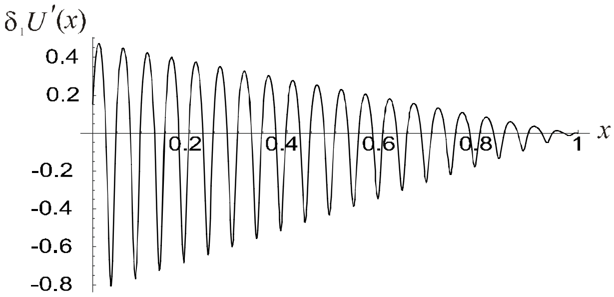

Рис. 5. Вклад в зависимость $U'(x)$ членов, содержащих только ε ($\varepsilon = \frac{1}{20}$).

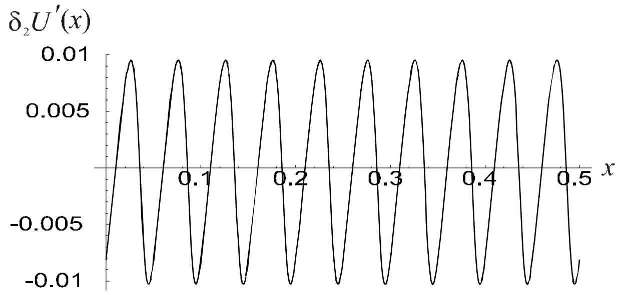

Рис. 6. Вклад в зависимость $U'(x)$ членов, содержащих только ε^2 ($\varepsilon = \frac{1}{20}$).

Таблица. Концентрация напряжений в структурированном стержне.

ε	x	$U'(x)$	$\sigma(x)$	$U'(x)/\sigma(x)$
1/2	0,375	–1,170	–0,625	1,87
1/5	0,15	–1,668	–0,85	1,96
1/10	0,075	–1,834	–0,925	1,983
1/20	0,0375	–1,917	–0,9625	1,992
1/50	0,015	–1,967	–0,985	1,997
1/100	0,0075	–1,983	–0,9925	1,998

$U'(x)$. Задача (3) с периодическими граничными условиями позволяет получить наихудшую оценку на коэффициент концентрации напряжения за счет структуры.

На рис. 5 с учетом выражений (5), (10) и (26) дан график вклада в зависимость напряжения $U'(x)$ членов, содержащих только ε в первой степени, то есть построен график функции

$\delta_1 U'(x) = \varepsilon\left[N_1(\xi)v'(x)\right]'$. На рис. 6 показан график функции

$$\delta_2 U'(x) = \varepsilon^2\left[N_2(\xi)v''(x) - \ln\left(1+\sin\left(2\pi x/\varepsilon\right)/2\right)/2\pi\right]',$$

содержащей только члены с ε^2, которая является 1–периодической функцией благодаря 1–периодичности функции $N_2(\xi)$ и равенству $v''(x) = 2/\sqrt{3}$.

В таблице для различных ε приведены значения напряжения $U'(x)$ в структурированном стержне высотой $l = 1$ и значения напряжения $\sigma(x)$ в однородном стержне, вычисленные при $x = 3\varepsilon l/4$. В последнем столбце таблицы дан коэффициент концентрации напряжения за счет структуры — значение отношения $U'(x)/\sigma(x)$. Из выражений (35) и (36) находим, что для любых ε справедливо неравенство $U'(x)/\sigma(x) \le 2/K(x/\varepsilon) = 2/(2+\sin(2\pi x/\varepsilon)) \le 2$. При этом равенство достигается в $n = l/\varepsilon$ точках $x = x_k = \varepsilon k - \varepsilon/4$, где $k = 1, 2, ..., n$. Следовательно при $\varepsilon \to 0$ в этих $n \to \infty$ различных внутренних точках стержня коэффициент концентрации напряжения за счет структуры стремится к двум, что согласуется с данными последнего столбца таблицы.

ВЫВОДЫ

Расчеты показывают, что напряжения в структурированном стержне могут почти вдвое превышать напряжения в эквивалентном однородном стержне, распределение максимальных напряжений в осредненной задаче позволяет поставить периодическую задачу для наиболее нагруженной ячейки композита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М., Наука, 1984, 352 с.
2. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М., Наука, 1974. 432 с.
3. *Образцов И.Ф., Власов А.Н., Яновский Ю.Г.* Расчетный метод оценки прочностных свойств структурно неоднородных сред. ДАН. 2006. Т.406,. №2, С.196–199.
4. *Андрианов И.В., Маневич Л.И.* Асимптотические методы и физические теории. М., Знание, 1989, (Новое в жизни, науке и технике. Сер. “Физика”; № 2), 352 с.
5. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. М., Гос. издат. физ.-мат. лит., 1960, 380 с.
6. *Черепанов Г.П.* Равнопрочная башня. Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. 2005. №5(39). С. 42–51.
7. Яновский Ю.Г. Наномеханика и прочность композиционных материалов. М., Издание ИПРИМ, 2008, 180 с.

STRENGTH ESTIMATION OF STRUCTURED ROD BY AVERAGING

© 2009 N.S. Astapov, V.M. Kornev

Institute of Hudrodynamics named after M.A. Lavrentyev of Sibir Branch of RAS, Novosibirsk

The stress-deformed state of a high-rise building is modeled by the state of a structured rod for which stresses are calculated by averaging. It has been shown that compressive stresses in a structured rod essentially exceed maximum stresses in cross-sections of the equivalent homogenous rod. In this case, the number of such cross-sections of the structured rod is proportional to the number of stores in the high-rise building. A periodic problem for a cell is formulated using the representation of solution in the form of the sum of smooth and high-oscillating parts.

Key words: structured rod strength, asymptotic expansion.

Nikolay Astapov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Fellow.
E-mail: nika@hydro.nsc.ru.
Vladimir Kornev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Chief Research Fellow.
E-mail: kornev@hydro.nsc.ru.