УДК 65.011.08

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л.В. Бойкова, Т.А. Бойкова

Институт авиационных технологий и управления
Ульяновского государственного технического университета

Поступила в редакцию 20.07.2009

В работе ставится задача исследования динамики теоретически существующих систем широкого класса. Любая система характеризуется передаточной функцией, которая определяется структурной и параметрами системы. В общем случае рассматриваемые системы могут быть многомерными, то есть иметь n входов и m выходов. Поставим задачу определения входного управляющего воздействия, состоящую в том, чтобы указать такие функции $\boldsymbol{Q}_y$, при которых любое движение системы, начинающееся в окрестности ее рабочего пространства, за ограниченное время попадает в зону этого пространства, и остается там в дальнейшем. В классической формулировке – это задача о стабилизации программного движения системы.

Ключевые слова: динамика, передаточная функция, управляющее воздействие, стабилизация программного движения системы.

Рассмотрим нестационарную голономную систему с идеальными связями, положение которой определяется n обобщенными координатами $\boldsymbol{q}^T$. Математическую модель такой системы можно представить уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} = \boldsymbol{Q}, \tag{1}$$

где кинетическая энергия

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{2}$$

$$T_2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T(t,\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}},$$

$$T_1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = B^T(t,\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}},\ T_0(t,\boldsymbol{q}) = C(t,\boldsymbol{q}), \tag{3}$$

где $A(t,\boldsymbol{q})$ – матрица размерности nIn, $B(t,\boldsymbol{q})$ – матрица-столбец размерности nI1, $C(t,\boldsymbol{q})$ – скалярная функция, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ – матрица-столбец размерности nЧ1 обобщенных сил, действующих на систему.

При этом предполагаем, что функции переменных $(t,\boldsymbol{q})$ являются дважды непрерывно-дифференцируемы и ограничены вместе со своими производными физическими свойствами исследуемого объекта.

Вектор обобщенных сил $\boldsymbol{Q}$ можно представить в виде суммы

$$\boldsymbol{Q}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{Q}_y(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{Q}_b(t,\boldsymbol{q}), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{Q}_y = \boldsymbol{Q}_y(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ – n-вектор управляющих сил, который необходимо определить, а $\boldsymbol{Q}_b = \boldsymbol{Q}_b(t,\boldsymbol{q})$ – n-вектор внешних сил.

Учитывая выражение кинетической энергии (2), уравнения (1) можно привести к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot q} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = -\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial q} + G^T\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q}_y + \boldsymbol{Q}_b, \tag{5}$$

Если ввести новые обобщенные координаты $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} - \overline{\boldsymbol{q}}(t)$, то структура уравнений (3) в силу линейности оператора предложенной замены не изменится. При этом в новых переменных кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T A(t,\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + B^T(t,\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + C(t,\boldsymbol{q}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot x + \dot{\overline{\boldsymbol{q}}}(t)\right)^T A\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right)\left(\dot x + \dot{\overline{\boldsymbol{q}}}(t)\right) +$$

$$+ B^T\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right)\left(\dot x + \dot{\overline{\boldsymbol{q}}}(t)\right) +$$

$$+ C\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot x^T\tilde A(t,\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}} + \tilde B^T(t,\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{x}} + \tilde C(t,\boldsymbol{x}),$$

где

$$\tilde A(t,\boldsymbol{x}) = A\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right),$$

$$\tilde B(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right) + A\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right)\dot{\overline{\boldsymbol{q}}}(t),$$

$$\tilde C(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\dot{\overline{\boldsymbol{q}}}^T(t)A\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right)\dot{\overline{\boldsymbol{q}}}(t) +$$

$$+ B^T\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right)\dot{\boldsymbol{q}}(t) + C\left(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{q}}(t)\right).$$

В результате указанной замены изучение поведения решений системы (1) в окрестности программного движения $(\overline{\boldsymbol{q}},\dot{\overline{\boldsymbol{q}}})$ сводится к изучению поведения решений преобразованной системы в окрестности $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} = 0$. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что обобщенные координаты $\boldsymbol{q}$ выбраны таким образом, что программное движение системы определяется тождеством $\overline{\boldsymbol{q}} = 0$, $\dot{\overline{\boldsymbol{q}}} = 0$.

Лариса Владимировна Бойкова, кандидат технических наук, доцент. E-mail: aviafil@mv.ru.
Татьяна Александровна Бойкова, кандидат технических наук, доцент.

Будем искать вектор управляющих сил $\boldsymbol{Q}_y(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ в виде

$$\boldsymbol{Q}_y(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{Q}_y^1(t,\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{Q}_y^2(t,\dot{\boldsymbol{q}}), \quad \boldsymbol{Q}_y^2(t,0) = 0. \quad (6)$$

Для существования программного движения вектор сил $\boldsymbol{Q}_y^1(t,\boldsymbol{q})$ должен удовлетворять соотношению

$$\boldsymbol{Q}_y^1(t,0) = -\boldsymbol{Q}_b(t,0) - \frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{q}}(t,0) + \frac{\partial B}{\partial t}(t,0). \quad (7)$$

Если при этом

$$\boldsymbol{Q}_b(t,0) + \frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{q}}(t,0) - \frac{\partial B}{\partial t}(t,0) = 0,$$

при всех $t \in R^+$, тогда следует, что

$$\boldsymbol{Q}_y^1(t,\boldsymbol{q}) = 0.$$

Допустим, что действие управляющих и внешних сил представимо в виде

$$\boldsymbol{Q}_y^1(t,\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{Q}_b(t,\boldsymbol{q}) - \frac{\partial B}{\partial t}(t,\boldsymbol{q}) + \frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{q}}(t,\boldsymbol{q}) = -p(t,\boldsymbol{q})\frac{\partial S(t,\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad (8)$$

где функции $p(t,\boldsymbol{q}), \partial S(t,\boldsymbol{q})$ удовлетворяют условиям

$0 < p_0 \le p(t,\boldsymbol{q}) \le p_1$, где p_0, p_1 – постоянные,

$$S(t,\boldsymbol{q}_0) = 0, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}}(t,\boldsymbol{q}_0) = 0.$$

Тогда уравнение движения (5) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{q}} = -p\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{q}} + G^T\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q}_y^2. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) позволяет получить зависимость оптимальных входных сигналов от параметров системы с целью получения необходимого сигнала на выходе.

Рассмотрим задачу о стабилизации некоторого нестационарного движения физического маятника $\vartheta = \vartheta_0(t)$, которое создается регулируемой скоростью вращения вокруг вертикальной оси. Уравнение движения маятника имеет вид

$$A\ddot{\vartheta} = -(mgz_0 + (C-B)\omega^2(t)\cos\vartheta)\sin\vartheta. \quad (10)$$

Пусть закон вращения щ = щ(t) вокруг вертикальной оси таков, что осуществляется нестационарное движение маятника $\vartheta = \vartheta_0(t)$, то есть

$$\omega^2(t)(C-B)\cos\vartheta_0(t)\sin\vartheta_0(t) = A\ddot{\vartheta}_0(t) + mgz_0\sin\vartheta_0(t),$$

при этом будем предполагать, что ω (t) представляет собой ограниченную функцию.

Введем $x = \vartheta - \vartheta_0(t)$ – отклонение истинного движения от программного. Допустим, что в оси качания действует стабилизирующий момент, типа момента вязкого трения, $M_y = -k\dot{x}$, где $k = const > 0$.

Из (10) находим, что уравнения возмущенного движения будут иметь вид

$$\ddot{x} = -p(t,x)\frac{\partial S}{\partial x} - k_0\dot{x}, \quad (11)$$

где $k_0 = \frac{k}{A}$, $S(x) = 4\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)$,

$$p(t,x) = \frac{1}{A}\left(mgz_0\cos\left(\vartheta_0(t)+\frac{x}{2}\right) + (C-B)\omega^2(t)\cos 2\left(\vartheta_0(t)+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}\right)$$

При выполнении условий

$$p(t,0) \ge p_0 = const > 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\ln p(t,0)) \ge -2k_0 + \alpha_0$$

$$(\alpha_0 = const > 0),$$

или

$$p(t,0) = mgz_0\cos\vartheta_0(t) + (C-B)\omega^2(t)\cos 2\vartheta_0(t) \ge p_0 > 0,$$

$$\frac{2k}{A} > \alpha_1 - \frac{2(C-B)\omega(t)\dot{\omega}(t)\cos 2\vartheta_0(t) - (mgz_0\sin\vartheta_0(t) + 2(C-B)\omega^2(t)\sin 2\vartheta_0(t))\dot{\vartheta}_0(t)}{mgz_0\cos\vartheta_0(t) + (C-B)\omega^2(t)\cos 2\vartheta_0(t)},$$

где $\alpha_1 = const > 0$ (12)

То есть при выполнении условий (12) имеем равномерную асимптотическую устойчивость положения $x = 0$ системы (11) или равномерную асимптотическую устойчивость заданного нестационарного движения $\vartheta = \vartheta_0(t)$ системы (10). Из этой равномерно асимптотической устойчивости следует также равномерная устойчивость при любых постоянно действующих возмущениях.

В общем случае, условия (12) можно представить как условие определенно-положительности второй вариации S на движении $\vartheta = \vartheta_0(t)$ и условие ограниченности логарифмического изменения этой вариации во времени снизу значением $-2k_0$.

Исследуем устойчивость нестационарных движений центрифуги, изображенной на чертеже (рис. 1). Кабина M центрифуги представляет собой твердое тело, которое может свободно поворачиваться вокруг оси OO' относительно державки AOO'. Ось OO' ортогональна плоскости L, проходящей через ось AD центрифуги и центр масс S кабины. Державка AOO' приводится во вращение вокруг неподвижной оси AD, при этом скорость вращения изменяется согласно заданному закону ω = ω(t). За обобщенную координату примем угол α – угол поворота кабины вокруг оси OO'.

Пусть L – плоскость симметрии кабины, а ось *Ox*, проходящая в этой плоскости через точку S и пересекающаяся с осью OO' в точке O, является главной осью центрального эллипсоида инерции. Обозначим через A, B, C моменты инерции кабины M относительно осей *Ox, Oy, Oz*, рассто-

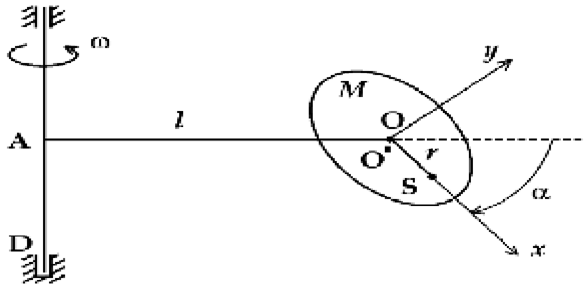

Рис. 1. Устойчивость нестационарных движений центрифуги

яние OA через l, расстояние OS через r.

Кинетическая энергия кабины имеет вид

$$T = \frac{1}{2}C\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\omega^2(t)(A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha +,$$

$$+ 2mlrcos\alpha + ml^2)$$

или

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}C\dot{\alpha}^2, T_1 = 0,$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\omega^2(t)(A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha +$$

$$+ 2mlrcos\alpha + ml^2).$$

Потенциальная энергия кабины в поле силы тяжести имеет вид

$$\Pi = mgr\sin\alpha.$$

Предположим также, что в шарнирных опорах OOŕ действуют силы вязкого трения, образующие момент $M = -k\dot{\alpha}$, где $k = const > 0$. Запишем уравнения движения

$$C\ddot{\alpha} = -mgr\cos\alpha + \omega^2(t)\text{I}$$

$$\text{I}((A - B)\cos\alpha - mlr)\sin\alpha - k\dot{\alpha}. \quad (13)$$

Пусть регулируемое вращение державки AOOŕ вокруг оси AD по закону щ = щ(t) таково, что осуществляется нестационарное движение кабины $\alpha = \alpha_0(t)$, то есть имеет место соотношение

$$\omega^2(t)((A - B)\cos\alpha_0 - mlr)\sin\alpha_0(t) =$$

$$= C\ddot{\alpha}_0(t) + k\dot{\alpha_0}(t) + mgr\cos\alpha_0(t).$$

При этом будем предполагать, что ω(t) представляет собой ограниченную функцию.

Рассмотрим задачу об условиях устойчивости указанного нестационарного движения $\alpha = \alpha_0(t)$. Уравнение возмущенного движения можно привести к виду

$$\ddot{x} = -p(t,x)\frac{\partial S}{\partial x} - k_1\dot{x}, \quad (14)$$

где $x = \alpha - \alpha_0(t)$ – отклонение истинного движения от программного,

$$k_1 = \frac{k}{C}, S(x) = 4\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right),$$

$$p(t,x) = = \frac{1}{C}\left(-mgr\sin\left(\alpha_0(t) + \frac{x}{2}\right) -\right.$$

$$-(A - B)\omega^2(t)cos2\left(\alpha_0(t) + \frac{x}{2}\right)cos\frac{x}{2} +$$

$$\left.+\omega^2 mlrcos\left(\alpha_0(t) + \frac{x}{2}\right)\right).$$

При выполнении условий

$p(t,0) \geq p_0 = const > 0,$

$\frac{d}{dt}(lnp(t,0)) \geq -2k_1 + \alpha_2$, где

$\alpha_2 = const > 0$

или

$$-mgr\sin\alpha_0(t) + \omega^2(t)(mlr\cos\alpha_0(t) -$$

$$-(A - B)cos2\alpha_0(t)) \geq p_0 > 0$$

$$\frac{2k}{C} \geq \alpha_1 - \frac{2\omega(t)\dot{\omega}(t)((A - B)cos2\alpha_0(t) - mlrcos\alpha_0(t)) +}{mgrsin\alpha_0(t) +},$$

$$\frac{+(mgrcos\alpha_0(t) + \omega^2(t)(mlrsin\alpha_0(t) - 2(A - B)sin2\alpha_0(t)))\dot{\alpha}_0(t)}{+\omega^2(t)((A - B)cos2\alpha_0(t) - mlrcos\alpha_0(t))},$$

где $\alpha_1 = const > 0$.

То есть имеем равномерную асимптотическую устойчивость положения $x = 0$ системы (14) или равномерную асимптотическую устойчивость заданного нестационарного движения $\alpha = \alpha_0(t)$ системы (13). Из этой равномерной асимптотической устойчивости следует также равномерная устойчивость при любых постоянно действующих возмущениях.

При отсутствии сил вязкого трения в опорах OO', т.е. когда $M=0$, и при противоположном условии $p(t,0) \leq -p_0 < 0$, движение $\alpha = \alpha_0(t)$ будет неустойчивым.

Рассмотрим задачу в предположении, что ось OO' параллельна оси AD центрифуги (рис. 2).

За обобщенную координату примем угол α – угол поворота кабины вокруг оси OO'. Обозначим момент инерции кабины относительно оси OO' через I, расстояние OA через l, расстояние OS через r.

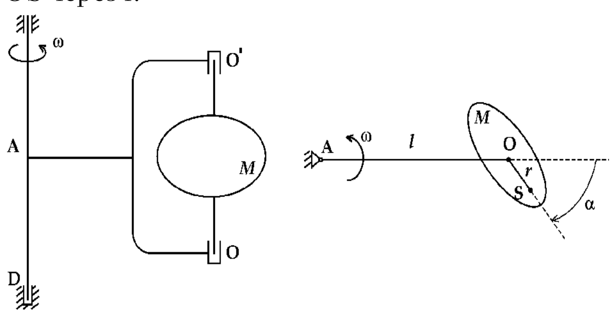

Рис. 2. К решению задачи в предположении, что ось OOŕ параллельна оси AD центрифуги

Потенциальная энергия в рассматриваемом случае равна нулю. Кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\alpha}^2 - \omega(t)(mlr\omega(t)\cos\alpha + I)\dot{\alpha} +$$

$$+\frac{1}{2}\omega^2(t)(I + ml^2 + 2mlr\cos\alpha),$$

или

$$T = T_2 + T_1 + T_0, T_2 = \frac{1}{2} I\dot{\alpha}^2$$

$$T_1 = -\omega(t)(mlr\omega(t)\cos\alpha + I)\dot{\alpha},$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\omega^2(t)(I + ml^2 + 2mlr\cos\alpha).$$

Предположим также, что в шарнирных опорах OO' действуют силы вязкого трения, образующие момент $M = -k\dot{\alpha}$, где $k = const > 0$.

Запишем уравнения движения

$$I\ddot{\alpha} = -\omega^2(t)mlr\sin\alpha +$$

$$+\dot{\omega}(t)(2mlr\omega(t)\cos\alpha + I) - k\dot{\alpha}. \quad (15)$$

Пусть регулируемое вращение державки AOO' вокруг оси AD по закону $\omega = \omega(t)$ таково, что осуществляется нестационарное движение кабины $\alpha = \alpha_0(t)$. При этом будем предполагать, что $\omega(t)$ представляет собой ограниченную функцию.

Рассмотрим задачу об условиях устойчивости указанного нестационарного движения $\alpha = \alpha_0(t)$.

Уравнение возмущенного движения можно привести к виду

$$\ddot{x} = -p(t,x)\frac{\partial S}{\partial x} - k_1\dot{x}, \quad (16)$$

где $x = \alpha - \alpha_0(t)$ – отклонение истинного движения от программного,

$$k_1 = \frac{k}{I}, S(x) = 4\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right),$$

$$p(t,x) = \frac{1}{I}mlr\omega(t)\left(\omega(t)\cos\left(\alpha_0(t) + \frac{x}{2}\right) -\right.$$

$$\left.-\dot{\omega}(t)\sin\left(\alpha_0(t) + \frac{x}{2}\right)\right).$$

При выполнении условий

$$,p(t,0) = \omega(t)(\omega(t)\cos\alpha_0(t) -$$

$$-\dot{\omega}(t)\sin\alpha_0(t)) \geq p_0 = const > 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\ln p(t,0)) \geq -2k_1 + \alpha_2,$$

где $\alpha_2 = const > 0$,

имеем равномерную асимптотическую устойчивость положения $x = 0$ системы (16) или равномерную асимптотическую устойчивость заданного нестационарного движения $\alpha = \alpha_0(t)$. системы (15). Из этой равномерной асимптотической устойчивости следует также равномерная устойчивость при любых постоянно действующих возмущениях.

При отсутствии сил вязкого трения в опорах OO', т.е. когда *M=0*, и при противоположном условии $p(t,0) \leq -p_0 < 0$, движение $\alpha = \alpha_0(t)$. будет неустойчивым.

Можно отметить, что условия равномерной асимптотической устойчивости программного движения в исследованных задачах можно представить как условие определенной положительности второй вариации приведенной потенциальной энергии или функции S на программном движении и условие ограниченности логарифмического изменения этой вариации снизу.

Таким образом, получена зависимость, которая позволяет указать оптимальные выходные сигналы функции параметров исследуемой системы с целью получения требуемого сигнала на выходе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А.С., Бойкова Т.А.* Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С.109-116.
2. *Бойкова Л.В., Бойкова Т.А.* Аналитические методы исследования устойчивости движений механических систем с элементами из композиционных материалов. // Известия Самарского научного центра РАН. Специальный выпуск “Четверть века изысканий и экспериментов по созданию уникальных технологий и материалов для авиаракетостроения УТНЦ – ФГУП ВИАМ”. 2008. Т.1. С.123-126.
3. *Рубановский В.Н., Самсонов В.В.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах.- М.: Наука, 1988. 303 с.

RESEARCH OF NON-STATIONARY MOVEMENTS OF PHYSICAL SYSTEMS

© 2009 L.V. Bojkova, T.A. Bojkova

Institute of Aviation Technologies and Managements
of Ulyanovsk State Technical University

In work the research problem of dynamics of theoretically existing systems of a wide class is put. Any system is characterized by transfer function which is defined structural and parameters of system. Generally considered systems can be multivariate, that is have n inputs and m outputs. Let’s set the task of definition of the entrance operating influence, consisting specifying such functions Q_y at which any movement of system beginning in a vicinity of its working space, for limited time gets in a zone of this space, and remains there in the further. In the classical formulation is a problem about stabilization of program movement of system.

Key words: dynamics, transfer function, entrance operating influence, stabilization of program movement of system.

Larissa Boikova, Candidate of Technics, Associate Professor.
E-mail: aviafil@mv.ru.
Tatiana Boikova, Candidate of Technics, Associate Professor.