УДК 519.217.5

РАСЧЕТ ДВУМЕРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ СНИЖЕНИЯ ТРУДОЕМКОСТИ СО СЖАТИЕМ ЦИКЛА ИЗГОТОВЛЕНИЯ СЛОЖНЫХ ИЗДЕЛИЙ В УСЛОВИЯХ РОСТА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА

© 2009 Б.Н. Иванов, П.М. Попов

Институт авиационных технологий и управления
Ульяновского государственного технического университета

Поступила в редакцию 20.07.2009

Разработана двумерная функция для расчета вероятности снижения трудоемкости и сжатия цикла изготовления изделий применительно к серийному производству. Данная функция является исходным пунктом для развертывания цепей условных вероятностей в составе САПР технологического планирования и технической подготовки производства.

Ключевые слова: снижение трудоемкости, производственный цикл.

При запуске в серийное производство прогнозируемая трудоемкость $\langle T_1 \rangle$ изготовления головного изделия может быть определена по формуле

$$T_1 = K_1 G_4^{\lambda_2} N_5^{-\lambda_3} (d_6 + d_7 + d_8) \cdot k_9 , \quad (1)$$

где: $\langle K_1, \lambda_2, \lambda_3 \rangle$ – коэффициенты группы уравнений, моделируемых на ЭВМ; $\langle G_4 \rangle$ – масса пустого самолета; $\langle N_5 \rangle$ – количество условно изготовленных изделий от начала серийного производства; $\langle d_6 \rangle$ – некорректируемая доля трудоемкости; $\langle d_7 \rangle$ – доля машинного времени заводского оборудования; $\langle d_8 \rangle$ – доля трудоемкости изготовления обшивки самолета; $\langle k_9 \rangle$ – коэффициент, учитывающий прирост производительности труда по формуле

$$k_9 = \frac{100}{100 + 0,4 \cdot k_{10} \cdot t_{11}}, \quad (2)$$

где: $\langle k_{10} \rangle$ –среднегодовой темп прироста производительности труда; $\langle t_{11} \rangle$ – количество лет, истекших от базового года запуска головного изделия в серийное производство; $\langle 0,4 \rangle$ –доля, относящаяся к трудовой деятельности основных производственных рабочих.

В выражении (1) трудоемкость $\langle T_1 \rangle$ прямо пропорциональна величине показателя $\langle k_9 \rangle$ при постоянстве прочих переменных. Данная величина имеет смысл коэффициента снижения трудоемкости изготовления изделия. Она зависит от величины $\langle N_5 \rangle$, которая не входит в состав формулы (2). Время $\langle t_{11} \rangle$ течет для всех одинаково. Поэтому доля $\langle 0,4 \rangle$ подрезает показатель $\langle k_{10} \rangle$. В условиях стагнации предприятия при отрицательном значении $\langle k_{10} \rangle$ показатель $\langle k_9 \rangle$ в формуле (1) увеличивает трудоемкость производства, что приводит к абсурду статистическую отчетность предприятия.

Уравнение (1) определяет величину единственного ресурса $\langle T_1 \rangle$. В математическом отношении данное уравнение является аналогом так называемой производственной функции Кобба – Дугласа, где множество условных переменных неявно влияют на величины других ресурсов предприятия. Например, при дефиците рабочей силы объем производства продукции прямо пропорционален дефитному ресурсу. Функция Кобба – Дугласа теряет связь с сопряженными ресурсами предприятия. Роль ее неявных переменных величин сводится к нивелированию иных ресурсов, избыточных по отношению к данному дефициту, что способствует утечке невостребованного капитала.

Запишем $\langle \alpha = k_{10} \rangle$ в форме десятичной дроби и приведем подобные члены в выражении (2)

$$k_9 = \frac{1}{1 + \alpha \cdot t_{11}}. \quad (3)$$

Представим часть выражения (1) без показателя $\langle k_9 \rangle$ в форме параметра $\langle \psi \rangle$

$$\psi = K_1 \cdot G_4^{\lambda_2} \cdot N_5^{-\lambda_3} (d_6 + d_7 + d_8).$$

Соотношение (1) принимает вид потенциальной функции

$$\langle T_1 = \psi \cdot k_9 \rangle \Rightarrow \left\langle T_1 = \frac{\psi}{1 + \alpha \cdot t_{11}} \right\rangle. \quad (4)$$

Известные в прошлом процессы производства и распространения изделий в стихии рыночной экономики могут быть представлены случайными для будущего развития предприятия ордина-

Иванов Борис Немаевич, ведущий инженер
Попов Петр Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры “Самолетостроение”.
E-mail: pmpopov2008@rambler.ru.

тами $\langle Z_1(x_1), Z_2(x_2), \dots, Z_m(x_m)\rangle$, аппроксимированными графиком кривой уравнения Перла

$$\langle Y(x) = \psi \cdot f_y(x)\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\langle Y(x_k) = \frac{\psi}{1+\alpha\cdot e^{-\beta\cdot t_k}}\right\rangle (5)$$

где: $\langle \alpha, \beta, \psi\rangle$ – параметры аппроксимации кривой; $\langle t\rangle$ –время, приуроченное к оси $\langle x\rangle$ абсцисс графика; $f_y(x)$ –функция плотности вероятности;

$$\left\langle f_y(x) = \frac{\psi}{1+\alpha\cdot e^{-\beta\cdot t}}\right\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\langle f_y(x_k) = \frac{\psi}{1+\alpha\cdot e^{-\beta\cdot t_k}}\right\rangle, \qquad (6)$$

где: $\langle t_k\rangle$ и $\langle x_k\rangle$ индексы времени и вероятности $f_y(x_k)$; $\langle k = 1,2,3,..,m\rangle$.

Таким образом, в моменты времени $\langle t_1, t_2, \dots, t_m\rangle$ случайные значения $\langle Z_1(x_1), Z_2(x_2), \dots, Z_m(x_m)\rangle$ коррелируются величинами функции:

$Y(x_1) = \psi\cdot f_y(x_1)$, $Y(x_2) = \psi\cdot f_y(x_2)$, ..., $Y(x_m) = \psi\cdot f_y(x_m)$

Статистическая гипотеза относительно уравнения (5) в единстве его аппроксимирующих параметрв $\langle\alpha,\beta,\psi\rangle$, заключается в том, что значения непрерывной функции $Y(x)$ в моменты времени $\langle t_1, t_2, \dots, t_m\rangle$ признаются математиче-скими ожиданиями случайных величин $\langle Z_1(x_1), Z_2(x_2), \dots, Z_m(x_m)\rangle$ при $\langle \alpha > 0$, $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$ и $k = 1,2,\dots,m\rangle$. При этом формула (5) есть уравнение регрессии, а ординаты $Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_m)$ являются независимыми случайными величинами в соответствии с теоремой об умножении вероятностей

$$f_y(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = \prod_{k=1}^{m} f_y(x_k)$$

Из тождественности выражений (4) и (5) следует

$$\langle f_y(x) = k_9\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{1}{1+\alpha\cdot e^{-\beta\cdot t_k}} = \frac{1}{1+\alpha\cdot t_{11}}\right\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\langle e^{-\beta\cdot t_k} = t_k\right\rangle \Rightarrow \langle -\beta\cdot e = \ln t\rangle. \quad (7)$$

Находим первую и вторую производные от первообразной (7)

$$\langle -\beta\cdot t = \ln t\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{d\beta}{dt} + \frac{\beta}{t} = -\frac{1}{t^2}\right\rangle \Rightarrow \quad (8)$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{1}{t}\cdot\frac{d\beta}{dt} - \frac{\beta}{t^2} = \frac{1}{2t^3}\right\rangle (9)$$

Воспользуемся разложением в ряд $\langle e^{\ln t}\rangle$ при условии, что $\langle \ln^2 t < \infty\rangle$

$$e^{\ln t} = 1 + \frac{\ln t}{1!} + \frac{\ln^2 t}{2!} + \dots + \frac{\ln^m t}{m!}$$

Исходя из выражения $\langle -\beta\cdot t = \ln t\rangle$, находим соотношение

$$\left\langle t = 1 - \beta\cdot t + \frac{\ln^2 t}{2!} + \dots + \frac{\ln^m t}{m!}\right\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\langle \beta\cdot t = 1 - t + \frac{\ln^2 t}{2!} + \frac{\ln^3 t}{3!} + \dots + \frac{\ln^m t}{m!}\right\rangle$$

Запишем производную первого и второго порядка от данной первообразной

$$t\cdot\frac{d\beta}{dt} + \beta = -1 + \frac{\ln t}{1!\cdot t} +$$
$$+ \frac{\ln^2 t}{2!\cdot t} + \dots + \frac{\ln^{m-1} t}{(m-1)!\cdot t};$$

$$t\cdot\frac{d^2\beta}{dt^2} + 2\frac{d\beta}{dt} = \left\langle \frac{1}{1!\cdot t^2} - \frac{\ln t}{1!\cdot t^2}\right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\ln t}{1!\cdot t^2} - \frac{\ln^2 t}{2!\cdot t^2}\right\rangle + \dots$$

$$\dots + \left\langle \frac{\ln^{m-3} t}{(m-2)!\cdot t^2} - \frac{\ln^{m-2} t}{(m-2)!\cdot t^2}\right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\ln^{m-2} t}{(m-2)!\cdot t^2} - \frac{\ln^{m-1} t}{(m-1)!\cdot t^2}\right\rangle.$$

После приведения подобных членов производная второго порядка имеет вид

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{2}{t}\cdot\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{t^3}. \qquad (10)$$

Вычтем из выражения (10) выражение (9)

$$\frac{d\beta}{dt} + \frac{\beta}{t} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t^2}.$$

Запишем интеграл в форме решения задачи Коши для линейного неодно-родного уравнения первого порядка

$$\left\langle \beta = \mathrm{e}^{-\int\frac{dt}{t}}\left[\mathrm{C}_1 + \int\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2t^2}\right)\mathrm{e}^{\int\frac{dt}{t}}\mathrm{d}t\right]\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \beta = \frac{\mathrm{C}_1}{t} + \frac{1}{t}\int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t}\right)\mathrm{d}t\right\rangle \Rightarrow$$

$$\left\langle \beta = \frac{1}{t}\left(C_1 + \ln\sqrt{t}\right)\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle e^{-\ln\sqrt{t}} = t\right\rangle \Rightarrow \left\langle e^{-\ln\sqrt{t_k}} = t_k\right\rangle \quad (11)$$

При $\langle t_k = 1\rangle$ из соотношения (11) следует, что постоянная интегрирования $\langle C_1 = 0\rangle$. Функция $f_y(x)$ принимает вид

$$\left\langle f_y(x) = \frac{1}{1 + \alpha\cdot \mathrm{e}^{-\ln\sqrt{t_k}}}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle f_y(x_k) = \frac{1}{1 + \alpha\cdot \mathrm{e}^{-\ln\sqrt{S_{ij}}}}\right\rangle, \quad (12)$$

где: $\langle S_{ij}\rangle$ – спефицированный индекс серийного счета; $\langle i = 1,2,\ldots S\rangle$ – индекс серии однородных в конструктивном отношении изделий; $\langle S\rangle$ – количество серий; $\langle j = 1,2,\ldots N_l\rangle$ – индекс изделия *i-той* серии; $\langle N_{ij}\rangle$ – количество изделий в *i-той* серии. Таким образом, содержащийся в исходном выражении (5) индекс $\langle t_k\rangle$ замещен специфицированным индексом $\langle S_{ij}\rangle$, которому соответствует вероятность $f_y(x_k)$ из области распределения вероятности $f_y(x)$ в моменты времени $\langle t_1, t_2, \ldots, t_m\rangle$ относящиеся к планируемому периоду.

Исходя из выражения (5), определяем $\langle \psi = L_i\rangle$, где $\langle L_i\rangle$ – внутренний потенциал предприятия, т.к. его способность изготовить и реализовать $\langle S_i\rangle$ серию изделий требуемого качества и в заданный срок, определяемый темпом роста производительности труда и количеством заказанных изделий.

$$T_i = \frac{L_i}{1 + \alpha\cdot e^{-\ln\sqrt{S_i}}}.$$

На основании предшествующего опыта, потенциал $\langle L_i\rangle$ может быть формально представлен внутренними ресурсами фондов рабочей силы требуемой квалификации и машинного времени заводского оборудования. Стало быть, потенциал $\langle L_i\rangle$ не включают внешние ресурсы кооперированных поставок узлов, агрегатов и готовых изделий сторонних производителей, т.к. затраты на их поставку переносят сборочным процессом из состава оборотных средств предприятия на себестоимость готовой продукции.

Определим потенциал $\langle L_1\rangle$ предприятия, достаточный для изготовления головного изделия

$$\left\langle L_i = T_1\cdot\frac{1}{f_y(x)} = \psi\cdot f_y(x)\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle L_i = T_1\left(1 + \alpha\cdot \mathrm{e}^{-\beta\cdot S_{ij}}\right)\right\rangle.$$

Функция (12) относится к экспоненциальному виду распределения случайных величин, ограниченных с одной стороны $\langle 0 \le f_y(x) \le \infty\rangle$. Функции данного вида называются марковскими, т.к. они характеризуются отсутствием последействия. Т.е. будующее состояние $f_y(x_{k+1})$ в момент времени $\langle t_{k+1}\rangle$ зависит только от ее состояния $f_y(x_k)$ в настоящий момент $\langle t_k\rangle$ и не зависит от ее состояний $f_y(x_1), f_y(x_2), \ldots f_y(x_{k-1})$ в прошлом.

Наличие у марковских функций двумерной вероятности показывает на то, что функция $f_y(x)$ является проекцией вектора $f(x)$ на ось ординат. Следовательно, существует проекция $f_x(x)$ вектора $f(x)$ на ось абсцисс. Данные проекции связывает угол $\langle\gamma\rangle$ наклона гипотенузы, который зависит от серийного счета изделий

$$\gamma = \gamma_0 + arcctg\left(\frac{1 + \alpha\cdot e^{-\ln\sqrt{S_{ij}}}}{1}\right).$$

Для головного изделия $\langle S_{11} = 1\rangle \Rightarrow \langle \gamma_1 = arcctg(1 + \alpha)\rangle$. Из этого условия находим начальный угол $\langle \gamma_0 = \pi/4\rangle$ наклона вектора $f(x)$ и величину его модуля $|f(x)| = \sqrt{2}$

$$\gamma = \frac{\pi}{4} + arcctg\left(1 + \alpha\cdot e^{-\ln\sqrt{S_{ij}}}\right). \quad (13)$$

Таким образом получается, что в зависимости от серийного счета изделий функция (14) имеет смысл коэффициента снижения трудоемкости изделия

$$f_y(x_k) = \frac{\sqrt{2}\cdot \sin\gamma}{1 + \alpha\cdot e^{-\ln\sqrt{S_{ij}}}}. \quad (14)$$

Функция (15) имеет смысл коэффициента сжатия производственного цикла изготовления изделия

$$f_x(x_k) = \frac{\sqrt{2}\cdot \cos\gamma}{1 + \alpha\cdot e^{-\ln\sqrt{S_{ij}}}}. \quad (15)$$

На рис. 1 приведены результаты расчета коэффициентов $\langle k_3, k_6, k_{10}\rangle$ снижения трудоемкости изделия и коэффициентов сжатия

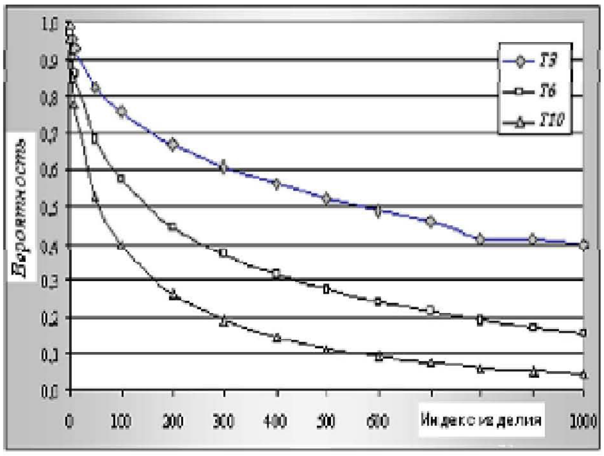

Рис. 1. Вероятность снижения трудоемкости от в зависимости от темпа роста производительности труда

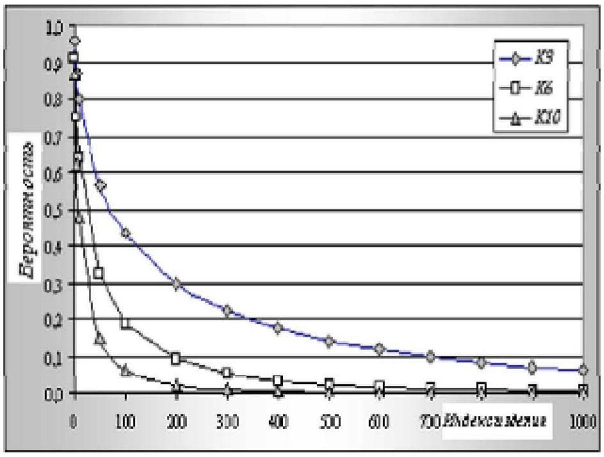

Рис. 2. Вероятность сжатия цикла изготовления изделия в зависимости от темпа роста производительности труда

ξ_3, ξ_6, ξ_{10} производственного цикла изготовления изделий при темпах роста производительности труда $\langle \alpha_3 = 3\%, \alpha_6 = 6\%, \alpha_{10} = 10\% \rangle$, соответственно. В данном примере все изделия включены в одну серию

Таким образом, разработана двумерная функция для расчета вероятности снижения трудоемкости и сжатия цикла изготовления изделий применительно к серийному производству. Данная функция является исходным пунктом для развертывания цепей условных вероятностей в составе САПР технологического планирования и технической подготовки производства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартино Дж.* Технологическое прогнозирование. М.: Прогресс. 1977. пер. англ.
2. *Свешников А.А.* Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука. 1968.
3. *Попов П.М., Ляшко Ф.Е.* Оптимальное управление в ходе эволюционного развития процессов и систем: Учебное пособие. Ульяновск: УлГТУ, 2000.

CALCULATION OF BIDIMENTIONAL PROBABILITY OF DECREASE IN LABOUR INPUT WITH COMPRESSION OF THE CYCLE OF MANUFACTURING OF COMPLEX PRODUCTS IN CONDITIONS OF GROWTH OF LABOUR PRODUCTIVITY

© 2009 B.N. Ivanov, P.M. Popov

Institute of Aviation Technologies and Management
Of Ulyanovsk State Technological University

Function is developed for calculation of probability of decrease in labour input and compression of a cycle of manufacturing of products with reference to a batch production two-dimensional. The given function is a starting point for expansion chains of conditional probabilities in structure SAPR of technological planning and manufacture technical training.

Key words: labour input decrease, production cycle.

Boris Ivanov, Leading Engineer
Petr Popov, Doctor of Technics, Professor at the Aircraft Construction Department.
E-mail: pmpopov2008@rambler.ru.