

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ СИГНАЛА, ОБУСЛОВЛЕННАЯ НЕСООТВЕТСТВИЕМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВИДУ РЕАЛЬНОГО СИГНАЛА

© 2009 В.И. Батищев¹, В.С. Мелентьев¹, Г.И. Леонович²

¹Самарский государственный технический университет

²Самарский научно-технический центр РАН

Поступила в редакцию 22.04.2009

Рассмотрены методы аппроксимационной оценки влияния составляющих погрешности гармонического сигнала, определяющих несоответствие заданной модели и моделируемой зависимости, на погрешность результата измерения. Проведен анализ метода мгновенного определения погрешности измерения интегральной характеристики как функции, аргументы которой заданы приближенно с погрешностью, соответствующей отклонению модели от реального сигнала.

Ключевые слова: аппроксимационная оценка, погрешность, гармонический сигнал, модель

ВВЕДЕНИЕ

В измерительной технике существует большое число приложений, когда за предельно короткий отрезок времени необходимо идентифицировать сигнал, относящийся к перечню априорно известных моделей. Если, например, гармонический сигнал определенной частоты при изменении фазы или амплитуды выходит за пределы установленного допуска, то принимается решение о наличии короткого замыкания, нарушении работоспособности какой-либо контролируемой цепи, устойчивой недостоверности данных в информационном канале и т.п. При этом, несвоевременное отключение питания, переключение на резервную цепь или измерительный канал часто равнозначно катастрофическому отказу всего объекта в целом [1, 3]. В телекоммуникационных системах одним из актуальных направлений повышения скорости передачи данных рассматривается мгновенное определение параметров манипулированных гармонических сигналов, передаваемых по узкополосному каналу [2].

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОГРЕШНОСТИ НА ПОГРЕШНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

Для гармонического сигнала $x(t)$, имеющего три параметра амплитуду A , частоту ω (период

Батищев Виталий Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий. E-mail: vib@list.ru.

Мелентьев Владимир Сергеевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационно-измерительной техники. E-mail: vs_mel@ru.

Леонович Георгий Иванович, доктор технических наук, профессор, Главный научный руководитель. E-mail: leogi1@mail.ru

T) и фазу ϕ может быть составлена система трех уравнений решение которой позволяет определить искомые параметры сигнала:

$$\begin{cases} A \sin(\omega t_1 + \phi) = x(t_1); \\ A \sin(\omega t_2 + \phi) = x(t_2); \\ A \sin(\omega t_3 + \phi) = x(t_3). \end{cases}$$

Если отсчеты t_1 , t_2 и t_3 равномерно распределены по периоду T , то приходим к известному решению, вытекающему из теоремы Котельникова. Однако равномерное распределение отсчетов по периоду предполагает известным значение самого T , при этом время измерения приблизительно равно периоду.

Значительно сократить время измерения позволяет использование метода измерения интегральных характеристик гармонических сигналов [3], согласно которому мгновенные значения сигнала берутся через одинаковые (в общем случае произвольные) интервалы времени Δt , первое из которых взято в произвольный момент времени:

$$\begin{cases} A \sin(\omega t_1 + \phi) = x(t_1); \\ A \sin[(\omega t_1 + \omega \Delta t) + \phi] = x(t_2); \\ A \sin[(\omega t_1 + 2\omega \Delta t) + \phi] = x(t_3). \end{cases}$$

В данном случае время измерения не зависит от периода сигнала, а определяется в основном длительностью интервала времени Δt . В общем случае время измерения меньше периода сигнала.

Выражение для среднеквадратического значения сигнала (СКЗ) гармонического сигнала имеет вид [3]

$$X_{СКЗ} = \frac{x(t_1)}{\sqrt{2 \left[1 - \left(\frac{2x^2(t_2) - x(t_3)x(t_1) - x^2(t_1)}{2x(t_2)\sqrt{x^2(t_2) - x(t_3)x(t_1)}} \right)^2 \right]}}, \quad (1)$$

где $x(t_1) = A \sin \alpha_1$; $x(t_2) = A \sin(\alpha_1 + \omega \Delta t)$;
 $x(t_2) = A \sin(\alpha_1 + 2\omega \Delta t)$; α_1 - начальная фаза сигнала.

Одной из основных проблем рассматриваемого метода является анализ точности измерения. Если реальный сигнал совпадает с гармонической моделью, то получается методически точный результат. При несоответствии модели виду реального сигнала оценки параметров могут существенно отличаться от оптимальных.

В соответствии с общей методикой метрологического анализа аппроксимационных методов, алгоритмов и средств [4] оценки результирующей погрешности определяются целями измерений и обработки результатов. В общем случае, качество решения аппроксимационной задачи оценивается некоторой результирующей погрешностью, включающей в себя все составляющие, определяющие несоответствие модели и моделируемой зависимости. При случайных сигналах это интегральные, как правило, среднеквадратические оценки. При детерминированных сигналах могут быть получены более жесткие оценки равномерного приближения. Однако для получения таких оценок необходимо знать вид реальной аппроксимируемой зависимости.

Для оценки отклонения модели от реального сигнала можно использовать:

- наибольшее отклонение значений модели от соответствующих значений сигналов

$$\Delta_{x_{\max}} = \sup |x(t) - x_M(t, \vec{\alpha})| = \sup \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(t) - x_M(t, \vec{\alpha}) \right|; \quad (2)$$

- среднеквадратическую погрешность

$$\sigma^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [x(t) - x_M(t, \vec{\alpha})]^2 dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(t) - x_M(t, \vec{\alpha}) \right]^2 dt. \quad (3)$$

В общем случае для оценки влияния составляющих погрешности, обусловленных несоответствием модели виду сигнала, на погрешность результата измерения той или иной интегральной характеристики сигнала $Y = F[x_M(t, \vec{\alpha})]$, определяемой в соответствии с (1), можно использовать следующие предлагаемые методы.

1. С помощью расчетного значения интегральной характеристики реального сигнала и определения относительной погрешности

$$\delta = \frac{Y - Y_p}{Y_p},$$

где Y_p - расчетное значение интегральной характеристики, определенное для реального сигнала.

Такой метод можно использовать для прогнозирования погрешности и выявления области применимости метода измерения интегральной характеристики согласно (1) исходя из требований по точности при известных спектрах реальных сигналов.

2. С помощью определения погрешности измерения интегральной характеристики как функции, аргументы которой заданы приближенно с погрешностью, соответствующей отклонению модели от реального сигнала.

Погрешность вычисления значения функции, аргументы которой заданы приближенно, может быть оценена с помощью дифференциала этой функции, если погрешности аргументов достаточно малы и допустима замена приращений функции дифференциалами. Если известны только предельные абсолютные погрешности аргументов, то при вычислении дифференциалов необходимо для всех производных брать их абсолютные значения.

В зависимости от того как производится оценка отклонения модели от реального сигнала, возможны три подхода к определению погрешности.

Считая, что предельные абсолютные погрешности аргументов соответствуют наибольшему отклонению, определяемому согласно (2), то для интегральной характеристики $Y = F[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)]$ получим

$$\Delta Y = \left[\left| (Y)'_{x(t_1)} \right| + \left| (Y)'_{x(t_2)} \right| + \dots + \left| (Y)'_{x(t_m)} \right| \right] \Delta x_{\max}. \quad (4)$$

Если считать, что предельное значение абсолютных погрешностей аргументов определяется через среднеквадратическую погрешность σ в соответствии с (3), то

$$\Delta Y = \left[\left| (Y)'_{x(t_1)} \right| + \left| (Y)'_{x(t_2)} \right| + \dots + \left| (Y)'_{x(t_m)} \right| \right] \sigma. \quad (5)$$

Если абсолютные погрешности аргументов соответствуют действительным разностям между мгновенными значениями реального сигнала и модели в точках t_1, t_2, \dots, t_m :

$$\Delta x(t_1) = x(t_1) - x_M(t_1, \vec{\alpha});$$

$$\Delta x(t_m) = x(t_m) - x_M(t_m, \vec{\alpha}),$$

то

$$\Delta Y = \Delta x(t_1)(Y)'_{x(t_1)} + \Delta x(t_2)(Y)'_{x(t_2)} + \dots + \Delta x(t_m)(Y)'_{x(t_m)}$$

При использовании данного метода относительная погрешность равна

$$\delta = \frac{\Delta Y}{Y_p}.$$

3. Третий метод предусматривает экспериментальное определение погрешности. Для этого производится измерение интегральной характеристики $Y = F[x(t, \vec{\alpha})]$ образцовым средством измерения с метрологическими характеристиками, обеспечивающими возможность его использования в условиях реального сигнала, и сравнение с результатом измерения Y прибором, использующим аппроксимационный метод (1).

В общем случае, при наличии в сигнале высших гармоник (помех) мгновенные значения сигнала в моменты времени t_1, t_2 и t_3 можно представить в следующем виде:

$$x'(t_1) = A_1 \left[\sin a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k \sin(ka_1 + \psi_{1k}) \right]; \quad (6)$$

$$x'(t_2) = A_1 \left[\sin(a_1 + \omega\Delta t) + \sum_{k=2}^{\infty} h_k \sin(ka_1 + \psi_{1k} + k\omega\Delta t) \right]; \quad (7)$$

$$x'(t_3) = A_1 \left[\sin(a_1 + 2\omega\Delta t) + \sum_{k=2}^{\infty} h_k \sin(ka_1 + \psi_{1k} + 2k\omega\Delta t) \right]; \quad (8)$$

где ψ_{1k} - начальная фаза k -той гармоники относительно первой; h_k - коэффициент k -той гармоники.

ОСОБЕННОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТИ, ОСНОВАННОГО НА ПРИБЛИЖЕННОМ ИЗМЕРЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим второй метод оценки, базирующийся на определении погрешности измерения интегральной характеристики как функции, аргументы которой заданы приближенно с погрешностью, соответствующей отклонению модели от реального сигнала.

Допуская, что предельные абсолютные погрешности аргументов соответствуют наибольшему отклонению, определяемому согласно (2), то в соответствии с (4) для СКЗ сигнала имеем

$$\Delta X_{СКЗ} = \left[\left| (X_{СКЗ})'_{x(t_1)} \right| + \left| (X_{СКЗ})'_{x(t_2)} \right| + \Delta \left| (X_{СКЗ})'_{x(t_3)} \right| \right] X_{\max}.$$

Относительная погрешность $\delta_{СКЗ}$ равна

$$\delta_{СКЗ} = \frac{\Delta X_{\max}}{X_{СКЗp}} \left[\left| (X_{СКЗ})'_{x(t_1)} \right| + \left| (X_{СКЗ})'_{x(t_2)} \right| + \left| (X_{СКЗ})'_{x(t_3)} \right| \right]. \quad (9)$$

Определим предельное значение ΔX_{\max} в со-

ответствии с (2):

$$\Delta X_{\max} = \sup \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + k\alpha_1 + \psi_{1k}) - A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \right]. \quad (10)$$

Если параметры первой гармоники реального сигнала совпадают с параметрами сигнала, соответствующего гармонической модели, то (10) примет вид

$$\Delta X_{\max} = \sup \left[A_1 \sum_{k=2}^{\infty} h_k \sin(k\omega t + k\alpha_1 + \psi_{1k}) \right]. \quad (11)$$

Выражение (11) принимает максимальное значение $A_1 \sum_{k=2}^{\infty} h_k$, если $|\sin(k\omega t + k\alpha_1 + \psi_{1k})| = 1$,

т.е. при $\psi_{1k} = \frac{\pi}{2}(2q+1) + k\alpha_1$, где $q = 0; 1$.

Например, когда в сигнале присутствует первая и третья гармоники, из (9) получим

$$\begin{aligned} \delta_{СКЗ} = & \frac{h_3 \sqrt{2}}{\sqrt{1+h_3^2}} \left\{ \left[\frac{1}{\sin \alpha_1} + \frac{\text{ctg} \alpha_1}{2 \sin \omega \Delta t} \times \right. \right. \\ & \times \left[\frac{\text{ctg} \alpha_1 \sin(\alpha_1 + 2\omega \Delta t)}{\sin \omega \Delta t} - \frac{\sin(\alpha_1 + 2\omega \Delta t)}{\sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 + \omega \Delta t)} \right. \\ & \left. \left. - \frac{2}{\sin(\alpha_1 + \omega \Delta t)} \right] + \left| \frac{\text{ctg} \alpha_1}{\sin \alpha_1} \right| \times \right. \\ & \times \left[\frac{2}{\sin \omega \Delta t} - \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \omega \Delta t)} - \frac{\cos \alpha_1 \sin(\alpha_1 + \omega \Delta t)}{\sin^2 \omega \Delta t} \right] \left. \right\} + \\ & + \left| \frac{1}{2 \sin \alpha_1 \sin \omega \Delta t} \left[\frac{\cos \alpha_1}{\sin \omega \Delta t} - \frac{1}{\sin(\alpha_1 + \omega \Delta t)} \right] \right|. \quad (12) \end{aligned}$$

Если считать, что предельные абсолютные погрешности аргументов соответствуют отклонению модели от реального сигнала, определяемому через среднеквадратическую погрешность в соответствии с (3), то согласно (5)

$$\Delta X_{СКЗ} = \left[\left| (X_{СКЗ})'_{x(t_1)} \right| + \left| (X_{СКЗ})'_{x(t_2)} \right| + \left| (X_{СКЗ})'_{x(t_3)} \right| \right] \sigma.$$

Определим значение среднеквадратической погрешности согласно (3)

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + k\alpha_1 - \psi_{1k}) - A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \right]^2 dt. \quad (13)$$

Если параметры первой гармоники реального сигнала совпадают с параметрами сигнала, соответствующего гармонической модели, то в силу ортогональности тригонометрических функций (13) примет вид

$$\sigma = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} h_k^2}, \quad (14)$$

т.е. (14) соответствует среднеквадратическому значению высших гармоник X_{Γ}

Относительная погрешность δ_{CK3} равна

$$\delta_{CK3} = \frac{X_{\Gamma}}{X_{CK3}} \left[\left| (X_{CK3})'_{x(t_1)} \right| + \left| (X_{CK3})'_{x(t_2)} \right| + \left| (X_{CK3})'_{x(t_3)} \right| \right] = k_C \left[\left| (X_{CK3})'_{x(t_1)} \right| + \left| (X_{CK3})'_{x(t_2)} \right| + \left| (X_{CK3})'_{x(t_3)} \right| \right], \quad (15)$$

где k_C - коэффициент несинусоидальности.

Для рассматриваемого случая, когда в сигнале присутствует первая и третья гармоники, из (15) получим

$$\delta_{CK3} = \frac{h_3}{\sqrt{1+h_3^2}} \left[\left| (X_{CK3})'_{x(t_1)} \right| + \left| (X_{CK3})'_{x(t_2)} \right| + \left| (X_{CK3})'_{x(t_3)} \right| \right]. \quad (16)$$

Анализ показывает, что при наличии в сигнале первой и третьей гармоник погрешность δ_{CK3} , определенная согласно (16), в $\sqrt{2}$ раз меньше аналогичной погрешности, вычисленной в соответствии с выражением (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонович Г.И.* Автоматизированные системы контроля и учета энергии [Текст] / Г.И. Леонович, А.Г. Садов. - М.: Машиностроение-1, 2007.- 466 с.
2. *Леонович Г.И.* Космические и наземные системы радиосвязи и сети телерадиовещания [Текст] / Г.И. Леонович, Л.М. Логвинов - Самара: Изд-во Самарского научного центра РАН, 2008. - 348 с.
3. *Батищев В.И.* Цифровые методы измерения интегральных характеристик периодических сигналов. [Текст] / В.И. Батищев., В.С. Мелентьев - Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2002. - 96 с.
4. *Батищев В.И.* Аппроксимационные методы и системы промышленных измерений, контроля, испытаний, диагностики [Текст] / В.И. Батищев., В.С. Мелентьев - М.: Машиностроение-1, 2007. - 393 с.

THE EVALUATION OF THE ERROR OF THE ROOT-MEAN-SQUARE VALUE OF A SIGNAL DETERMINATION, CONDITIONED BY THE INCONGRUITY HARMONIC MODEL AND TYPE OF THE REAL SIGNAL

© 2009 V.I. Batishchev¹, V.S. Melentiev¹, G.I. Leonovich²

¹ Samara State Technical University

² RARAS Samara Scientific and Technical Centre

There are considered the methods of approximate evaluation of influence of error components of the harmonic signal, which determine the incongruity of the model given and the modeling dependence, on the error of the result of measuring. There was made an analysis of the method of the instant determination of the error measuring of the integral characteristic as a function, arguments of which were given approximately to the error, corresponding to the model deflection of the real signal.

Key words: approximate evaluation, error, harmonic signal, model

Vitaliy Batishchev, Doctor of Technics, Professor, Head at information technology Department.

E-mail: vib@list.ru.

Vladimir Melentiev, Doctor of Technics, Professor, Head at informing-measuring technique Department.

E-mail: vs_mel@ru.

George Leonovich, Doctor of Technical Science, professor, Chief scientific adviser. E-mail: leogi1@mail.ru