

ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД

© 2009 К.Д. Каримбаев¹, Н.С. Рапилбекова²

¹ ФГУП центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова

² Таразский государственный педагогический институт, Республика Казахстан

Поступила в редакцию 18.03.2009

В работе обсуждается проблема устойчивости разностных уравнений теплопроводности в многослойных средах. Оценка устойчивости проведена на основе анализа результатов численного решения уравнений теплопроводности в зависимости от характеристик материала слоёв и размера пространственной ячейки.

Ключевые слова: теплопроводность, конечно-разностная аппроксимация, краевая задача, устойчивость, схема решения, идеальный теплообмен, неидеальный теплообмен, параметр Фурье, параметр Био.

Одной из важных проблем, которые сопровождают конечно-разностные модели [1] уравнений нестационарной теплопроводности, является поведение решения конечно-разностного уравнения с ростом времени τ (см., например, [2],[3],[4]) – устойчивость решения. Главным признаком устойчивости решения считают малые изменения в результатах решения при малых изменениях параметров, определяющих результат решения. Как показано в [5], [6] и других работах на результат решения при заданных граничных и начальных условиях оказывают непосредственное влияние теплофизические характеристики материала (λ, c_ϵ), параметры (α), определяющие условия теплообмена на границах исследуемой области, а также на поверхностях контакта соседних слоёв в случае многослойных сред [7]. Кроме подробно исследованных в [5] параметров на результат решения могут оказать влияние выбор шага по времени Δ_t , шага по пространственной координате Δ^k и параметра z , связанного с принятой схемой решения.

Влияние шага по пространственной координате Δ^k на точность аппроксимации уравнений нестационарной теплопроводности конечно-разностной моделью обсуждалось в работах [8] – [11]. Как показано во многих исследованиях, проблема устойчивости связана не с прямым выбором шага по времени Δ_t вне зависимости от других параметров, а с выбором шага по времени Δ_t в зависимости от отношения $\Delta_t / (\Delta^k)^2$.

Здесь Δ^k – длина отрезка, на которые разделена длина $L^k - L_0^k$ k -ого слоя ($\Delta^k = (L^k - L_0^k) / N^k, N^k$ – число отрезков). Выбор отношения $\Delta_t / (\Delta^k)^2$ зависит как от характера изменения теплофизических свойств материала, так и параметра z . Ниже на основе разработанного алгоритма численного решения уравнений нестационарной теплопроводности [7] исследовано влияние различных параметров на выбор шага по времени Δ_t , на обеспечение устойчивости решения конечно-разностной модели нестационарной теплопроводности в слоистых (неоднородных) средах.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Все последующие исследования проведены относительно безразмерной температуры q^k в безразмерной пространственной координате x и безразмерном времени t . Они введены с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \xi &= (r - L_0^k) / L^k, \quad t = t / t^*; \\ \theta^k &= (T^k(r, t) - T_0^k(r)) / T^* \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r, t – пространственная координата и время; $T^k(r, t)$ – неизвестная температура, t^* и T^* – характерное время и характерная температура, $T_0^k(r)$ – начальное значение температуры; k – номер текущего слоя ($k = 1, 2, \dots, M$), L_0^k и L^k – начало и конец текущего слоя.

Уравнения нестационарной теплопроводности [7] для слоистой среды относительно безразмерных параметров записываются в виде

$$\theta_{,t}^k = Fo^k (\mu_{11}^k \theta_{,\xi\xi}^k + m_1^k \theta_{,\xi}^k) + \omega^k, \quad (2)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mu_{11}^k &= \lambda^k / \lambda^*; \quad \mu_1^k = (\lambda^k / \lambda^*)_{,\xi} + n \mu_{11}^k / \xi; \\ \omega^k &= v^k + Q^k t^* / T^* \rho^k c_\epsilon^k; \\ Fo^k &= \lambda^* t^* / (L^*)^2 \rho^k c_\epsilon^k. \end{aligned} \quad (3)$$

Из приведенных обозначений можно видеть,

Каримбаев Тельман Джамалдинович, доктор технических наук, начальник отдела.

E-mail: karimbayev@ciam.ru, bahit@ciam.ru

Рапилбекова Нагима Сейсенбаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, старший преподаватель.

E-mail: aidasher@mail.ru, ainura8921@mail.ru

что μ_{11}^k связан с коэффициентом теплопроводности λ^k ; μ_1^k – параметр, связанный с изменениями теплопроводности, а также системой координат (прямоугольная $n=0$, цилиндрическая $n=1$, сферическая $n=2$); λ^* – характерная теплопроводность, ρ^k – плотность и c_{ξ}^k – удельная теплоёмкость материала k – ого слоя; Q^k – внутренние источники тепла в k – ом слое; Fo^k – параметр Фурье [7]. Производная по соответствующей переменной обозначена нижним символом после запятой.

Граничные условия приняты в виде

$$\theta_{,\xi}^1 = Bi_0^1 [\theta^1 - \varphi_0(\tau)], \text{ при } \xi = L^1_0/L^*; \quad (4.a)$$

$$\theta_{,\xi}^M = -Bi_L^M [\theta^M - \varphi_L(\tau)], \text{ при } \xi = 1. \quad (4.б)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= (T^1 - T^1_0)/T^*; \\ \varphi_L(t) &= (T^M - T^M_0)/T^*, \end{aligned} \quad (5)$$

а T^1_0, T^M_0 – заданные температуры окружающей среды.

При переходе от k – ого слоя к $k+1$ – ому слою условия идеального теплообмена [7] принимаются в виде ($1 \leq k \leq M-1$)

$$\begin{aligned} \theta_{,\xi}^k &= (\mu_{11}^{k+1} / \mu_{11}^k) \theta_{,\xi}^{k+1}; \\ \theta^k &= \theta^{k+1} \text{ при } \xi = L^k/L^*. \end{aligned} \quad (6)$$

а условия неидеального теплообмена – в форме

$$\theta_{,\xi}^k = -Bi_L^k (\theta^k - \theta^{k+1}), \text{ при } \xi = L^k/L^*; \quad (7.a)$$

$$\theta_{,\xi}^{k+1} = Bi_0^{k+1} (\theta^{k+1} - \theta^k), \text{ при } \xi = L^{k+1}_0/L^*. \quad (7.б)$$

Всюду выше введены параметры Био Bi_0^{k+1} , которые определяются из равенств

$$Bi_L^k = \alpha_L^k L^* / \lambda^k; \quad Bi_0^k = \alpha_0^k L^* / \lambda^k. \quad (8)$$

Здесь α_L^k и α_0^k – коэффициенты теплообмена на соответствующих поверхностях.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Входящие в уравнения теплопроводности (2) производные от температуры по координате x представлены их разностным аналогом с точностью до малых второго порядка. При этом производные в любой внутренней узловой точке p ($2 \leq p \leq N^k$) представляются в виде

$$\begin{aligned} (\theta^k_{,\xi})_p &= (\theta^k_{p+1} - \theta^k_{p-1}) / 2\Delta^k; \\ (\theta^k_{,\xi\xi})_p &= (\theta^k_{p+1} + \theta^k_{p-1} - 2\theta^k_p) / (\Delta^k)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

После подстановки значений производных (9) в уравнения теплопроводности (2) можно получить для всех внутренних точек ($2 \leq p \leq N^k$; $k=1,2,\dots,M$) следующие соотношения

$$(\partial\theta^k/\partial\tau)_p = A^k_p \theta^k_{p-1} + B^k_p \theta^k_p + C^k_p \theta^k_{p+1} + \omega^k_p. \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} A^k_p &= (Fo^k)_p [(\mu_{11}^k)_p / \Delta^k - (\mu_1^k)_p / 2] / \Delta^k; \\ B^k_p &= -2(Fo^k)_p (\mu_{11}^k)_p / (\Delta^k)^2; \\ C^k_p &= (Fo^k)_p [(\mu_{11}^k)_p / \Delta^k + (\mu_1^k)_p / 2] / \Delta^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Если полученные уравнения теплопроводности (10) проинтегрировать на участке времени от t^n до t^{n+1} , то оно может быть записано в виде

$$(P^k_p)^{n+1} (\theta^k_{p-1})^{n+1} + (R^k_p)^{n+1} (\theta^k_p)^{n+1} + (S^k_p)^{n+1} (\theta^k_{p+1})^{n+1} = (\Omega^k_p)^{n+1}. \quad (12)$$

Для любого момента времени $\tau = n \Delta\tau$ ($n=0, 1, \dots$) введены обозначения

$$(P^k_p)^{n+1} = -z \Delta_{\tau} (A^k_p)^{n+1}, \quad (13)$$

$$(R^k_p)^{n+1} = 1 - z \Delta_{\tau} (B^k_p)^{n+1},$$

$$(S^k_p)^{n+1} = -z \Delta_{\tau} (C^k_p)^{n+1},$$

$$(\Omega^k_p)^{n+1} = z \Delta_{\tau} (\omega^k_p)^{n+1} + (1 - z \Delta_{\tau}) (A^k_p \theta^k_{p-1} + B^k_p \theta^k_p + C^k_p \theta^k_{p+1} + \omega^k_p)^n.$$

Здесь Δ_{τ} – шаг по времени, а z – параметр “неопределенности”, характеризующий используемую расчетную схему (“явная”, “неявная”).

Для каждого момента времени разностные уравнения (12) решаются методом прямой и обратной прогонки [5], обобщенной в [7] на многослойные конструкции.

На рис. 1. представлено распределение температуры в трехслойном цилиндре в различные моменты времени, вычисленное на базе разработанной конечно-разностной модели [7] при идеальном теплообмене между слоями и следующих граничных условиях на наружных поверхностях

$$\theta(t) = \begin{cases} A\tau & \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_1. \\ \text{при } \xi = r_0/r_L \\ \text{и } \theta_{,\xi} = 0 & \text{при } \xi = 1. \\ A\tau_1 & \text{при } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \end{cases}$$

На внутреннем радиусе $\xi = r_0/r_L$ температура линейно растет до момента времени τ_1 , затем она поддерживается постоянной в промежутке времени $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. На наружной поверхности цилиндра $\xi = 1$ ($r = r_L$) предполагается, что обмен с внешней средой запрещен, т.е. градиент температуры равен нулю, что отчетливо можно видеть на рис. 1.

РАСЧЕТНАЯ СХЕМА. УСТОЙЧИВОСТЬ

Расчетная схема определяется параметром z ($0 \leq z \leq 1$), входящим в уравнения (12) (см. обозначения (13)).

Если в разрешающих уравнениях (12) положить параметр z равным нулю, то они преобразуются в форму явной конечно-разностной схемы

$$(\theta^k_p)^{n+1} = (\Omega^k_p)^{n+1}. \quad (14)$$

Зависимости (14) позволяют непосредственно определить искомые значения температур $(\theta^k_p)^{n+1}$ в момент времени $\tau = (n+1)\Delta_{\tau}$ с помощью известного распределения температуры $(\theta^k_p)^n$ в предыдущий момент времени $\tau = n\Delta_{\tau}$. Действительно, правая часть уравнений (14) в соответствие с (13) определяется из равенства

$$(\Omega^k_p)^{n+1} = (\theta^k_p)^n + (A^k_p \theta^k_{p-1} + B^k_p \theta^k_p + C^k_p \theta^k_{p+1} + \omega^k_p)^n. \quad (15)$$

Привлекательная простота явной расчетной схемы упирается на ограничения при проведе-

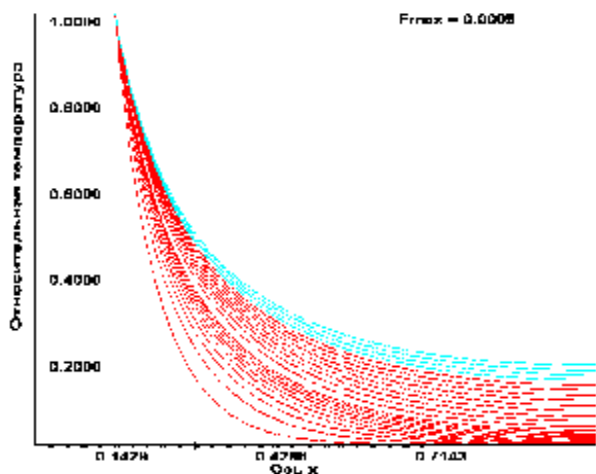


Рис. 1. Распределение температуры в трехслойном цилиндре на этапе повышения температуры на внутреннем радиусе (19 нижних линий) и при выдержке температурного воздействия (4 верхних линии)

нии непосредственных расчетов. Таким ограничением является устойчивость расчетной схемы. Анализ уравнений (15) показывает, что расчетная схема является устойчивой, если выполняется условие

$$1 + B_p^k = 1 - 2(Fo^k)_p (\mu_{11}^k)_p \Delta_\tau / (\Delta^k)^2 \geq 0$$

или

$$2(Fo^k)_p (\mu_{11}^k)_p \Delta_\tau / (\Delta^k)^2 \leq J_1 \quad (16)$$

Условие (16) согласуется с результатами оценки устойчивости решения, полученными в многочисленных исследованиях (см., например, [1] – [6] и др.).

Используя соотношение (16) и выбрав необходимую точность порядка аппроксимации, можно оценить требуемый шаг интегрирования по времени

$$\Delta_\tau \leq (\Delta^k)^2 / 2(Fo^k)_p (\mu_{11}^k)_p \quad (17)$$

Ниже в табл. 1 приведены расчетные значения критического интервала по времени $(\Delta_\tau)_{крит}$, полученные на основе соотношения (17) для обеспечения устойчивости решения в зависимости от размера сетки по пространственной координате Δ^k . В табл. 1 параметр d_1 характеризует отношение отброшенных слагаемых при дискретном представлении (9) по сравнению с сохраненными.

Из анализа результатов, приведенных в табл. 1, можно видеть, например, что для того, чтобы

точность аппроксимации (величина d_1) не превышала 1% (см. 5-ый столбец, 4-ая строка – выделено жирным шрифтом), необходимо иметь безразмерную величину пространственной сетки Δ^k менее $5.71 \cdot 10^{-3}$. В этих условиях шаг по времени Δ_τ не должен превосходить величины $0.458 \cdot 10^{-5}$. Полученные оценки $(\Delta_\tau)_{крит}$ были проверены непосредственными вычислениями. Как видно из этого анализа шаг по времени Δ_τ должен быть достаточно малым для обеспечения одной и той же точности решения. Это создаёт определенные неудобства, особенно, при изучении длительно протекающих температурных процессов. Действительно, для проведения вычислений одной и той же задачи, требующей исследования в течение одного и того же календарного времени, минимальное число циклов по времени N_τ в обсуждаемом случае составляет $6.55 \cdot 10^5$, вместо $1.0 \cdot 10^5$ по другой расчетной схеме. Таким образом, можно показать, что для обеспечения решения задачи с одной и той же точностью проведение вычислений по явной расчетной схеме требует значительных временных ресурсов.

Альтернативной расчетной схемой является неявная конечно-разностная схема, устойчивость которой обеспечивается при более слабых ограничениях (см., например, [3] – [5]). При использовании неявной расчетной схемы решают уравнения (12) при $0 < z \leq 1$, т. е. в этом случае на каждом временном шаге $n\Delta_\tau$ приходится решать систему алгебраических уравнений (12). В настоящих исследованиях система алгебраических уравнений (12) решается методом прямой и обратной прогонки [5]. В подавляющем большинстве проведенных ниже исследований параметр z принят равным 0.5, что соответствует неявной расчетной схеме Кранка–Николсона (см., например, [3]).

В работе [3] утверждается, что неявная расчетная схема является абсолютно устойчивой при $0.5 \leq z \leq 1$ и условно устойчивой при $0 < z < 0.5$. На рис. 2 приведены примеры расчетов, при выполнении которых не были учтены требования по обеспечению устойчивости решения.

Ниже путем проведения непосредственных вычислений для задачи с граничными условиями (4) установлены границы устойчивости при различных значениях параметра z ($0 < z < 0.5$;

Таблица 1.

Расчетные параметры	Значения расчетных параметров				
	15	20	30	50	60
Число узловых точек в слое N^k	15	20	30	50	60
Шаг по пространственной координате $(\Delta^k) \cdot 10^3$	19.5	14.3	9.52	5.71	4.76
Максимальное отношение производных $\delta_1 \cdot 10^2$	8.45	5.11	2.46	0.95	0.70
Критерий устойчивости $(\Delta_\tau)_{крит} \cdot 10^5$	5.09	2.86	1.27	0.458	0.318
Необходимое число шагов по времени $N_\tau \cdot 10^{-5}$	0.59	1.05	2.36	6.55	9.43

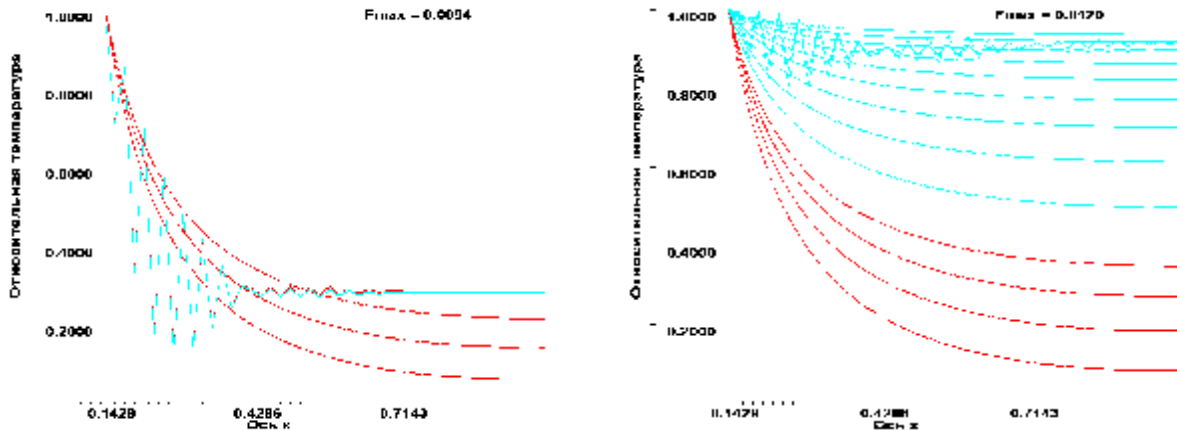


Рис. 2. Типичный характер численных решений при нарушении условия устойчивости

Таблица 2.

Расчетные параметры					
Число узловых точек в слое N^k	15	20	30	50	60
Шаг по пространственной координате $(\Delta^k) \cdot 10^3$	19.5	14.3	9.52	5.71	4.76
Максимальное отношение производных $\delta_1 \cdot 10^2$	8.45	5.11	2.46	0.95	0.70
$\Gamma \cdot (-1) \cdot 10^2$	6.79	9.7	4.4	1.07	1.01
Критерий устойчивости $(\Delta_t)_{\text{КРИТ}} \cdot 10^5$	6.0	3.47	1.47	0.56	0.387
Необходимое число шагов по времени $N_t \cdot 10^{-5}$	0.5	0.82	1.96	5.5	8.75
$\Gamma \cdot (-1)$	0.22	0.27	0.266	0.31	0.32
Критерий устойчивости $(\Delta_t)_{\text{КРИТ}} \cdot 10^5$	7.87	3.63	1.60	0.75	0.52
Необходимое число шагов по времени $N_t \cdot 10^{-5}$	0.46	0.79	1.81	4.9	7.77
$\Gamma \cdot (-1)$	0.57	0.69	0.70	0.64	0.74
Критерий устойчивости $(\Delta_t)_{\text{КРИТ}} \cdot 10^5$	11.3	6.67	3.07	0.78	0.55
Необходимое число шагов по времени $N_t \cdot 10^{-5}$	0.33	0.57	1.63	4.6	7.52
$\Gamma \cdot (-1)$	1.55	1.70	1.85	1.81	2.00
Критерий устойчивости $(\Delta_t)_{\text{КРИТ}} \cdot 10^5$	21.5	12.8	6.0	2.13	1.58
Необходимое число шагов по времени $N_t \cdot 10^{-5}$	0.25	0.43	1.31	3.12	6.01

см. табл. 2). В качестве критерия устойчивости используется параметр

$$\Gamma = 1 + V_p^k = 1 - 2(Fo^k)_p (\mu_{11}^k)_p \Delta_t / (\Delta^k)^2, \quad (18)$$

из которого затем определяется предельная величина шага по времени D_t при известных значениях других параметров.

Анализ результатов вычислений, приведенных в табл. 2, показывает, что с требованиями по повышению точности аппроксимации (N^k – увеличивается, Δ^k – уменьшается) снижается необходимая для обеспечения устойчивости решения длина шага по времени. При этом потребное для решения одной и той же задачи время увеличивается. Однако с ростом параметра z потребное время для решения одной и той же задачи снижается. Следует обратить внимание на то, что степень снижения числа шагов по времени с ростом параметра z снижается по мере увеличения

требований к точности расчетов.

В [10] отмечается, что использованный в настоящей работе способ доказательства сходимости решения, полученного на основе конечно-разностной модели (12), к точному решению дифференциального уравнения (2) путём проверки порядка аппроксимации и устойчивости носит общий характер.

ВЫВОДЫ

Впервые численно изучены проблемы, связанные с точностью аппроксимации дифференциальных уравнений конечно-разностной моделью и устойчивости решения.

Использованный здесь подход может найти широкое применение при выборе наиболее рациональных способов решения уравнений в частных производных методами дискретизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 стр.
2. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во ин. лит., 1960. 262 стр.
3. Рихтмайер Р., Нортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972. 418 с.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 стр.
5. Гельфанд И.М., Локуцкий О.В. Метод прогонки для решения разностных уравнений. В кн.: Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.
6. Годунов С.К., Рябенький С.К. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.
7. Рапилбекова Н.С. Термонапряженное состояние слоистых тел. Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ-мат наук, Алма-Ата, 1993. 290 стр.
8. Формалев В.Ф., Д.Л. Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 стр.
9. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982, 296 стр.
10. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики) - Киев: Вища школа, 1977. 408 стр.
11. Каримбаев Т.Д., Рапилбекова Н.С. – Численная оценка точности пространственной дискретизации уравнений теплопроводности – В печати, 2009 .

NUMERICAL ESTIMATION OF STABILITY OF HEAT CONDUCTIVITY DIFFERENCE EQUATIONS FOR LAYER MEDIUM

© 2009 K.D. Karimbaev¹, N.S. Rapilbekova²

¹ Central Institute Aviation Motors named after P.I. Baranov

² Tarazsky State Pedagogical Institute, Republic of Kazakhstan

The stability problem of heat conductivity difference equations at layer media is discussed. The estimation of stability accuracy is carried out on the basis of result analysis of heat conductivity numerical solution in depend on material characteristics and space cell size.

Keywords: Heat Conductivity, finite differences approximation, boundary value problem, stability, model of solution, perfect heat exchange, non perfect heat exchange, Fourier's parameter, Bio's parameter

Karimbaev Telman, Doctor of Technical Science, Professor,
Department Head.

E-mail: karimbayev@ciam.ru; bahit@ciam.ru

Rapilbekova Nagima, Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor.

E-mail: aidasher@mail.ru, ainura8921@mail.ru