

ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2009 К.Д. Каримбаев¹, Н.С. Рапилбекова²

¹ФГУП центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва

²Таразский государственный педагогический институт, Республика Казахстан

Поступила в редакцию 18.03.2009

На основе анализа результатов численного решения конечно-разностных уравнений теплопроводности для многослойных сред показано, что при дискретизации уравнений теплопроводности точности представления уравнений конечной разностью в граничных точках, как всего тела, так и на границе соседних слоёв на порядок меньше их точности во внутренних точках.

Ключевые слова: теплопроводность, конечно-разностная аппроксимация, идеальный теплообмен, неидеальный теплообмен, краевая задача, схема решения

Проблемы, связанные с точностью дискретизации задачи теплопроводности и устойчивости её решения, обсуждаются во многих исследованиях (см., например, [1] - [6] и другие). Однако в большей части выполненных работ рассматриваются линейные уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами применительно к первой краевой задаче. Ниже рассматривается третья краевая задача уравнений нестационарной теплопроводности с переменными коэффициентами для слоистого тела, т.е., по существу, решается нелинейная задача для неоднородной среды. Это обстоятельство требует дополнительного рассмотрения точности аппроксимации и устойчивости решения уравнений теплопроводности при применении конечно-разностного метода.

Результаты расчетов на основе дискретного представления зависят не только от теплофизических характеристик материала слоя, но и от выбора шага по пространственной переменной Δ^k , шага по времени Δ_t , принятой схемы (явная, неявная) решения (параметр z). Указанные параметры могут быть связаны с характером изменения теплофизических характеристик материала от искомой температуры. Представляется, что допустимые значения параметров Δ^k , Δ_t и z при малом изменении теплофизических характеристик материала и их сильном изменении могут заметно отличаться.

В [3] используются понятия глобального и локального порядка аппроксимации. При решении краевых задач или задач с начальными усло-

виями уравнений математической физики конечно-разностными методами приходится аппроксимировать производные, как во внутренних точках исследуемой области, так и на границах. При этом производные по отдельным переменным или производные во внутренних точках исследуемой области, а также производные в граничных точках могут иметь различный порядок аппроксимации.

Здесь на базе численного решения дана оценка точности пространственной аппроксимации, как во внутренних точках исследуемой области, так и в граничных точках области и слоёв.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Все последующие исследования проведены относительно безразмерной температуры θ^k в безразмерной пространственной координате ξ и безразмерном времени τ . Они введены с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \xi &= (r - L_0^1)/L^M, \tau = t / t^*, \\ \theta^k &= [T^k(r,t) - T_0^k(r)]/T^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r , t – пространственная координата и время; $T^k(r,t)$ – неизвестная температура, t^* и T^* – характерное время и характерная температура, $T_0^k(r)$ – начальное значение температуры; k – номер текущего слоя ($k = 1, 2, \dots, M$), L_0^k и L^k – начало и конец текущего слоя.

Уравнения теплопроводности в слоистой среде относительно безразмерных параметров записываются в виде [7]

$$\theta_{,\tau}^k = Fo^k (\mu_{11}^k \theta_{,\xi\xi}^k + \mu_1^k \theta_{,\xi}^k) + \omega^k, \quad (2)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mu_{11}^k &= \lambda^k / \lambda^*, \quad \mu_1^k = (\lambda^k / \lambda^*)_{,\xi} + n \mu_{11}^k / \xi; \\ \omega^k &= v^k + Q^k t^* / T^* \rho^k c_{\xi}^k; \\ Fo^k &= \lambda^* t^* / (L^*)^2 \rho^k c_{\xi}^k. \end{aligned} \quad (3)$$

Из приведенных обозначений можно видеть, что μ_{11}^k связан с коэффициентом теплопровод-

Каримбаев Тельман Джамалдинович, доктор технических наук, начальник отдела.

E-mail: karimbayev@ciam.ru, bahit@ciam.ru

Рапилбекова Нагима Сейсенбаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, старший преподаватель.

E-mail: aidasher@mail.ru, ainura8921@mail.ru

ности λ^k ; μ_1^k – параметр, связанный с изменениями теплопроводности, а также системой координат (прямоугольная $n=0$, цилиндрическая $n=1$, сферическая $n=3$); λ^* – характерная теплопроводность, ρ^k – плотность и c_e^k – удельная теплоёмкость материала k -го слоя, Q^k – внутренние источники тепла в k -ом слое, Fo^k – параметр Фурье [7]. Производная по соответствующей переменной обозначена нижним символом после запятой.

Граничные условия приняты в виде

$$\theta_{\xi}^1 = Bi_0^1 [\theta^1 - \varphi_0(\tau)] \text{ при } \xi = L^1/L^* \quad (4.a)$$

$$\theta_{\xi}^M = -Bi_L^M [\theta^M - \varphi_L(\tau)] \text{ при } \xi = 1. \quad (4.б)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tau) &= (T^1 - T_0^1)/T^*; \\ \varphi_L(\tau) &= (T^M - T_0^M)/T^*, \end{aligned} \quad (5)$$

а T_0^1, T_0^M – заданные температуры окружающей среды.

При переходе от k -ого слоя к $k+1$ -ому слою условия идеального теплообмена [7] принимаются в виде (1 Дж/к Дж М-1)

$$\begin{aligned} \theta_{\xi}^k &= (\mu_{11}^{k+1}/\mu_{11}^k) \theta_{\xi}^{k+1}; \\ \theta^k &= \theta^{k+1} \text{ при } \xi = L^k/L^*, \end{aligned} \quad (6)$$

а условия неидеального теплообмена –

$$\theta_{\xi}^k = -Bi_L^k (\theta^k - \theta^{k+1}) \text{ при } \xi = L^k/L^*; \quad (7.a)$$

$$\theta_{\xi}^{k+1} = Bi_0^{k+1} (\theta^{k+1} - \theta^k) \text{ при } \xi = L^{k+1}_0/L^*. \quad (7.б)$$

Всюду выше (см. (4) и (7)) введены обозначения: параметры Био Bi_0^{k+1} определяются из равенств

$$\begin{aligned} Bi_L^k &= \alpha_L^k L^*/\lambda^k; \\ Bi_0^k &= \alpha_0^k L^*/\lambda^k, \end{aligned} \quad (8)$$

где α_L^k и α_0^k – коэффициенты теплообмена.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Входящие в уравнения теплопроводности (2) производные от температуры по координате ξ представлены их разностным аналогом с точностью до малых второго порядка. При этом производные в любой внутренней узловой точке p ($2 \leq p \leq N^k$) представляются в виде

$$\begin{aligned} (\theta_{\xi}^k)_p &= (\theta_{p+1}^k - \theta_{p-1}^k) / 2\Delta^k; \\ (\theta_{\xi\xi}^k)_p &= (\theta_{p+1}^k + \theta_{p-1}^k - 2\theta_p^k) / (\Delta^k)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь Δ^k и N^k – длина отрезка и число отрезков, на которые разделена длина $L^k - L_0^k$ участка k -ого слоя.

После подстановки значений производных (9) в уравнения теплопроводности (2) можно получить для всех внутренних точек ($2 \leq p \leq N^k$; $k=1,2,\dots,M$) следующие соотношения

$$(\partial\theta^k/\partial\tau)_p = A_p^k \theta_{p-1}^k + B_p^k \theta_p^k + C_p^k \theta_{p+1}^k + \omega_p^k. \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} A_p^k &= (Fo^k)_p [(\mu_{11}^k)_p / \Delta^k - (\mu_1^k)_p / 2] / \Delta; \\ B_p^k &= -2(Fo^k)_p (\mu_{11}^k)_p / (\Delta^k)^2; \\ C_p^k &= (Fo^k)_p [(\mu_{11}^k)_p / \Delta^k + (\mu_1^k)_p / 2] / \Delta. \end{aligned} \quad (11)$$

Если полученные уравнения теплопроводности (10) проинтегрировать на участке времени

от τ^n до τ^{n+1} , то оно может быть записано в виде

$$(P_p^k)^{n+1} (\theta_p^k)^{n+1} + (R_p^k)^{n+1} (\theta_p^k)^{n+1} + (S_p^k)^{n+1} (\theta_{p+1}^k)^{n+1} = (\Omega_p^k)^n. \quad (12)$$

Для любого момента времени $\tau = n \Delta \tau$ ($n = 0, 1, \dots$) введены обозначения

$$\begin{aligned} (P_p^k)^{n+1} &= -z \Delta_{\tau} (A_p^k)^{n+1}; \\ (R_p^k)^{n+1} &= 1 - z \Delta_{\tau} (B_p^k)^{n+1}; \\ (S_p^k)^{n+1} &= -z \Delta_{\tau} (C_p^k)^{n+1}; \\ (\Omega_p^k)^{n+1} &= z \Delta_{\tau} (\omega_p^k)^{n+1} + (1 - z \Delta_{\tau}) (A_p^k \theta_{p-1}^k + B_p^k \theta_p^k + C_p^k \theta_{p+1}^k + \omega_p^k)^n. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь Δ_{τ} – шаг по времени, а z – параметр “неопределенности”, характеризующий используемую расчетную схему (“явная”, “неявная”).

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

Таким образом получена двухмерная (по пространственным точкам p и этапам по времени n) разрешающая система нелинейных разностных уравнений (12) задачи нестационарной теплопроводности. При этом производные в любой внутренней узловой точке p ($2 \leq p \leq N^k$) представляются в виде (9) со вторым порядком аппроксимации по пространственной координате ξ . Замена уравнений (10) уравнениями (12) осуществлена с первым порядком аппроксимации по временной координате τ . Можно заметить, что порядок аппроксимации по временной координате является одним и тем же – первым, как в начальной точке ($n = 1$), так и во всех других точках ($n > 1$). При этом по временной координате локальный порядок аппроксимации совпадает с глобальным порядком.

ВНУТРЕННИЕ ТОЧКИ

В конечно-разностной модели (12) производные по пространственной координате ξ дифференциальных уравнений (2) в любой внутренней узловой точке p ($2 \leq p \leq N^k$) представлены в конечном виде (9). Принятые выражения (9) являются приближенными и могут быть причиной несоответствия решения конечно-разностного уравнения (12) и исходного уравнения (2). Ниже проведены оценки погрешности аппроксимации соотношениями (9) производных, входящих в уравнения (2).

Соотношения (9) получены из представлений

$$\begin{aligned} [(\dots)_p^k]_{\xi} &= [(\dots)_p^k - (\dots)_{p-1}^k] / 2\Delta^k - \\ &- (1/3)[(\dots)_{\xi\xi\xi}^k]_p (\Delta^k)^2 + R_1(\Delta^k)^3 \quad (14) \\ [(\dots)_p^k]_{\xi\xi} &= [(\dots)_p^k - 2(\dots)_{p-1}^k + (\dots)_{p-2}^k] / (\Delta^k)^2 - \\ &- (1/12)[(\dots)_{\xi\xi\xi\xi}^k]_p (\Delta^k)^2 + R_2(\Delta^k)^4 \end{aligned}$$

В соотношениях (14) $R_1(\Delta^k)^3$ и $R_2(\Delta^k)^4$ являются остаточными слагаемыми в выражениях для первой и второй производной более высокого порядка малости.

Если в представлениях производной (14) вынести за скобки первое слагаемое, совпадающее с выражениями (9), то составляющие, отличающиеся (9) от (14), могут быть представлены в виде

$$\delta_{1p}^k = 2\Delta^k \{ (1/3)[(\dots)_{p+1}^k - (\dots)_p^k] (\Delta^k)^2 - R_1(\Delta^k)^3 \} / [(\dots)_{p+1}^k - (\dots)_p^k]; \quad (15)$$

$$\delta_{2p}^k = (\Delta^k)^2 \{ (1/12)[(\dots)_{p+1}^k - (\dots)_p^k] (\Delta^k)^2 - R_2(\Delta^k)^4 \} / [(\dots)_{p+1}^k - 2(\dots)_p^k + (\dots)_{p-1}^k]$$

Выражения δ_{1p}^k и δ_{2p}^k считаются малыми по сравнению с 1, что и позволяет использовать соотношения (9). Однако насколько они меньше единицы следует выяснить.

Ниже проведена оценка точности аппроксимации непосредственными вычислениями величин δ_{1p}^k и δ_{2p}^k . При проведении указанных оценок предполагается, что главным членом в представлениях (14), которые не учитывались в выражениях (9), являются слагаемые, содержащие третью производную. Третья производная находится из следующих выражений:

- во внутренних точках p ($3 \leq p \leq N^k - 1$)

$$[(\dots)_{p+2}^k] \approx [(\dots)_{p+2}^k - 2(\dots)_{p+1}^k + 2(\dots)_{p-1}^k - (\dots)_{p-2}^k] / 2(\Delta^k)^3 - R_3(\Delta^k)^2; \quad (16)$$

- в прилегающей к левой границе крайней внутренней точке $p = 2$

$$[(\dots)_{\xi\xi\xi}^k]_2 = [- (\dots)_4^k + 3(\dots)_3^k + (\dots)_1^k - 3(\dots)_2^k] / [\Delta^k]^3 + 0.5[(\dots)_{\xi\xi\xi}^k]_2 \Delta^k + R_3(\Delta^k)^2,$$

- в прилегающей к правой границе крайней внутренней точке $p = N^k$

$$[(\dots)_{\xi\xi\xi}^k]_p = [(\dots)_{p+1}^k - 3(\dots)_p^k + 3(\dots)_{p-1}^k - (\dots)_{p-2}^k] / [(\Delta^k)^3 + 0.5[(\dots)_{\xi\xi\xi}^k]_2 \Delta^k + R_3(\Delta^k)^2]$$

Если использовать представления (16), то главное слагаемое параметра точности δ_{1p}^k в выражении первой производной принимает вид

$$\delta_{1p}^k = [(\dots)_{p+2}^k - 2(\dots)_{p+1}^k + 2(\dots)_{p-1}^k - (\dots)_{p-2}^k] / [(\dots)_{p+1}^k - (\dots)_{p-1}^k] \quad (17.a)$$

для внутренних точек p ($3 \leq p \leq N^k - 1$),

$$\delta_{1p}^k = [- (\dots)_4^k + 3(\dots)_3^k + (\dots)_1^k - 3(\dots)_2^k] / [(\dots)_{p+1}^k - (\dots)_{p-1}^k] \quad (17.б)$$

для прилегающей к левой границе крайней внутренней точке $p = 2$ и

$$\delta_{1p}^k = [(\dots)_{p+1}^k - 3(\dots)_p^k + 3(\dots)_{p-1}^k - (\dots)_{p-2}^k] / [(\dots)_{p+1}^k - (\dots)_{p-1}^k] \quad (17.в)$$

для прилегающей к правой границе крайней внутренней точке $p = N^k$.

Справедливость утверждения, что приведенные выражения (17) для δ_{1p}^k малы по сравнению с 1, не очевидна. В связи с этим была проведена оценка точности аппроксимации (9) численным сравнением отношения производных третьего и первого порядка по формулам (17) во всех внутренних точках p ($2 \leq p \leq N^k$) многослойного тела.

На рис. 1. представлено распределение температуры в трехслойном цилиндре в различные моменты времени, вычисленное на базе разработанной конечно-разностной модели [7] при

следующих граничных условиях

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \text{А}\tau & \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ \text{при } \xi = r_0/r_L \text{ и } \theta_{,\xi} = 0 & \text{при } \xi = 1. \\ \text{А}\tau_1 & \text{при } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \end{cases} \quad (18)$$

На внутреннем радиусе $\xi = r_0/r_L$ температура линейно растет до момента времени t_1 , затем она поддерживается постоянной в течение промежутка времени $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. На наружной поверхности цилиндра $\xi = 1$ ($r = r_L$) предполагается, что обмен с внешней средой запрещен, т.е. градиент температуры равен нулю.

Здесь же на рис. 1.б приведена зависимость отношения производных температуры третьего и первого порядков для внутренних точек многослойного цилиндра, вычисленные по формулам (17). Прежде всего, можно видеть, что максимальное значение этого отношения составляет 0,0099 (в правом верхнем углу рисунка 1 приведено его значение f_{\max}). Обращает внимание, что наибольшие значения это отношение δ_{1p}^k принимает вблизи граничных точек. Это означает, что условие “хорошей” аппроксимации $\delta_{1p}^k \ll 1$ может выполняться во внутренних точках исследуемой области и нарушаться в граничных. Поэтому важно обеспечить хорошую аппроксимацию, в том числе, в граничных точках.

В табл. 1 приведена полученная непосредственными вычислениями зависимость отношения производных δ_{1p}^k от величины Δ^k , которая характеризует густоту расположения узловых точек. Можно видеть, что с увеличением числа узловых точек N^k , что равносильно уменьшению шага по пространственной координате Δ^k , отношение производных δ_{1p}^k уменьшается (см. пятую строку). Этот результат свидетельствует о том, что точность аппроксимации (9) с ростом числа узловых точек повышается и решение, построенное в [7] на основе конечно-разностной модели, приближается к решению дифференциального уравнения (2).

Полученный численный результат на частном примере имеет общую закономерность. Эта закономерность может быть установлена на основе нижеследующих рассуждений. С целью выявления указанной закономерности выражения (17) для отношения производных третьего и первого порядка необходимо переписать в виде отношения производных первого порядка

$$\delta_{1p} = [(\theta_{,\xi})_{p+1.5} - 2(\theta_{,\xi})_p + (\theta_{,\xi})_{p-1.5}] / 2(\theta_{,\xi})_p \quad (19.a)$$

для внутренних точек p ($3 \leq p \leq N^k - 1$)

$$\delta_{1p} = [- (\theta_{,\xi})_{3.5} + 2(\theta_{,\xi})_{2.5} - (\theta_{,\xi})_{1.5}] / 2(\theta_{,\xi})_2 \quad (19.б)$$

для прилегающей к левой границе крайней внутренней точке $p = 2$ и

$$\delta_{1p} = [(\theta_{,\xi})_{p+0.5} - 2(\theta_{,\xi})_{p-0.5} + (\theta_{,\xi})_{p-1.5}] / 2(\theta_{,\xi})_p \quad (19.в)$$

для прилегающей к правой границе крайней внутренней точке $p = N^k$.

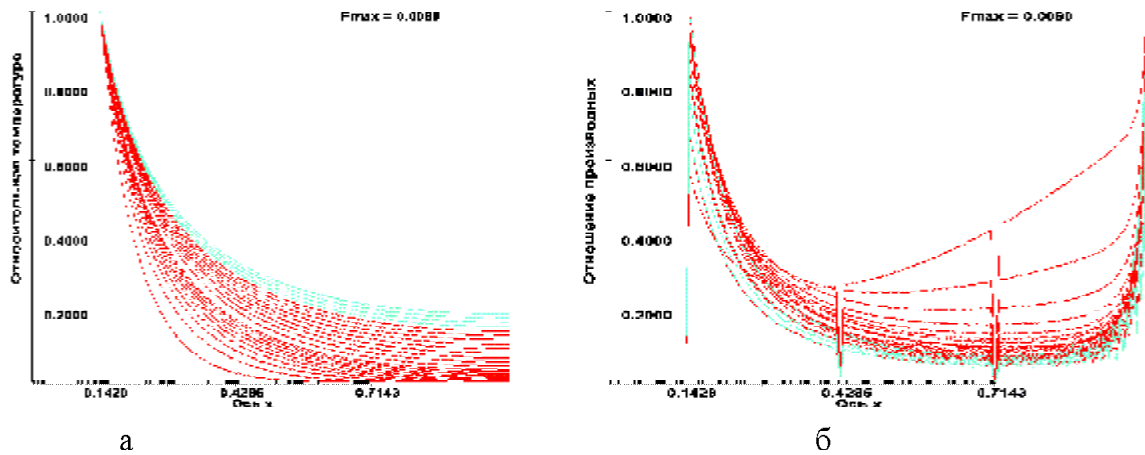


Рис. 1. Распределение температуры (а) и зависимость отношения производных температуры третьего и первого порядка (б) в трехслойном цилиндре на этапе повышения температуры на внутреннем радиусе и при выдержке температурного воздействия

Таблица 1. Зависимость отношения производных δ_1^k от величины Δ^k

Шаг по времени $\Delta_t \cdot 10^5$	1.33				
Число узловых точек в слое N^k	30	45	60	75	90
Шаг по пространственной координате $(\Delta^k) \cdot 10^3$	9.52	6.35	4.76	3.81	3.17
Отношение $\Delta_t / (\Delta^k)^2$	0.147	0.331	0.588	0.919	1.32
Максимальное отношение производных $\delta_1 \cdot 10^2$	4.11	2.64	1.27	0.89	0.67
Максимальное отношение производных $\delta_2 \cdot 10^2$ с учетом граничных условий	75.97	25.64	14.89	9.69	6.79

При записи выражений (19) введены дополнительные узловые точки, а шаг по пространственной координате Δ^k уменьшен вдвое. Например, узловая точка $p + 1.5$ находится между узловыми точками $p + 1$ и $p + 2$.

Анализ соотношений (19) показывает, что с увеличением числа точек разбиения N^k все производные первого порядка приближаются к производной в исследуемой точке p . В числителе приведенных соотношений (19) стоят разности значений этих производных. Поэтому при N^k , стремящемся к бесконечности, указанные разности стремятся к нулю, в то время, как знаменатель принимает значение производной в узловой точке p . Этим объясняется эффект, приведенный в 5-ой строке таблицы 1 и установленный при решении частной задачи.

ГРАНИЧНЫЕ ТОЧКИ

В практике инженерных расчетов температурных задач конечно-разностным методом нередко используют второй порядок аппроксимации по пространственной координате ξ во внутренних точках ($2 \leq p \leq M$) и первый порядок аппроксимации производных в граничных точках. В этих случаях глобальный порядок аппроксимации первый, несмотря на то, что в большей

части узловых точек локальный порядок аппроксимации равен двум.

При решении второй и третьей краевых задач нестационарной теплопроводности, а также при изучении температурных состояний слоистых сред в граничные условия (4), (6) и (7) входят производные первого порядка. Если для рассматриваемых многослойных тел использовать обсуждаемый широко распространенный подход, то первый порядок аппроксимации имел бы место во всех узловых точках, являющихся границей контакта соседних слоёв. Именно по этой причине на наружных поверхностях исследуемого тела, а также на поверхностях контакта соседних слоёв для аппроксимации производных используются соотношения ($k = 1, 2, \dots, M$)

$$(\theta^k_{\xi})_1 = (4\theta^k_2 - \theta^k_3 - 3\theta^k_1) / 2\Delta^k; \tag{20.a}$$

$$(\theta^k_{\xi})_{N^k+1} = -(4\theta^k_{N^k} - \theta^k_{N^k-1} - 3\theta^k_{N^k+1}) / 2\Delta^k. \tag{20.б}$$

Производные в этих точках с точностью до малых второго порядка могут быть представлены в виде (20), которые обеспечивают второй порядок аппроксимации. Этим достигается то, что глобальный порядок и локальные порядки аппроксимации становятся одинаковыми. В работе [3] предложен несколько другой способ вычисления производных, обеспечивающий второй порядок аппроксимации по пространственной координате.

Принятые выражения (20) являются приближенными и могут быть причиной несоответствия конечно-разностных представлений (20) исходным граничным условиям (4), (6) и (7). Оценки погрешности аппроксимации соотношениями (20) производных, входящих в граничные условия (4), (6) и (7), могут быть выполнены таким же путём, каким они были выполнены для внутренних точек.

Соотношения (20) получены из представлений

$$[(\dots)_{\xi_1}^k] = [4(\dots)_2^k - (\dots)_3^k - 3(\dots)_1^k] / 2\Delta^k + (1/3)[(\dots)_{\xi_1}^k] (\Delta^k)^2 + (1/4)[(\dots)_{\xi_1}^k] (\Delta^k)^3; \quad (21.a)$$

$$[(\dots)_{\xi_p}^k] = - [4(\dots)_{p-1}^k - (\dots)_{p-2}^k - 3(\dots)_p^k] / 2\Delta^k + (1/3) [(\dots)_{\xi_p}^k] (\Delta^k)^2 - (1/4) [(\dots)_{\xi_p}^k] (\Delta^k)^3; \quad p = N^k + 1 \quad (21.б)$$

Для последующего анализа равенства (21) удобно записать в виде

$$[(\dots)_{\xi_1}^k] = (1 + \delta_1^k) [4(\dots)_2^k - (\dots)_3^k - 3(\dots)_1^k] / 2\Delta^k \quad (22.a)$$

$$[(\dots)_{\xi_p}^k] = - (1 + \delta_2^k) [4(\dots)_{p-1}^k - (\dots)_{p-2}^k - 3(\dots)_p^k] / 2\Delta^k; \quad p = N^k + 1, \quad (22.б)$$

в которых введены обозначения

$$\delta_1^k = 2\Delta^k \{ (1/3)[(\dots)_{\xi_1}^k] (\Delta^k)^2 + (1/4)[(\dots)_{\xi_1}^k] \times (\Delta^k)^3 \} / [4(\dots)_2^k - (\dots)_3^k - 3(\dots)_1^k];$$

$$\delta_2^k = 2\Delta^k \{ (1/3)[(\dots)_{\xi_p}^k] (\Delta^k)^2 - (1/4)[(\dots)_{\xi_p}^k] \times (\Delta^k)^3 \} / [4(\dots)_{p-1}^k - (\dots)_{p-2}^k - 3(\dots)_p^k]; \quad p = N^k + 1. \quad (23)$$

Если параметры δ_1^k и δ_2^k малы по сравнению с 1, то аппроксимации (20) могут считаться приемлемыми.

Производные третьего порядка, входящие в равенства (23) вычисляются из равенств

$$[(\dots)_{\xi_1}^k] = [3(\dots)_2^k - 3(\dots)_3^k + (\dots)_4^k - (\dots)_1^k] / (\Delta^k)^3 - (3/2)[(\dots)_{\xi_1}^k] \Delta^k;$$

$$[(\dots)_{\xi_p}^k] (\Delta^k)^3 = -3(\dots)_{p-1}^k + 3(\dots)_{p-2}^k - (\dots)_{p-3}^k + (\dots)_p^k + (4/3)[(\dots)_{\xi_p}^k] (\Delta^k)^4; \quad (24)$$

Используя представления (24), главное слагаемое параметра точности δ_p^k в выражении первой производной принимает вид

$$\delta_1^k = [3(\dots)_2^k - 3(\dots)_3^k + (\dots)_4^k - (\dots)_1^k] / [4(\dots)_2^k - (\dots)_3^k - 3(\dots)_1^k] \quad (25a)$$

для первой точки слоя k (1, 2, ..., M) и

$$\delta_2^k = [-3(\dots)_{p-1}^k + 3(\dots)_{p-2}^k - (\dots)_{p-3}^k + (\dots)_p^k] / [4(\dots)_{p-1}^k - (\dots)_{p-2}^k - 3(\dots)_p^k] \quad (25.б)$$

для последней узловой точки $p = N^k + 1$ k -ого слоя.

Были проведены численные исследования точности аппроксимации производных в граничных точках в совокупности с внутренними точками точно так, как это было выполнено для внутренних точек.

Анализ показал, что выполнение заданных условий, в которых в граничной точке производные равны нулю ($\theta_{,\xi} = 0$, см. соотношение (18)), может привести к большим погрешностям. По крайней мере, из приведенных равенств (25)

ясно, что в таких точках, если отношение разности производных к самой производной равно нулю, т.е. разность производных является малой более высокого порядка, чем сама производная при уменьшении D^k , то дискретизация в них законна. В противном случае такие точки должны быть исключены из рассмотрения. При численном решении задачи (18), благодаря условию $\theta_{,\xi} = 0$ на границе $\xi = 1$, в этой точке параметр δ_1^k не вычислялся.

При достаточно гладком изменении теплофизических характеристик от слоя к слою на границе раздела слоёв не возникает дополнительных проблем, связанных с точностью аппроксимации в точках перехода от слоя к слою. Этот случай практически совпадает с тем, что приведено на рис. 1. Проблемы с точностью аппроксимации производных на граничных контактных поверхностях возникают при заметном отличии теплофизических характеристик в отдельных слоях. Это можно видеть из результатов расчетов для трехслойного тела, в котором коэффициент теплопроводности второго слоя на порядок меньше коэффициентов теплопроводности соседних (первого и третьего) слоёв. На рис. 2 приведены результаты вычислений, выполненные для такого трехслойного цилиндра. Следует заметить, что остальные параметры совпадают с теми, которые использовались при получении результатов, приведенных на рис. 1. Прежде всего, следует отметить, что максимальное значение параметра d^k достигается как на наружной поверхности первого слоя, так и границах перехода от слоя к слою. При этом в последних точках слоя точность аппроксимации ниже ($\delta_2^k > \delta_1^k$), чем в первых. Если для внутренних точек максимальное значение точности аппроксимации δ^k составляло 0,0099 (см. рис. 1.б), то с учетом граничных точек параметр точности аппроксимации (δ_2^k) составляет всего 0.1107. Это означает, что точность аппроксимации в граничных точках в одиннадцать раз хуже, чем во внутренних точках. В табл. 1 в последней строчке приведены значения точности аппроксимации в граничных точках δ_2^k в зависимости от числа узловых точек. Тенденция повышения точности аппроксимации производных с увеличением числа узловых точек налицо. Однако точность аппроксимации с учетом граничных точек даже при принятой форме дискретизации производных (20) на порядок хуже, чем во внутренних точках.

То обстоятельство, что с увеличением числа узловых точек отношение производных третьего и первого порядка уменьшается и в граничных точках можно обосновать точно так же, как это было сделано для внутренних точек. В самом

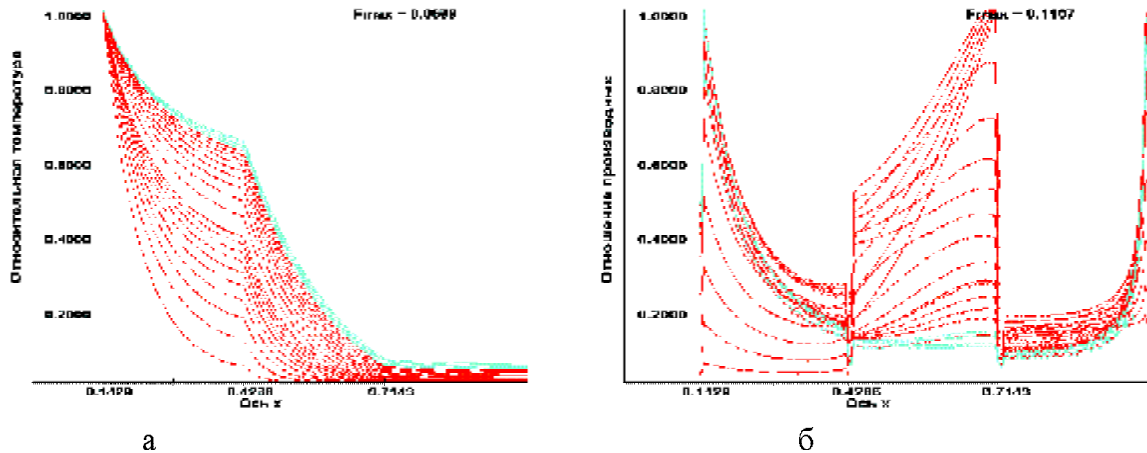


Рис. 2. Распределение температуры (а) и зависимость отношения производных температуры третьего и первого порядка (б) в трехслойном цилиндре с низким коэффициентом теплопроводности во втором слое на этапе повышения температуры на внутреннем радиусе и при выдержке температурного воздействия

деле, соотношения (25) можно записать в виде

$$\delta_1^k = [(\theta_{\xi}^k)_{3.5} - 2(\theta_{\xi}^k)_{2.5} + (\theta_{\xi}^k)_{1.5}] / (\theta_{\xi}^k)_1 \quad (26.a)$$

для первой точки слоя k (1, 2, ..., M) и

$$\delta_2^k = [- (\theta_{\xi}^k)_{Nk-1.5} + 2(\theta_{\xi}^k)_{Nk-0.5} - (\theta_{\xi}^k)_{Nk+0.5}] / (\theta_{\xi}^k)_{Nk+1} \quad (26.б)$$

для последней точки слоя k (1, 2, ..., M).

Из приведенных соотношений (26) можно видеть, что их числитель как разность производных первого порядка стремится к нулю при приближении узловых точек к граничной точке. В равенствах (26) предполагается, что производная в граничной точке отлична от нуля.

ВЫВОДЫ

Для обеспечения точности результатов численных расчетов, выполняемых с применением конечного разностного представления дифференциальных уравнений, порядок точности дискретизации в граничных точках не должен быть ниже порядка точности дискретизации во внутренних точках. Более того, порядок точности

дискретизации в граничных точках, а не во внутренних, определяет точность конечно-разностной схемы решения нестационарных задач теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.
3. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
4. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.
5. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатко А.А. Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики). Киев, Вища школа, 1977. 408 с.
6. Рихтмайер Р.Д. Разностные методы решения краевых задач. М.: Изд-во ин. лит., 1960, 262 с.
7. Рапилбекова Н.С. Термонапряженное состояние слоистых тел. Дисс...канд. физ-мат. наук. Алма-Ата, 1993. 290 с.

NUMERICAL ESTIMATION OF ACCURACY AT SPACE DISCRETATION OF HEAT CONDUCTIVITY EQUATIONS

© 2009 K.D. Karimbaev¹, N.S. Rapilbekova²

¹ Central Institute Aviation Motors named after P.I. Baranov, Moscow

² Tarazsky State Pedagogical Institute, Republic of Kazakhstan

On the basis of result analysis of numerical solution of heat conductivity difference equations for layer medium it is shown, the accuracy difference equations at boundary points as on boundary body both and on laminate boundary is low on the order of accuracy on inside points.

Keywords: heat conductivity, finite differences approximation, perfect heat exchange, non perfect heat exchange, boundary value problem, model of solution.

Telman Karimbaev, Doctor of Technical Science, Professor, Department Head.

E-mail: karimbayev@ciam.ru; bahit@ciam.ru

Nagima Rapilbekova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor.

E-mail: aidasher@mail.ru, ainura8921@mail.ru