

ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ МИКРОУСКОРЕНИЙ: ФИЗИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

©2009 А.В. Седельников, А.А. Серпухова

Институт энергетики и транспорта
Самарского государственного аэрокосмического университета

Поступила в редакцию 31.10.2008

В работе рассмотрен физический аспект построения фрактальной модели микроускорений. В качестве функциональной зависимости используется функция Вейерштрасса-Мандельброта. Дана качественная трактовка параметров функции, проведен статистический анализ.

Ключевые слова: фрактальная модель микроускорений, функция Вейерштрасса-Мандельброта, статистический анализ.

При использовании фрактальной модели микроускорений [1, 2] важно грамотно построить схему и адекватно интерпретировать результаты оценки. Построенная с помощью действительной части функции Вейерштрасса-Мандельброта при тождественно нулевой фазе (ФВМ), модель позволяет оценивать модуль квазистатической компоненты микроускорений, заложенной в конструктивно-компоновочную схему (ККС) космического аппарата (КА) с целью ее оптимизации с точки зрения желаемого уровня микроускорений внутри рабочей зоны технологического оборудования на этапе проектирования КА. Модель [1, 2] соответствует следующей физически реальной картине:

- 1) ККС КА должна включать в себя большие упругие элементы;
- 2) рассматривается поле микроускорений, порождаемое колебанием больших упругих элементов КА после срабатывания управляющих ракетных двигателей системы ориентации КА (УРД);
- 3) не учитывается демпфирование колебаний амплитуды микроускорений во времени;
- 4) не учитывается случайное влияние начальных значений параметров движения КА на величину микроускорений.

Первый пункт связан с тем, что реальный космический мини-завод должен быть достаточно энерговооруженным, для того чтобы проводить длительные эксперименты в условиях автономного полета. На данном уровне развития аэрокосмической техники конструктивным решением этой проблемы являются панели солнечных батарей (ПСБ), которые питают электроэнергией все системы КА, а также технологическое

оборудование. Существует серия КА “Фотон”, разрабатываемых и изготавливаемых ФГУП “Государственный научно-производственный ракетно-космический центр “ЦСКБ – Прогресс” (г. Самара), лишенных больших упругих элементов. На этих аппаратах проводились многочисленные эксперименты, и исследовался уровень микроускорений [3, 4]. Однако срок активного существования КА этой серии не превышает 18 суток, что не позволяет рассматривать данный класс КА как мини-заводы. Не случайно в том же ЦСКБ - Прогресс разрабатывался технологический КА “Ника-Т1” с тремя большими упругими элементами и сроком активного существования до 120 суток. РКК “Энергия” (г. Королев) в настоящее время проектирует аналогичного назначения КА “Ока-Т” с двумя большими упругими элементами. Данный КА планируется запускать с МКС, а затем возвращать результаты технологических экспериментов обратно на станцию.

Таким образом, данное ограничение не позволяет провести адекватную оценку микроускорений на КА серии “Фотон” и др. аппаратах, лишенных больших упругих элементов, однако, не является существенным при оценке микроускорений для КА технологического назначения.

Второй пункт обусловлен тем, что для эффективного энергообеспечения технологического процесса необходима ориентация ПСБ на Солнце. Например, для КА “Ника-Т1” требовалось, чтобы косинус угла между направлением на Солнце и нормалью к ПСБ был не менее 0,9. К сожалению, пассивная ориентация КА имеет ограничения, поэтому необходимо использовать УРД. Срабатывание УРД позволяет, с одной стороны, “разгрузить” кинетический момент гиродина системы пассивной ориентации, с другой, – обеспечить нужную ориентацию ПСБ. Однако для успешного протекания гравитационно чув-

Седельников Андрей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент.

*Серпухова Анастасия Андреевна, аспирант.
E-mail: axe_backdraft@inbox.ru.*

ствительных процессов недопустимо не только срабатывание УРД во время процесса, но и те вибрации, которые порождают колебания ПСБ и других больших упругих элементов, вызванных этим срабатыванием.

Исследования показывают, что сильнее, чем при срабатывании УРД, модуль микроускорений бывает только при работе маршевых двигателей в режиме корректировке орбиты КА [5, 6]. Вообще говоря, из-за того, что при длительном автономном полете мини-завода необходима его активная ориентация, имеет смысл говорить о микроускорениях, заложенных в ККС КА, а также строить модель их оценки и влиять на саму ККС с целью их минимизации.

Таким образом, можно утверждать, что срабатывание УРД и вызванные этим срабатыванием колебания больших упругих элементов – основной источник, порождающий поле микроускорений во внутреннем пространстве КА.

Третий пункт, несомненно, является слабым местом модели, однако, если речь идет о квазистатической компоненте микроускорений, то ее демпфированием за время, соизмеримое со временем проведения технологического процесса, можно пренебречь практически без потерь точности в оценке [3, 7].

Четвертый пункт показывает, какие именно микроускорения оцениваются моделью. Это та часть микроускорений, которыми можно управлять, оптимизируя ККС КА при проектировании технологического аппарата. Случайная компонента, возникающая из-за аэродинамического сопротивления, солнечного давления, влияния микрометеоритов и техногенных частиц и др., а также обусловленная начальными значениями параметров движения КА, прежде всего, вокруг центра масс, выходит за границы модели.

Однако современные требования к мини-заводам (для “Ока-Т” планируется создать режим гравитационного штиля на уровне $10^{-7} g$) показывают, что для таких КА недостаточно заложить низкий уровень микроускорений в конструкцию, т.к. реальные значения модуля, возможно, будут определяться именно случайной компонентой микроускорений.

В обозначенной выше постановке задачи можно дать физическую трактовку параметров ФВМ [8]:

$$\operatorname{Re} W(t) = C(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1 - \cos(b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (1)$$

Заложенные в ККС микроускорения будут определяться:

- моментом УРД;
- инерционно-массовыми характеристиками больших упругих элементов КА.

Момент УРД определяет модуль микроускорений, причем, как показывают исследования [9], достаточно учесть касательную составляющую микроускорений, пренебрегая нормальной.

Характеристики упругих элементов показывают, какая часть энергии УРД перейдет в их колебания. В работе [8] фрактальная размерность ФВМ (1) D интерпретирована как момент УРД, а масштабный параметр b – как массовая доля больших упругих элементов в общей массе КА.

В этой связи возникают интересные физические аспекты, требующие подробного исследования. В данной работе будет рассмотрено два таких аспекта. Первый из них связан с тем, что при моделировании зависимости среднего значения микроускорений от момента УРД все эти зависимости проходят через начало координат. Следует иметь в виду, что фрактальная размерность ФВМ изменяется в пределах: $1 < D < 2$, поэтому полной аналогии получено быть не может. Пересечение возможно в некоторой другой точке $(D_0; 0)$, а само значение D_0 будет соответствовать при моделировании нулевому моменту УРД.

Задача сводится к проверке сходимости корреляционных зависимостей рис. 1 в некоторой окрестности, размер которой определяет точность выполнения гипотезы о пересечении, т.е. уровень ее значимости.

Сначала подберем функциональные зависимости, наилучшим образом описывающие корреляционные рис. 1. Анализ показывает, что с большой точностью можно принять в качестве функциональных зависимостей прямые линии. При этом объясняется более 99,9% всей дисперсии (рис. 2).

Для подтверждения правильности аппроксимации истинные результаты среднего значения ФВМ (по выборке в 1000 точек) и полученные с помощью линейной аппроксимации проверим на соответствие критерием согласия χ^2 -Пирсона [10] (рис. 3).

Критическая статистика для 5%-го уровня значимости составляет $\chi_{кр}^2 = 15,5073$ [10] и не указана на рис. 3 в силу малости наблюдаемых значений критерия согласия. Таким образом, гипотезу о том, что корреляционные зависимости рис. 1 являются прямыми линиями можно уверенно принять на 5%-м уровне значимости.

Далее, продолжая влево подобранные функциональные зависимости, соответствующие корреляционным рис. 1, и минимизируя сумму квадратов отклонений смоделированного среднего значения ФВМ от нуля с помощью метода наименьших квадратов (МНК), получаем, что при значении фрактальной размерности $D = 1,92457$ эта сумма минимальна.

Рассмотрим величину, составленную из среднего значения ФВМ при различных значениях

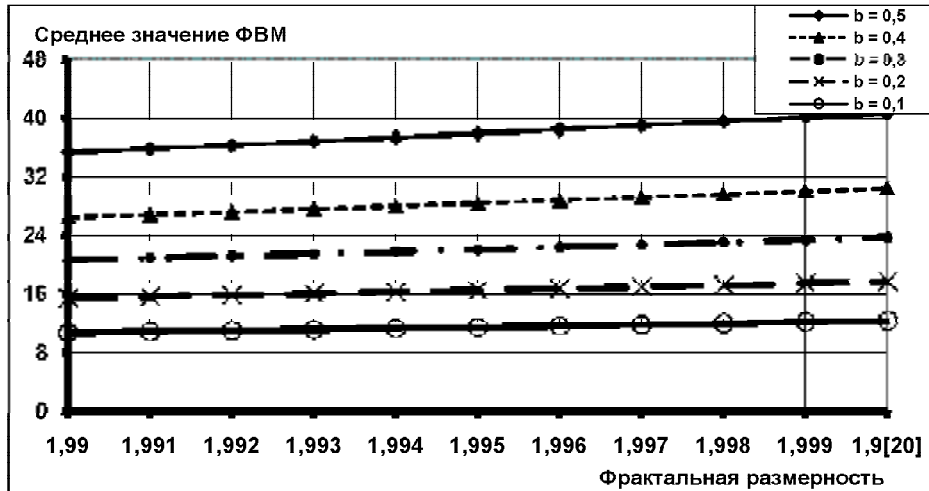


Рис. 1. Зависимость среднего значения ФВМ от ее фрактальной размерности при различных значениях масштабного параметра (здесь и далее число в квадратных скобках означает число девяток после запятой)

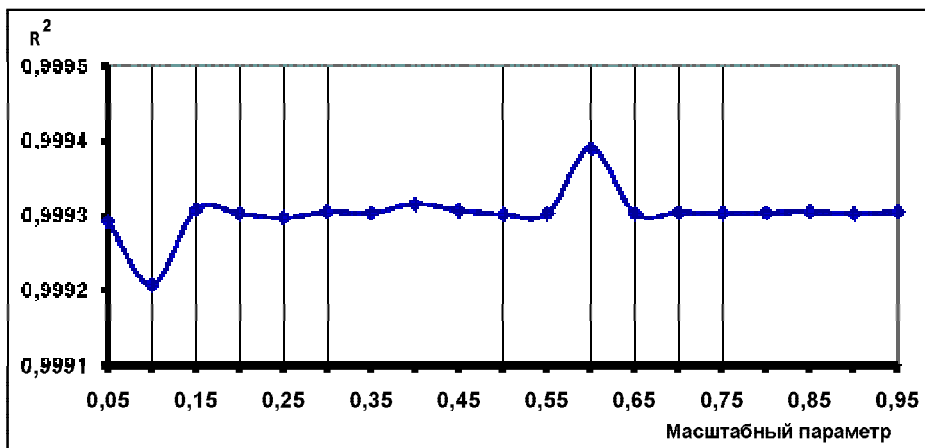


Рис. 2. Зависимость коэффициента детерминации от масштабного параметра ФВМ при аппроксимации корреляционных зависимостей (рис. 1) прямыми линиями

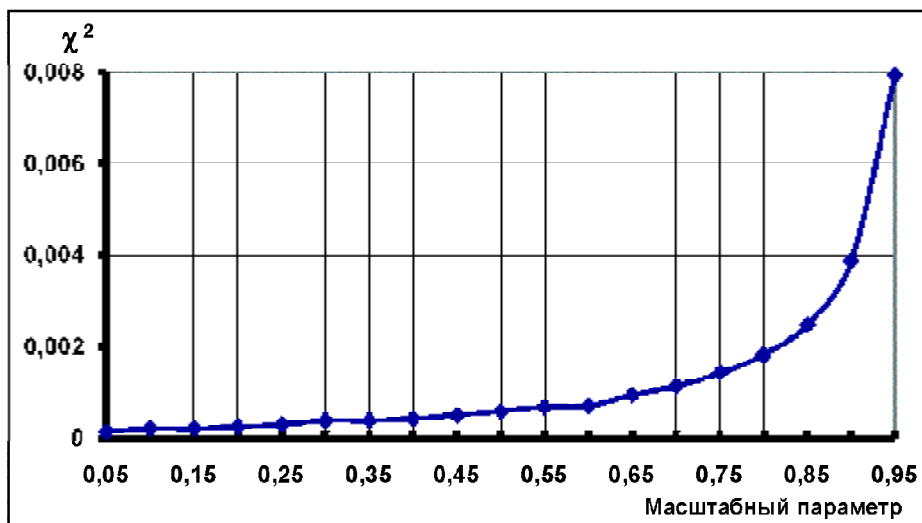


Рис. 3. Наблюдаемое значение критерия согласия χ^2 -Пирсона в зависимости от масштабного параметра ФВМ

масштабного параметра b и $D = 1,92457$. Она соответствует ошибке при проверке гипотезы о пересечении функциональных зависимостей в

одной точке и определяет ту окрестность, в которой эти зависимости проходят вблизи точки $(D_0; 0)$ (рис. 4).

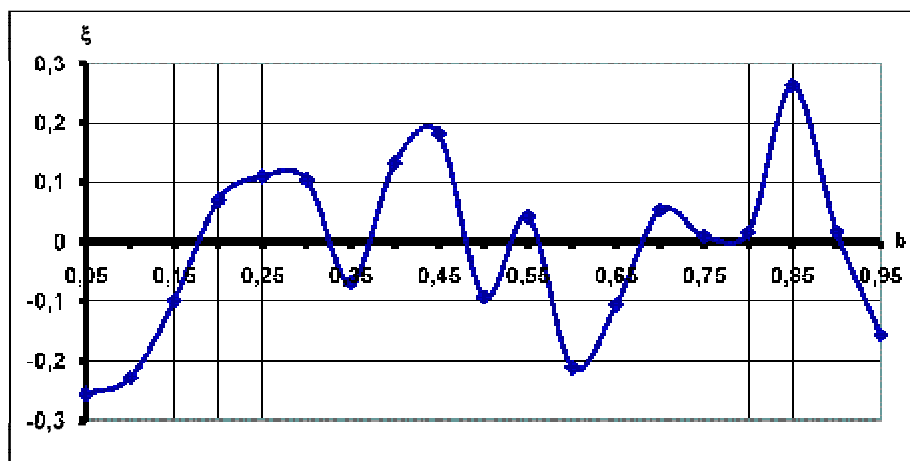


Рис. 4. Зависимость смоделированного среднего значения ФВМ от масштабного параметра при $D = 1,92457$

Сравнение этой величины с абсолютным значением ФВМ, показывает, что максимальное отличие составляет менее 3% (рис. 5).

Для подтверждения незначимости отклонений ФВМ от нуля в точке $D = 1,92457$ проведем статистический анализ. Проверка закона распределения $\xi(b)$ на нормальность с помощью критерия Шапиро-Уилка, который является самым мощным из всех известных [10], показывает, что эта величина имеет нормальный закон распределения. Наблюдаемое значение критерия для выборки в 20 точек $T_{20}^n = 0,930$ при критической статистике для 5%-го уровня значимости $T_{0,05}^{kp}(20) = 0,905$, т.к. $T_{20}^n > T_{0,05}^{kp}$ гипотеза о нормальности принимается на 5%-м уровне значимости [10].

Согласно выборке в 20 точек, среднее значение: $\bar{\xi}(b) = -0,0113$, а выборочная дисперсия: $\sigma^2 = 0,020659$. Проверим, значимо ли среднее значение отличается от нуля на 5%-м уровне значимости. Т.к. проверка гипотезы о нормальности закона распределения дала положительные

результаты, при проверке гипотезы о незначимости отклонения воспользуемся классическим критерием максимального правдоподобия [10]:

$$\gamma^n = \frac{|\bar{x} - x_0| \sqrt{n}}{\sigma}$$

Для рассматриваемой выборки $\gamma^n = 0,3516$. Критическая статистика для 5%-го уровня составляет $\gamma_{0,05}^{kp} = 1,2816$, поэтому гипотеза о незначимости уверенно принимается на 5%-м уровне значимости.

Таким образом, имеем следующие результаты: среднее значение $\xi(b)$ равно нулю, а закон распределения – нормальный. Следовательно, можно сделать вывод о том, что рассматриваемая величина представляет собой ошибку, связанную с двумя приближениями: ошибкой аппроксимации корреляционных зависимостей рис. 1 прямыми линиями и ошибкой оценки истинных средних значений ФВМ по выборке в 1000 точек, но не противоречит гипотезе о пересечении функциональных зависимостей в одной точке $(D_0; 0)$.

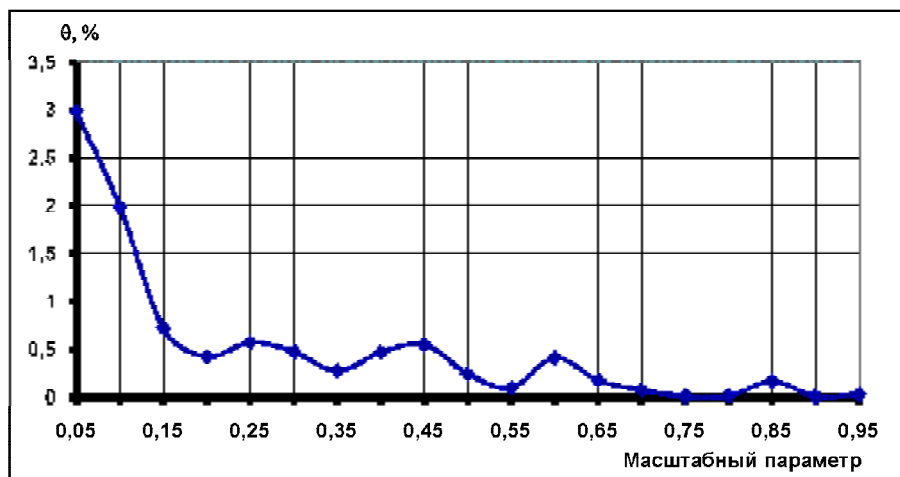


Рис. 5. Зависимость отношения среднего значения ФВМ в точке $D = 1,92457$ к среднему значению ФВМ в диапазоне $1,99 \leq D < 2$ от масштабного параметра ФВМ

Представленный анализ позволяет на 5%-м уровне значимости принять гипотезу о пересечении корреляционных зависимостей рис. 1 в одной точке, что подтверждает правильность отождествления фрактальной размерности D и момента УРД [8].

Второй аспект связан с тем, что момент УРД не может влиять на закон распределения микроускорений как случайной величины [11, 12]. Следовательно, закон распределения ФВМ не должен зависеть от фрактальной размерности функции (1). Проверка этой гипотезы осуществлялась с помощью критериев Фроцини и Колмогорова-Смирнова [10]. Оба этих критерия используются для проверки нормальности закона распределения случайной величины. На рис. 6 и 7 показана зависимость наблюдаемого значения критериев от масштабного параметра ФВМ.

Проверку исходной гипотезы о независимости закона распределения ФВМ от D можно построить следующим образом. Установить с помо-

щью критерия согласия χ^2 -Пирсона статистическую значимость отличий зависимостей, приведенных на рис. 6 и 7 и полученных для других значений фрактальной размерности D . В случае статистической значимости различий следует отклонить гипотезу о независимости, если значения критерия согласия не превысят критические для 5%-го уровня значимости, то нет оснований для отвержения исходной гипотезы на 5%-м уровне.

Зависимости наблюдаемых значений критерия согласия для обоих критериев приведены на рис. 8 и 9.

Как видно из приведенных зависимостей, различия несущественны. Далее аналогичным образом были проверены все наблюдаемые значения критериев Фроцини и Колмогорова-Смирнова на соответствие при различных значениях D . Максимальное значение критерия согласия хи-квадрат Пирсона не превысило 0,1 для критерия Фроцини и 0,8 для критерия Колмо-

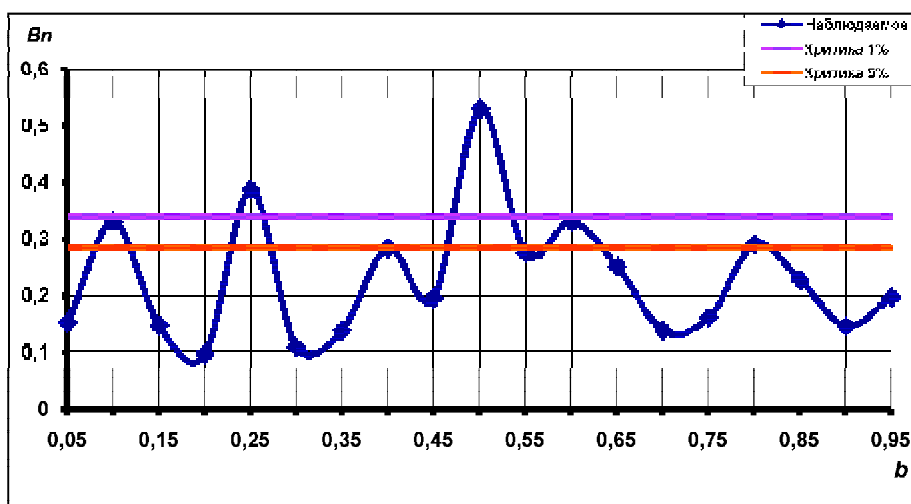


Рис. 6. Зависимость наблюдаемого значения критерия Фроцини от масштабного параметра ФВМ при $D = 1,99$

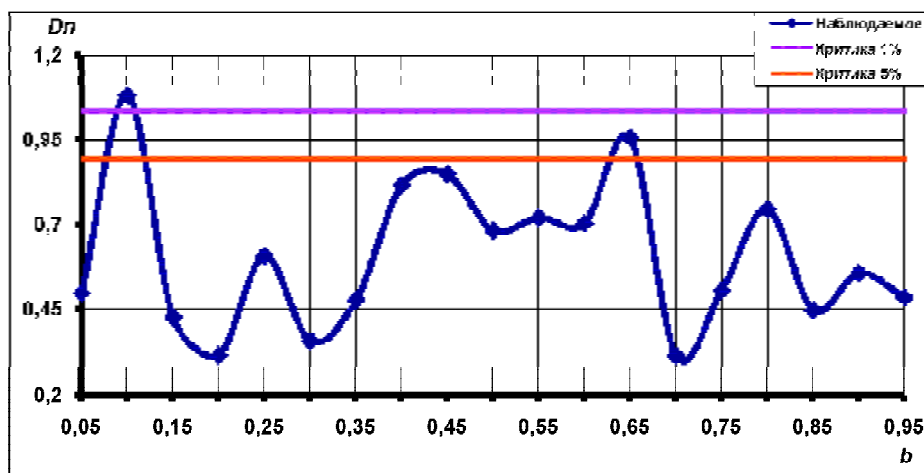


Рис. 7. Зависимость наблюдаемого значения критерия Колмогорова-Смирнова от масштабного параметра ФВМ при $D = 1,99$

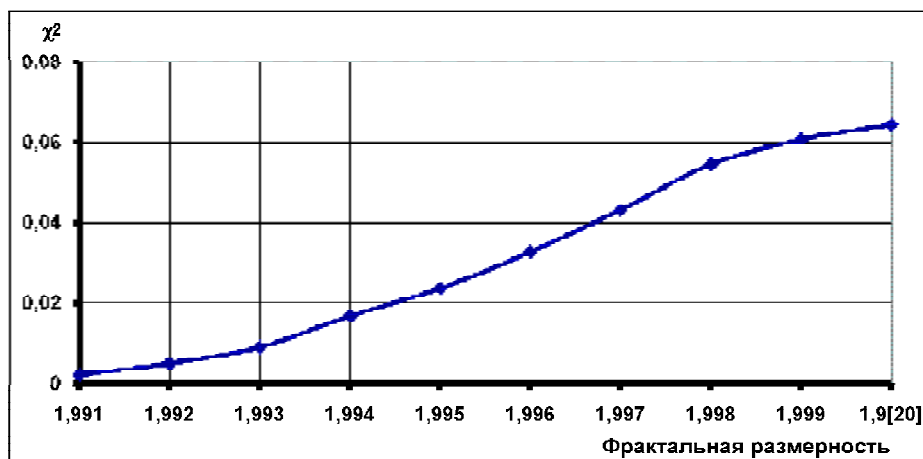


Рис. 8. Наблюдаемые значения критерия согласия χ^2 -Пирсона при выявлении статистической значимости различий между значениями критерия Фроцини при $D=1,99$ и другими значениями фрактальной размерности

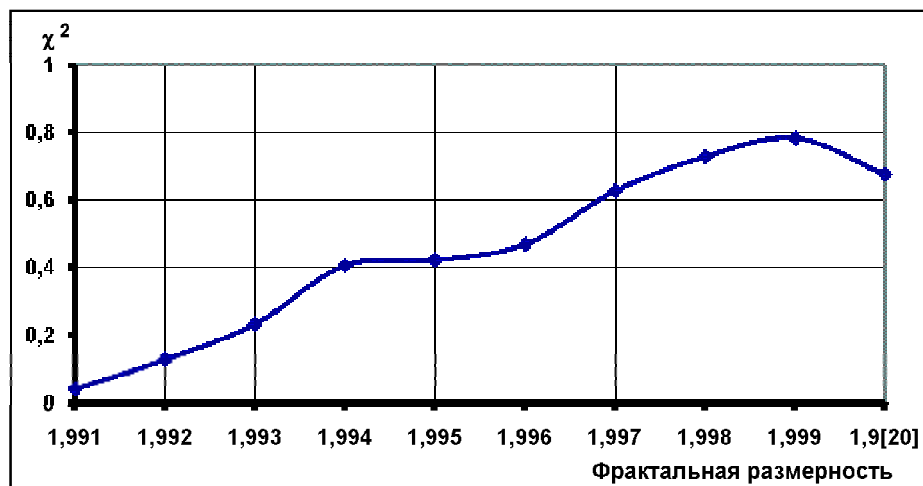


Рис. 9. Наблюдаемые значения критерия согласия хи-квадрат Пирсона при выявлении статистической значимости различий между значениями критерия Колмогорова-Смирнова при $D=1,99$ и другими значениями фрактальной размерности

горова-Смирнова. Критическое значение на 5%-м уровне значимости составляет $\chi_{кр}^2 = 26,2962$, что позволяет уверенно отвергнуть гипотезу о статистически значимых различиях между значениями обоих критериев при различных значениях фрактальной размерности, а, следовательно, принять исходную гипотезу о независимости закона распределения ФВМ от D .

Таким образом, проведенные исследования выявляют полную аналогию поведения ФВМ и оцениваемой с ее помощью квазистатической компоненты микроускорений. Этот факт подтверждает возможность получения адекватной оценки микроускорений, используя ФВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седельников А.В. Фрактальная оценка микроускорений для слабого демпфирования собственных колебаний упругих элементов космического аппарата. I

- // Изв. вузов. Авиационная техника. 2006. № 3.
2. Седельников А.В. Фрактальная оценка микроускорений для слабого демпфирования собственных колебаний упругих элементов космического аппарата. II // Изв. вузов. Серия "Авиационная техника". 2007. № 3.
3. Анализ низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ ФОТОН-11 / Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. // Космические исследования. Т. 39. № 4. 2001.
4. Результаты измерения ускорений технологических установок на борту космических аппаратов ФОТОН / Бармин И.В., Волков М.В., Егоров А.В., Реут Э.Ф., Сенченков А.С. // Космические исследования. Т. 39. № 4. 2001.
5. Сарычев В.А., Беляев М.Ю., Сазонов В.В., Тяп Т.Н. Определение движения орбитальных комплексов "Салют-6" и "Салют-7" относительно центра масс в режиме гравитационной ориентации по данным измерений // Препринт № 88. 1983. ИПМ АН СССР.
6. Березин И.А., Сазонов В.В., Стажков В.И. Расчет микроускорений на орбитальном комплексе "Мир" // Труды XXV Чтений К.Э.Циолковского. М. 1991. С. 22-31.
7. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях угловой скорости и микроускорения, выполненных

- на спутнике ФОТОН 12 / *Абрашкин В.И., Волков М.В., Егоров А.В., Зайцев А.С., Казакова А.Е., Сазонов В.В.* // Космические исследования. Т. 41. № 6. 2003.
8. *Седельников А.В.* Качественное отождествление параметров функции Вейерштрасса-Мандельброта при оценке микроускорений // Наука в высшей школе: проблемы интеграции и инноваций. Материалы VII Международной научной конференции. Москва. 2007.
 9. *Авраменко А.А., Седельников А.В.* Моделирование поля остаточной микрогравитации на борту орбитального КА // Изв. вузов. Серия "Авиационная техника". 1996. № 4.
 10. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика М.: Физматлит. 2006.
 11. *Седельников А.В.* Исследование функции распределения уровня микроускорений во времени // Успехи современного естествознания. № 9. 2004.
 12. *Седельников А.В.* Статистические исследования микроускорений как случайной величины // Фундаментальные исследования. № 6. 2004.

FRactal Model of Microaccelerations: Physical Aspect

© 2009 A.V. Sedelnikov, A.A. Serpukhova

Institute for Energy and Transport of Samara State Aerospace University

Physical aspect of fractal model building of microaccelerations is described in this article. Weierstrass-Mandelbrot function is used as functional relationship. Function parameters qualitative treatment are given, the statistical analysis is made.

Key words: fractal model building of microaccelerations, Weierstrass-Mandelbrot, statistical analysis.

Andrey Sedelnikov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor.

Anastasiya Serpukhova, Graduate Student.

E-mail: axe_backdraft@inbox.ru.