

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ВОЗВРАЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

© 2009 А.А. Лукичёв

Институт геологии и природопользования ДВО РАН, г. Благовещенск

Поступила в редакцию 27.10.2008

В настоящей работе получены спектры колебаний заторможенного осциллятора Дуффинга. На основе анализа полученных спектров рассмотрен вопрос о возможности применения модели нелинейного осциллятора с кубической нелинейностью для описания релаксационной поляризации Коул-Дэвидсоновского типа в диэлектриках под действием внешнего электрического поля.

Ключевые слова: спектры колебаний, заторможенный осциллятор Дуффинга, модель нелинейного осциллятора, кубическая нелинейность.

В работах [1, 2] авторами показано, что диэлектрические спектры релаксационной поляризации могут быть описаны с помощью модели заторможенного линейного осциллятора. Поскольку реальные релаксационные спектры в большинстве случаев удовлетворительно или плохо совпадают со спектром линейного осциллятора, можно предположить, что для этой цели может быть применена модель заторможенного нелинейного осциллятора. В настоящее время теория нелинейных колебаний разработана достаточно хорошо [3, 4]. Найдены методы решения нелинейных уравнений, различные нелинейные осцилляторы, получены решения, позволяющие получить спектры колебаний. Но теория заторможенных нелинейных осцилляторов сейчас разработана очень слабо.

Рассмотрим классический осциллятор, состоящий из двух пружин и шарика на стержне [5], колеблющийся с достаточно большой амплитудой, настолько, что упругая возвращающая сила становится нелинейной.

Уравнение, описывающее движение линейного осциллятора имеет следующий вид [5]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

где x – координата осциллятора, β – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота колебаний, m – масса. Собственная частота определяется выражением: $\omega_0^2 = k/m$, здесь k – постоянный коэффициент, определяемый упругими свойствами пружины. Для нелинейных колебаний коэффициент k будет неизвестной функцией координаты, разложим эту функцию в ряд:

$$k(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots \quad (2)$$

Коэффициенты k_0 и k_2 равны нулю, первый в силу того, что в положении равновесия квази-

упругая сила равна нулю, второй в силу симметрии задачи, поскольку квазиупругая сила должна менять знак при смене знака x . Пренебрегая членами ряда степени выше третьей, получаем:

$$k(x) \approx k_1x + k_3x^3. \quad (3)$$

Отсюда мы можем записать уравнение осциллятора с кубической квазиупругой силой, или осциллятора Дуффинга [3]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_{01}^2 x + \omega_{03}^2 x^3 = 0, \quad (4)$$

здесь ω_{01} – собственная частота колебаний линейного осциллятора, $\omega_{03} = k_3/m$ – коэффициент, который можно рассматривать как собственную частоту осциллятора с чисто кубической упругой силой. Выражение (3) определяет вид потенциальной ямы, в которой колеблется рассматриваемый осциллятор:

$$U(x) = a_1x^2 + a_3x^4. \quad (5)$$

где a_1 и a_3 некоторые константы.

Поскольку нас интересует применение этой модели для описания релаксационной поляризации, нам необходимо рассмотреть заторможенный режим колебаний. Так же как и в работах [1, 2], отбрасываем первое инерционное слагаемое в уравнении (4), поскольку инерция становится пренебрежимой по сравнению с силой трения и получаем укороченное уравнение Дуффинга:

$$2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_{01}^2 x + \omega_{02}^2 x^3 = 0. \quad (5)$$

В работе [6] показано, что для линейного осциллятора укороченное уравнение точно описывает заторможенные колебания при условии $\beta > 5\omega_0$. Пока мы не можем определить аналогичное условие для нелинейного осциллятора, потому будем считать, что в этом случае с достаточной точностью выполняется приведённое выше условие.

Уравнение (5) может быть представлено в виде уравнения Бернулли [7], интегрирование

Лукичёв Александр Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник.
E-mail: lukichevaa@mail.ru.

которого [3] даёт:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{Ce^{2t/\tau} + \frac{\omega_{03}^2}{\omega_{01}^2}}}, \quad (6)$$

где $\tau = 2\beta / \omega_{01}^2$ - постоянная времени линейного осциллятора [2], t - время, $C = 1/x_0^2 + \omega_{03}^2/\omega_{01}^2$ - постоянная интегрирования, определяемая начальной амплитудой x_0 . Очевидно, что при $\omega_{03} = 0$ решение (6) переходит в функцию

$$x(t) = Ce^{-t/\tau}, \quad (7)$$

описывающую свободное движение линейного осциллятора [2, 5].

Поскольку нашей задачей является применение модели нелинейного осциллятора к описанию релаксационной поляризации, то нам необходимо найти зависимость амплитуды вынужденных колебаний осциллятора от частоты внешнего поля $\tilde{A}(\omega)$ или спектральную функцию (рис. 1). Эту функцию мы можем найти, применив преобразование Фурье к решению (6) [8]. Преобразование Фурье даёт интеграл

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{Ce^{2t/\tau} - \frac{\omega_{03}^2}{\omega_{01}^2}}} dt, \quad (8)$$

здесь нижний предел интегрирования взят равным нулю, поскольку время не может быть отрицательным. Этот интеграл мы взять не смогли, поэтому далее применили цифровое интегрирование. Для интегрирования в среде MathCAD выражение (8) было преобразовано к виду:

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \left(Ce^{2t/\tau} - \frac{\omega_{03}^2}{\omega_{01}^2} \right)^{-1/2} dt. \quad (9)$$

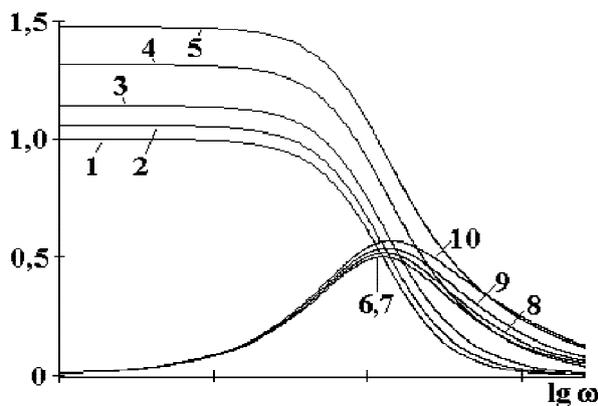


Рис. 1. Действительная (1-5) и мнимая (6-10) части спектральной функции нелинейного осциллятора для различных значений параметра a :
 1, 5 - $a = 0$; 2, 6 - $a = 0,3$; 3, 7 - $a = 0,6$;
 4, 8 - $a = 0,9$; 5, 10 - $a = 0,99$

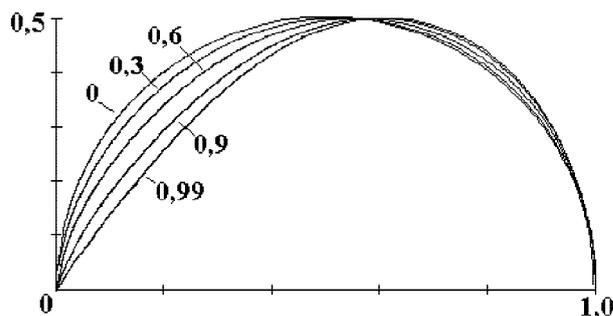


Рис. 2. Фазочастотные характеристики для спектральной функции заторможенного осциллятора Дуффинга для различных значений параметра a . Цифрами на графиках обозначены значения a

Результаты интегрирования показаны на рис. 2. Графики построены в полулогарифмическом масштабе, это форма представления принята в физике диэлектриков. Кривые нормированы на амплитудное значение действительной части спектра линейного осциллятора ($a=0$). Как видно из рисунка, действительная и мнимая части спектральной функции достаточно слабо зави-

сят от соотношения $a = \frac{\omega_{03}^2}{\omega_{01}^2} / C$. С ростом a происходит незначительное уширение пиков мнимой части, действительная часть становится более пологой и происходит незначительное увеличение амплитуды. Ещё одно отличие спектров осциллятора Дуффинга от линейных спектров состоит в том, амплитуда пиков мнимой части меньше полувысоты действительной части и координата полувысоты не совпадает с максимумом пика. С ростом a отличия нарастают.

Для того, чтобы выявить различия в форме кривых, в физике диэлектриков применяют диаграммы Коула-Коула (Cole-Cole) [9], или графики построенные в координатах $(\epsilon'(\omega), \epsilon''(\omega))$, где $\epsilon'(\omega), \epsilon''(\omega)$ - действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости. С математической точки зрения эта диаграмма представляет собой годограф вектора с соответствующими координатами, или фазочастотная характеристика (ФЧХ), если использовать термины, принятые в автоматике. Мы будем использовать последнее название, как более удобное. На рис. 3 построены ФЧХ нормированной по амплитуде спектральной функции осциллятора Дуффинга для различных значений отношения a . Из рис. 3 следует, что при $a=0$ ФЧХ представляет собой правильный полукруг, что соответствует ФЧХ спектральной функции линейного заторможенного осциллятора [6]:

$$\tilde{A}_L(\omega) = \frac{A_0}{1+i\omega\tau} = A_0 \left(\frac{1}{1+\omega^2\tau^2} - i \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \right), \quad (10)$$

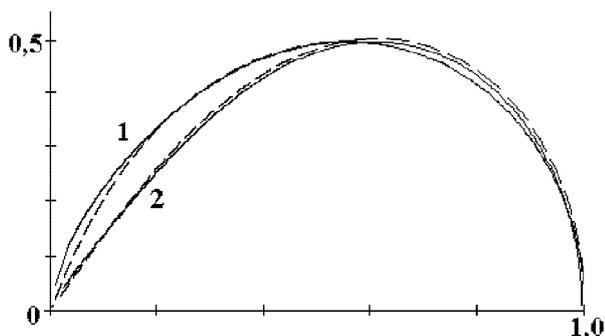


Рис. 3. Сравнение фазочастотных характеристик для спектральной функции заторможенного осциллятора Дуффинга (сплошная линия) и формулы Дэвидсона-Коула (пунктир):
 1 – $a = 0,9$, $\psi = 0,73$; 2 – $a = 0,99$, $\psi = 0,5$

здесь A_0 – амплитудный множитель. С ростом a происходит смещение центра тяжести кривых вправо. Наиболее заметные искажения ФЧХ наблюдается при $a > 1$.

Известно, что такие искажения диаграмм Коула-Коула соответствуют сильной связи релаксирующих частиц в диэлектрике с ближайшим окружением [10]. Подобные диаграммы наблюдаются у некоторых жидкостей, стёкол, полимеров и т.п. Спектральные функции, соответствующие подобным диаграммам описываются эмпирической функцией Коула-Дэвидсона [10]:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{(1 + i\omega\tau)^{1-\psi}}, \quad (11)$$

где ε_{∞} , ε_s – высокочастотная ($\omega \gg \omega_0$) и низкочастотная ($\omega \ll \omega_0$) части диэлектрической проницаемости, ψ – параметр релаксации. Можно было бы предположить, что (11) и есть спектральная функция заторможенного осциллятора Дуффинга, но, как показано в работе [11], обратное преобразование Лапласа от (11) даёт время-зависимую функцию, которая при $t > 0$ стремится к бесконечности, что физически не обосновано. На рис. 3 показано сравнение ФЧХ для спектральной функции осциллятора Дуффинга и функции (11) Коула-Дэвидсона. Из рисунка

видно, что обе функции показывают хорошее, но не полное совпадение. Можно заметить, что явной связи между коэффициентом a и параметром релаксации ψ нет.

Таким образом, из сравнения спектров заторможенного осциллятора Дуффинга и формул Коула-Дэвидсона следует, что релаксационная поляризация коул-дэвидсоновского типа может быть описана с помощью модели нелинейного заторможенного осциллятора с кубической нелинейностью упругой силы. Отсюда можно сделать вывод, что релаксационная поляризация этого вида вызвана нелинейными колебаниями заряженных частиц в диэлектрике под действием переменного электрического поля. Появление нелинейности вызвано сильным взаимодействием частицы с ближайшим окружением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукичёв А.А., Костюков Н.С. Связь гармонических функций с формулами Дебая для частотной зависимости // *Электричество*, 2002, № 1. С.55-58.
2. Лукичёв А.А., Ильина В.В. О возможности построения единой модели резонансной и релаксационной поляризации // *Электронный журнал "Исследования в России"* 2005. 171. С. 1778-1792. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/171.pdf>.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005.
4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, Физматлит, 1997.
5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1991.
6. Ильина В.В., Лукичёв А.А. Различные режимы вынужденных колебаний линейного осциллятора с затуханием и исследование спектральных функций // *Известия Самарского научного центра РАН*. 2008. Т. 10. № 3. С. 782-790.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Лейпциг, Тойбнер, М.: Наука, 1981.
8. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Физматлит, 1962.
9. Поплавко Ю.М. Физика диэлектриков. Киев: Вища школа, 1980.
10. Jonscher A.K. Dielectric relaxation in solids. Chelsea dielectric press, London, 1983.
11. Нигматуллин Р.Р. Диэлектрическая релаксация типа Коула-Дэвидсона и самоподобный процесс релаксации // *ФТТ*. 1997. Т. 39. № 1. С. 101-105.

SPECTRAL FUNCTION OF NONLINEAR OSCILLATOR WITH THE CUBIC RETURNING FORCE SIMULATION

© 2009 A.A. Lukichev

Institute of Geology and Nature Management, FEB RAS, Blagoveshchensk

In the presented paper the damped Duffing's oscillator vibrations spectra are obtained by digital simulation. On a basis of the obtained spectra analysis the possibility of nonlinear oscillator with the cubic returning force model to Cole-Davidson relaxation polarization description is considered.

Key words: spectra, damped Duffing's oscillator, nonlinear oscillator, cubic nonlinearity.

Aleksandr Lukichev, Candidate of Physics and Mathematics,
 Senior Research Fellow. E-mail: lukichevaa@mail.ru.