УДК 539.1

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КРУЧЕНИЯ КОМПОЗИЦИОННОГО СЛОИСТОГО СТЕРЖНЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

© 2009 А.У. Нуримбетов

“МАТИ” – Российский государственный технологический университет, г. Москва

Поступила в редакцию 23.07.2009

Используя геометрические соотношения Коши, получено выражения для компонент тензора деформации при “обобщенном кручении” для слоя i многослойного стержня произвольного сечения. Решение уравнений при заданных граничных условиях отыскивается для каждого слоя i в виде степенного ряда. Получено разрешающие уравнения метода приближенных решений.

Ключевые слова: кручение, слоистый стержень, композиционный материал, обобщенное кручение.

В технике широкое применение находят многослойные конструкции, так как они, зачастую, наилучшим образом обеспечивают удельные жесткости и прочности, звуко и теплоизоляционные свойства, демпфирующие и вибро поглощающие характеристики изделий. Многослойную конструкцию изготавливают из таких компонентов, которые в совокупности обладают необходимыми физическими, химическими, электрическими и магнитными свойствами. Одним из распространенных составных тел являются многослойные стержни, образованные из n слоев. Многослойные стержни могут служить расчетной моделью многих реальных конструкций. Следовательно, изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) многослойных стержней имеет практический интерес. Метод расчета стержней произвольного сечения, в основе которых лежала классическая теория тонких изогнуто-закрученных стержней Кирхгофа-Клебша, разрабатывались и развивались многими авторами [1]-[5], и другими. Однако в настоящее время не до конца разработаны методы расчета слоистых стержней произвольного сечения. Поэтому, рассматривается цилиндрический стержень из слоистого материала с поперечным сечением произвольной формы, находящийся под действием усилий, распределенных по концам стержня и приводящихся к скручивающему моменту M_t, изгибающим моментам M_1, M_2 и растягивающей силе P. Область сечения предполагается конечной и односвязной. Оси x, y совпадают с главными осями инерции рассматриваемого текущего сечения и проходят через центр тяжести сечения. Текущая ось z нормальна к сечению (рис. 1).

Нуримбетов Алибек Усипбаевич, кандидат физико-математических наук, научный стажер кафедры “Механика машин и механизмов”. E-nail: alibek_55@mail.ru.

СЛОИСТАЯ СТРУКТУРА СЕЧЕНИЯ

Оптимальные потенциальные возможности конструкций из композиционных материалов могут быть получены только тогда, когда получены объективные оценки НДС конструкции и соответствующих технологических процессов. Изучения НДС элементов конструкций, получение достоверной информации позволят не только оценить работоспособность конструкции, но внести необходимое изменения в технологический процесс. Наряду с экспериментальными методами исследования значительную роль играет в этом математическое моделирование поведения конструкции из композиционного материала в условиях, близких к реальным условиям функционирования. Математические модели, ориентированные на использование вычислительной техники, во многом способствуют рациональному проектированию и отработке конструкции. Применение трехмерных моделей позволяет с единой позиции рассмотреть каждый отдельный слой многослойного стержня.

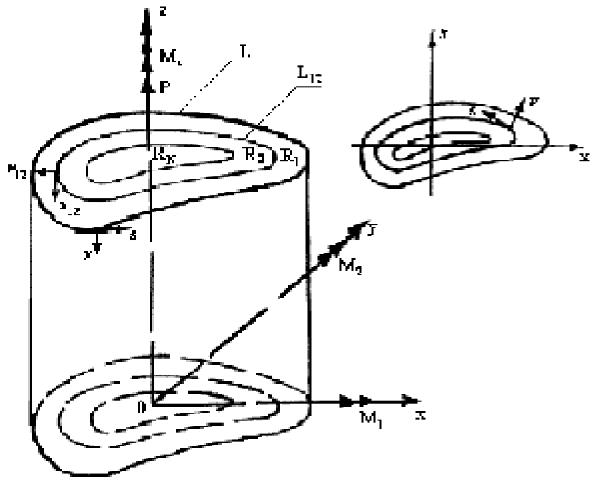


Рис. 1. Слоистый стержень.

Одной из тенденций развития в решении прикладных задач является учет в расчетах реальных свойств компонентов, образующих композиционный материал, и реальные условия эксплуатации конструкции. Одним из факторов, которые следует учесть, является неоднородность материалов, как естественная, так и технологическая. Возможность более детального учета геометрии конструкции, действительных граничных условий, особенностей физического поведения материалов, а также зависимостей физико-механических характеристик от различных факторов появилась благодаря широкому развитию математических методов как аналитических, так и численных, повсеместному внедрению их в практику расчета.

В связи с этим для стержней постоянного и переменного сечения возникает специфическая для армированных стержней задача – задача укладки в сечении слоев постоянной толщины. Так как размеры сечений могут меняться вдоль длины стержня, то и число слоев в каждом сечении будет различным. В плоскости, содержащей ось стержня, отдельно слои представляются в виде лепестков. Взятые из разных сечений координаты начала и конца одного слоя образуют координаты одного лепестка, т.е. позволяет решить сформулированную задачу раскроя слоев ленты, ткани. В связи с этим решена технологическая задача раскроя таких лепестков [6].

Каждый слой представляет собой трансверсально-изотропное или ортотропное тело. Так как направление осей симметрии материала не совпадает с осями координат стержня и может меняться от слоя к слою, то физико-механические свойства слоев могут отличаться друг от друга. В связи с этим возникает необходимость определения приведенных механических характеристик поперечного сечения.

РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЧЕНИЯ СЛОИСТОГО СТЕРЖНЯ

Наиболее часто используются следующие геометрические и физико-геометрические характеристики сечения стержня

$$I_{mn}^{k} = \int_{F} H^{k}(x,y)x^{n}y^{m}dxdy,$$
$$\begin{cases} 0 \le n \le 4, \\ 0 \le m \le 4, \end{cases} \quad (0 \le n + m \le 4). \qquad (1)$$

Здесь физико-механические свойства $H^k(x,y)$ содержат различные параметры (например, модуль упругости, коэффициент Пуассона, модуль сдвига, коэффициент линейного расширения и т.д.) в зависимости от номера k. При k=0 $H^0(x,y)=1$ и интеграл (1) определяет геометрические характеристики сечения стержня. При k=m=n=0 интеграл I_{00}^{0} равен площади поперечного сечения, т.е. $I_{00}^{0}=F$.

В пункте 1 показывалось, каким образом сечения стержня представляется в виде отдельных слоев. Численное интегрирование соотношений (1) реализовано с помощью специально составленной программы на алгоритмическом языке Fortran. Сравнение численных результатов геометрических характеристик J_{mn}^{i} стержня с ромбовидным (d1=120 мм, d2=20 мм) и прямоугольным (a=120мм, h=20 мм) сечением вычисленные по формуле (1), отличаются от точных их значений не более чем на 0,0001%.

После вычисления физико-геометрических характеристик сечения находятся центр тяжести сечения по формуле $x^{*} = I_{01}^{0} / I_{00}^{0}$, $y^{*} = I_{01}^{0} / I_{00}^{0}$, а также направление главных осей. В последующем анализе используется новая, местная система координат xў, yў, связанная со старой следующей зависимостью

$$x' = (x - x^{*})\cos\alpha^{*} + (y - y^{*})\sin\alpha^{*},$$
$$y' = -(x - x^{*})\sin\alpha^{*} + (y - y^{*})\cos\alpha^{*}.$$

$$\cos 2\alpha^{*} = 1/\sqrt{1 + \mathrm{tg}^{2} 2\alpha^{*}}, \ \mathrm{tg} 2\alpha^{*} = 2I_{22}^{0}/(I_{02}^{0} - I_{20}^{0}). \qquad (2)$$

С изменением координатной системы (параллельный перенос в центр тяжести и поворот относительно осей x и y) геометрические и физико-геометрические характеристики стержня произвольного сечения меняют величину.

В случае продольно-поперечной укладки слоев $\psi^{i}=0$ или $\psi^{i}=90$, в этих слоях физические соотношения между деформациями и напряжениями [7] упрощаются из-за отсутствия связанности сдвиговых и продольно-поперечных деформации и напряжений. В этом случае $a_{j5}'^{i} = a_{46}'^{i} = 0, (j = 1,2,3)$ и кручение стержня является чистым [8-10]. Если угол армирования ψ^{i} в некотором слое i отличен от нуля, то исследуемая деформация стержня является “обобщенной” и кручение стержня, в частности, обуславливает появление эффектов изгиба при кручении.

ОБОБЩЕННОЕ КРУЧЕНИЕ КОМПОЗИЦИОННОГО СТЕРЖНЯ

При “обобщенном “ кручении компоненты перемещения точек i-го слоя отыскивается в виде

$$u^{i} = -a_{33}'^{i} M_{1}(\ell - z)/(2J_{1}^{i}) - \tau(\ell - z)y + U^{i}(x,y),$$

$$v^{i} = \frac{0.5a_{35}'^{i}M_{t} - a_{33}'^{i}M_{2}}{2J_{2}^{i}}(\ell - z) + \tau(\ell - z)x + V^{i}(x,y), \qquad (3)$$

$$w^{i} = \left[\frac{0.5a_{35}'^{i}M_{t} - a_{33}'^{i}M_{2}}{J_{2}^{i}}y - \frac{a_{33}'^{i}M_{1}}{J_{1}^{i}}x - \frac{a_{33}'^{i}}{F_{i}}P\right](\ell - z) + W^{i}(x,y).$$

Здесь U^i, V^i, W^i – некоторые подлежащие определению функции координат сечения x, y; t – относительный угол закручивания на единицу длины стержня; ℓ – длина стержня; J^i_j (j=1,2) – главные моменты инерции поперечного сечения i-го слоя; F_i – площадь сечения i-го слоя; P, M_1, M_2, M_t – силы и моменты, действующие в поперечном сечении стержня. Как правило, последние (P, M_1, M_2, M_t) являются известными величинами, однако иногда встречаются случаи, когда их следует определить в ходе решения задачи.

Используя геометрические соотношения Коши из (3) можно получить выражения для компонент тензора деформации при "обобщенном кручении" для слоя i в виде

$$\varepsilon^i_{11} = \partial U^i/\partial x; \quad \varepsilon^i_{22} = \partial V^i/\partial y;$$
$$\varepsilon^i_{12} = \partial U^i/\partial y + \partial V^i/\partial x;$$

$$\varepsilon^i_{33} = \frac{a'^i_{33}}{F_i}P + \frac{a'^i_{33}}{J^i_1}x + \frac{a'^i_{33}M_2 - 0.5a'^i_{33}M_t}{J^i_1}y; \quad (4)$$

$$2\varepsilon^i_{13} = \tau y + \partial W^i/\partial x, \ \varepsilon^i_{23} = -\tau x + \partial W^i/\partial y.$$

Следует заметить, что в (4) все компоненты тензора деформации не зависят от координат z. Если учесть представления (4), то уравнения равновесия $\sigma^i_{kj,j} + x^i_k = 0$ (k, j = 1,2,3), где индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате, могут быть приведены к виду

$$\frac{\partial^2 U^i}{\partial x^2} + \frac{c'^i_{66}}{2c'^i_{11}}\frac{\partial^2 U^i}{\partial y^2} + \frac{2c'^i_{12} + c'^i_{66}}{2c'^i_{11}}\frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y} = Z^i_1(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 V^i}{\partial y^2} + \frac{c'^i_{66}}{2c'^i_{22}}\frac{\partial^2 V^i}{\partial x^2} + \frac{2c'^{c'i}_{12} + c'^i_{66}}{2c'^i_{22}}\frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y} = Z^i_2(x,y). \quad (5)$$

Здесь функция $Z^i_j(x,y)$ (j=1, 2) определяются следующими соотношениями

$$Z^i_1(x,y) = -\frac{c'^i_{13}a'^i_{33}}{c'^i_{11}J^i_1}M_1 - \frac{1}{c'^i_{11}}\left(c'^i_{15}\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} + c'^i_{46}\frac{\partial^2 W^i}{\partial y^2}\right),$$
$$Z^i_2(x,y) = \frac{0.5a'^i_{35}M_t - a'^i_{33}M_2c'^i_{23}}{c'^i_{22}J^i_2} - \frac{(c'^i_{25} - c'^i_{46})}{c'^i_{22}}\left[\tau + \frac{\partial^2 W^i}{\partial x \partial y}\right],$$

$$\frac{\partial^2 W^i}{\partial x^2} + \frac{c'^i_{44}}{c'^i_{55}}\frac{\partial^2 W^i}{\partial y^2} = Z^i_3(x,y), \quad (6)$$

$$Z^i_3(x,y) = \frac{2c'^i_{35}a'^i_{33}}{c'^i_{55}J^i_1}M_1 - \frac{2c'^i_{15}}{c'^i_{55}}\frac{\partial^2 U^i}{\partial x^2} -$$
$$-\frac{c'^i_{46}}{c'^i_{55}}\frac{\partial^2 U^i}{\partial y^2} - \frac{c'^i_{46} + 2c'^i_{32}}{c'^i_{55}}\frac{\partial^2 V^i}{\partial x \partial y}.$$

Специальная форма уравнений равновесия (5), (6) относительно составляющих U^i, V^i, W^i перемещений u^i, v^i, w^i (i = 1,2,…, N) выбрана с целью перенести направо члены, обусловленные взаимодействием сдвиговых и продольно-поперечных деформаций Действительно, если $c'^i_{j5} = c'^i_{46} = 0$ (j = 1,2,3) [7], [10], что реализуется при углах армирования слоя i $\psi^i = 0^0$ или $\psi^i = 90^0$, то $\psi^i = 0^0$ $Z^i_3 = 0$, а Z^i_1, Z^i_2 зависят только от изгибающих моментов M_1, M_2 обуславливая возможность по раздельного определения W^i функции и функции U^i, V^i.

Дифференциальные уравнения (5), (6) должны быть решены при заданных условиях на боковой поверхности стержня, а также на его торцах. В сечениях стержня должны выполняться условия непрерывности перемещений W_i при переходе от слоя к слою.

a. Условия на боковой поверхности

Пусть на цилиндрической поверхности неоднородного анизотропного слоистого стержня заданы усилия X_ν, Y_ν, Z_ν. Тогда в рассматриваемом сечении z условия на контуре L слоистой области запишутся в виде

$$\sigma_{11}\ell_1 + \sigma_{12}\ell_2 = X_\nu, \ \sigma_{12}\ell_1 + \sigma_{22}\ell_2 = Y_\nu, \quad (7)$$
$$\sigma_{13}\ell_1 + \sigma_{23}\ell_2 = Z_\nu. \quad (8)$$

Здесь ν – направление нормали к ограничивающему рассматриваемое сечение контуру L (рис. 1). $\ell_1 = \cos(\nu, x) = \partial y/\partial\varsigma$, $\ell_2 = \cos(\nu, y) = -\partial x/\partial\varsigma$ – направляющие косинусы, которые написаны в предположении, что положительный обход области осуществляется так, что область при обходе всегда находится слева. Если параметры упругости [7] c'^i_{55} и c'^i_{46} равны нулю (i=1,2,3), что реализуется при $\varphi^i = 0^0$ или $\varphi^i = 90^0$ (i=1,2,...,N), то X^*_ν и Y^*_ν зависят только от изгибающих моментов M_1, M_2, и тем самым, обуславливают возможность по раздельного определения граничных условии для функции U_i, V_i и W_i. Левые части условий (7), (8) характерны для задачи изгиба [10] и кручения анизотропных стержней [8-10].

b. Условия на поверхностях контакта анизотропных слоев слоистого стержня

Из условия сплошности равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела L_{kj} анизотропных слоев R_k и R_j, следуеть кинематические

$$U^k = U^j, \quad V^k = V^j, \quad W^k = W^j, \quad (9)$$

и статические соотношения

$$(\sigma^k_{11} - \sigma^j_{11})\ell_1 + (\sigma^k_{12} - \sigma^j_{12})\ell_2 = 0;$$
$$(\sigma^k_{22} - \sigma^j_{22})\ell_2 + (\sigma^k_{12} - \sigma^j_{12})\ell_1 = 0; \quad (10)$$
$$(\sigma^k_{13} - \sigma^j_{13})\ell_1 + (\sigma^k_{23} - \sigma^j_{23})\ell_2 = 0.$$

РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В тех случаях, когда отношение $c_{46}'^{i}/c_{55}$, $c_{j5}'^{i}/c_{55}$ (i=1,2,...,N) оказывается меньшим 1, то, следуя работам [4], [12] в которых использовано разложение в ряд по малому физическому параметру, можно ввести один малый параметр

$$\alpha = \mathrm{Sup}\{\alpha_{ij}\} \qquad (11)$$

при данном значении угла. В (11) параметр жесткости c_{55} является эффективным параметром упругости сечения. В случае, когда значения параметра меньше 1, решение уравнений (5), (6) при граничных условиях (7)-(8) и (3) удобно отыскивать для каждого слоя i в виде степенного ряда

$$U^i=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_i^j\tilde{U}_j^i,\ V^i=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_i^j\tilde{V}_j^i,\ W^i=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_i^j\tilde{W}_j^i. \qquad (12)$$

Если принятую форму решения (12) подставить в уравнение (5), то оно принимает вид

$$D_1\tilde{W}_j^i=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{c_{44}'^{i}}{c_{55}'^{i}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{W}_j^i=S_j, \qquad (13)$$

в котором

$$S=-2\frac{c_{35}'^{i}a_{33}^{i}}{c_{55}'^{i}}\frac{M_1}{J_1^i}\delta^1-\left(2\frac{c_{15}'^{i}}{c_{55}'^{i}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{c_{46}'^{i}}{c_{55}'^{i}}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tilde{U}_j^i-$$
$$-\frac{c_{46}'^{i}+2c_{55}'^{i}}{c_{55}'^{i}}\frac{\partial^2\tilde{V}_j^i}{\partial x\,\partial y}. \qquad (14)$$

В равенстве (14) δ_j^1 символ Кронекера. Если функции $\tilde{V}_j^i$, $\tilde{U}_j^i$ были предварительно определены, то уравнение (13) является неоднородным дифференциальным уравнением относительно $\tilde{W}_0^i$. Если же j=0, то S_0=0 и для определения $\tilde{W}_0^i$ получается однородное уравнение. Из $M_z^i=a_{33}'^{i}\left(\frac{P}{I_{00}^{0i}}+\frac{M_1}{I_{20}^{0i}}x+\frac{M_2}{I_{02}^{0i}}y\right)-0.5a_{35}'^{i}\frac{M_t}{I_{02}^{0i}}y$ и принятой формы решения (12) находится условие

$$\sum_{i=1}^{N}\iint_{F_i}\left[\frac{\partial(y\tilde{W}_j^i)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_{44}'^{i}}{c_{55}'^{i}}x\tilde{W}_j^i\right)\right]dF=M_{tj}, \qquad (15)$$

которому должно удовлетворять найденное решение уравнения на контуре L. На линиях раздела L_{ik} слоев R_i и R_k должны выполняться условия, $\tilde{W}_j^i=\tilde{W}_j^k$

$$\left(c_{55}'^{i}\frac{\partial\tilde{W}_j^i}{\partial x}-c_{55}'^{k}\frac{\partial\tilde{W}_j^k}{\partial x}\right)\ell_1+$$
$$+\left(c_{44}'^{i}\frac{\partial\tilde{W}_j^i}{\partial x}-c_{44}'^{k}\frac{\partial\tilde{W}_j^k}{\partial x}\right)\ell_2+\tilde{Z}_n^i-\tilde{Z}_n^k=0 \qquad (16)$$

в которых приняты обозначения

$$\tilde{Z}_n^i=c_{35}'^{i}M_z^i\ell_1+0.5(c_{55}'^{i}y\ell_1-c_{44}'^{i}x\ell_2)\tau_o+$$
$$+\left(c_{15}'^{i}\frac{\partial\tilde{U}_{j-1}^i}{\partial x}+c_{25}'^{i}\frac{\partial\tilde{V}_{j-1}^i}{\partial y}\right)\ell_1+0.5c_{46}'^{i}\left(\frac{\partial\tilde{U}_{j-1}^i}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{V}_{j-1}^i}{\partial x}\right)\ell_2.$$

Здесь, ℓ_1, ℓ_2 – направляющие косинусы нормали ν к линии раздела L слоев R_i и R_k. В (15) правая часть определяется равенством

$$M_{tj}=\left[\frac{M_t}{c_{55}'^{i}}-0.5\left(J_2^i+\frac{c_{44}'^{i}}{c_{55}'^{i}}J_1^i\right)\tau-\beta_{13}^iS_xT^i\right]\delta_j^0-c_{35}'^{i}M_{zz}^i\delta_j^1-$$
$$\iint_{F_i}\left[2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_{15}'^{i}}{c_{55}'^{i}}y\tilde{U}_{j-1}^i\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_{46}'^{i}}{c_{55}'^{i}}x\tilde{U}_{j-1}^i\right)\right]dF_i-$$
$$-\iint_{F_i}\left(\frac{c_{25}'^{i}}{c_{55}'^{i}}y\tilde{V}_{j-1}^i\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c_{46}'^{i}}{c_{55}'^{i}}x\tilde{V}_{j-1}^i\right)dF_i, \qquad (17)$$

где $M_{zz}^i=a_{33}'^{i}\left(\frac{I_{01}^{0i}}{I_{00}^{0i}}P+\frac{I_{11}^{0i}}{I_{20}^{0i}}M_1\right)-0.5a_{33}'^{i}M_t$. Правая часть условия (15) также как и правая часть уравнения (13) может быть найдена, если будут предварительно определены функции $\tilde{U}_{j-1}^i$ и $\tilde{V}_{j-1}^i$ для каждого слоя i. При j=0 выражение M_{t0} зависит от заданного крутящего момента M_t параметра кручения τ. Таким образом, при j=0 должно быть найдено решение задачи о чистом кручении (6). Решение задачи о чистом кручении анизотропных слоистых стержней можно получить аналитическими (для регулярных сечении) [10] и численными (метод конечных элементов) [11] методами.

Если решение отыскивается в виде (12), то функции $\tilde{U}_j^i$, $\tilde{V}_j^i$ в соответствии с уравнениями (4) и (5) должны быть определены в результате решения системы неоднородных уравнений

$$\frac{\partial^2\tilde{U}_j^i}{\partial x^2}+\frac{c_{66}'^{i}}{2c_{11}'^{i}}\frac{\partial^2\tilde{U}_j^i}{\partial y^2}+\frac{c_{12}'^{i}+c_{66}'^{i}}{2c_{11}'^{i}}\frac{\partial^2\tilde{V}_j^i}{\partial x\partial y}=Q_j,$$
$$\frac{c_{12}'^{i}+c_{66}'^{i}}{2c_{22}'^{i}}\frac{\partial^2\tilde{U}_j^i}{\partial x\partial y}+\frac{c_{66}'^{i}}{2c_{22}'^{i}}\frac{\partial^2\tilde{V}_j^i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{V}_j^i}{\partial y^2}=T_j, \qquad (18)$$

в которых правые части определяются из равенств

$$Q_j=-\frac{c_{13}'^{i}a_{33}^{i}}{c_{11}'^{i}}\frac{M_1}{J_1^i}\delta_j^0-$$
$$-\frac{c_{55}'^{i}}{2c_{11}'^{i}}\left(\frac{c_{55}'^{i}}{c_{55}'^{i}}\frac{\partial^2\tilde{W}_j^{i2}}{\partial x^2}+\frac{c_{46}'^{i}}{c_{55}'^{i}}\frac{\partial^2\tilde{W}_{j-1}^i}{\partial y^2x^2}\right),$$
$$T_j=\frac{a_{35}'^{i}M_t-2a_{33}'^{i}M}{2c_{22}'^{i}}-c_{23}'^{i}\delta_j^0-$$
$$-\frac{c_{55}'^{i}}{c_{11}'^{i}}\left(\frac{c_{25}'^{i}-c_{46}'^{i}}{2c_{55}'^{i}}\tau\delta_j^1-\frac{c_{46}'^{i}}{2c_{55}'^{i}}\frac{\partial^2\tilde{W}_{j-1}^i}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Таким образом, если функции $\widetilde{U}_j^i$, $\widetilde{V}_j^i$ предварительно определены, то уравнения (18) должны быть решены при следующих граничных условиях:

$$(\frac{\partial \widetilde{U}_j^i}{\partial x}+\frac{c_{12}'^i}{c_{11}'^i}\frac{\partial \widetilde{V}_j^i}{\partial y})\ell_1+\frac{c_{66}'^i}{c_{11}'^i}(\frac{\partial \widetilde{U}_j^i}{\partial y}+\frac{\partial \widetilde{V}_j^i}{\partial x})\ell_2=M_{1j}^i,$$

$$\frac{c_{66}'^i}{c_{11}'^i}(\frac{\partial \widetilde{U}_j^i}{\partial y}+\frac{\partial \widetilde{V}_j^i}{\partial x})\ell_1+(\frac{c_{12}'^i}{c_{22}'^i}\frac{\partial \widetilde{U}_j^i}{\partial x}+\frac{\partial \widetilde{V}_j^i}{\partial y})\ell_2=M_{2j}^i,$$

а. На контуре L

$$M_{1j}^i=-(\frac{c_{13}'^i}{c_{11}'^i}M_t^i+\beta_{11}^i T^i)\ell_1\delta_j^0-\frac{c_{15}'^i}{c_{11}'^i}(\frac{c_{15}'^i}{c_{55}'^i}y\ell_1-\frac{c_{46}'^i}{c_{55}'^i}x\ell_2)\delta_j^1\tau-$$

$$-\frac{c_{55}'^i}{c_{11}'^i}(\frac{c_{15}'^i}{c_{55}'^i}\frac{\partial \widetilde{W}_{j-1}'}{\partial x}\ell_1+\frac{c_{46}'^i}{c_{55}'^i}\frac{\partial \widetilde{W}_{j-1}'}{\partial y}\ell_2). \qquad (19)$$

в которых введены дополнительные обозначения

$$M_{2j}^i=-(\frac{c_{23}'^i}{c_{22}'^i}M_t^i\ell_1+\beta_{22}^i T^i\ell_2)\delta_j^0-\frac{c_{55}'^i}{c_{22}'^i}(\frac{c_{25}'^i}{c_{55}'^i}y\ell_2-\frac{c_{46}'^i}{c_{55}'^i}x\ell_1)\delta_j^1\tau-$$

$$-\frac{c_{55}'^i}{c_{22}'^i}(\frac{c_{25}'^i}{c_{55}'^i}\frac{\partial \widetilde{W}_{j-1}'}{\partial x}\ell_2+\frac{c_{45}'^i}{c_{55}'^i}\frac{\partial \widetilde{W}_{j-1}'}{\partial y}\ell_1) \qquad (20)$$

В (20) $\ell_1=\cos(\nu,x)$ и $\ell_2=\cos(\nu,y)$ – направляющие косинусы нормали к контуру L.

б. На поверхностях контакта

$$(c_{11}'^i\frac{\partial \widetilde{U}_j^i}{\partial x}-c_{11}'^k\frac{\partial \widetilde{U}_j^k}{\partial x}+c_{12}'^i\frac{\partial \widetilde{V}_j^i}{\partial x}-c_{12}'^k\frac{\partial \widetilde{V}_j^k}{\partial y})\ell_1-(c_{11}'^i M_{1j}^i-c_{11}'^k M_{1j}^k)+$$

$$+0.5(c_{66}'^i\frac{\partial \widetilde{U}_j^i}{\partial y}-c_{66}'^k\frac{\partial \widetilde{U}_j^k}{\partial y}+c_{66}'^i\frac{\partial \widetilde{V}_j^i}{\partial x}-c_{66}'^k\frac{\partial \widetilde{V}_j^k}{\partial x})\ell_2=0,$$

$$0.5(c_{66}'^i\frac{\partial \widetilde{U}_j^i}{\partial y}-c_{66}'^k\frac{\partial \widetilde{U}_j^k}{\partial y}+c_{66}'^i\frac{\partial \widetilde{V}_j^i}{\partial x}-c_{66}'^k\frac{\partial \widetilde{V}_j^k}{\partial x})\ell_1+(c_{22}'^i M_{1j}^i-c_{66}'^k M_{2j}^k)+$$

$$+(c_{12}'^i\frac{\partial \widetilde{U}_j^i}{\partial x}-c_{12}'^k\frac{\partial \widetilde{U}_j^k}{\partial x}+c_{22}'^k\frac{\partial \widetilde{V}_j^i}{\partial y}-c_{22}'^k\frac{\partial \widetilde{V}_j^k}{\partial y})\ell_2=0, \qquad (21)$$

где $\ell_1=\cos(\nu_{ik},x)$, $\ell_2=\cos(\nu_{ik},y)$ - направляющие косинусы нормали к линии раздела L_{ik} слоев R_i и R_k. Правые части условии (18)будут полностью определены, если предварительно был установлен вид функции $\widetilde{W}_{j-1}^i$. Вместе с тем, при j, равном нулю, как правые части уравнений (18), так и правые части условий (19) определяются независимыми от $\widetilde{W}_{j-1}^i$ факторами. Это обстоятельство совместно с замечаниями, касающимися уравнения (13) и соответствующих им граничных условий (15), говорит, что полученная разрешающая система уравнений (13), (18) является рекуррентной системой уравнений.

Действительно, при j=0 правая часть уравнения (13) равна нулю и при граничных условиях (15) должно быть найдено решение задачи о чистом кручении, т.е. находится решение $\widetilde{W}_0^i$ для каждого слоя i. При j=0, как правые части уравнений (18), так и правые части условий (19) определяются значения $\widetilde{U}_0^i$, $\widetilde{V}_0^i$ для каждого слоя i. После подстановки предварительно определенные функции $\widetilde{U}_0^i$, $\widetilde{V}_0^i$ для каждого слоя i в правые части уравнения (13) и (15), из решения неоднородного дифференциального уравнения (13) относительно $\widetilde{W}_1^i$, находится значение $\widetilde{W}_1^i$ для каждого слоя i. Так как функции $\widetilde{W}_0^i$ предварительно определены, то из решения неоднородного дифференциального уравнения (18) относительно $\widetilde{U}_1^i$, $\widetilde{V}_1^i$ находится значение $\widetilde{U}_1^i$, $\widetilde{V}_1^i$ для каждого слоя i.

Таким образом, по найденным функциям $\widetilde{U}_1^i$, $\widetilde{V}_1^i$, $\widetilde{W}_1^i$ – система уравнений (13), (18) совместно с граничными условиями (15), (16), (19) и (21) позволяет математически сформулировать задачу для определения отдельно функции $\widetilde{U}_j^i$, $\widetilde{V}_j^i$, и отдельно функции $\widetilde{W}_j^i$ для каждого слоя i при следующем j+1-ом приближений.

В работе [12] описан аналогичный способ для решения системы уравнений. Для решения системы уравнений используется метод последовательных приближений. Расчет заканчивается при достаточной близости результатов соседних приближений.

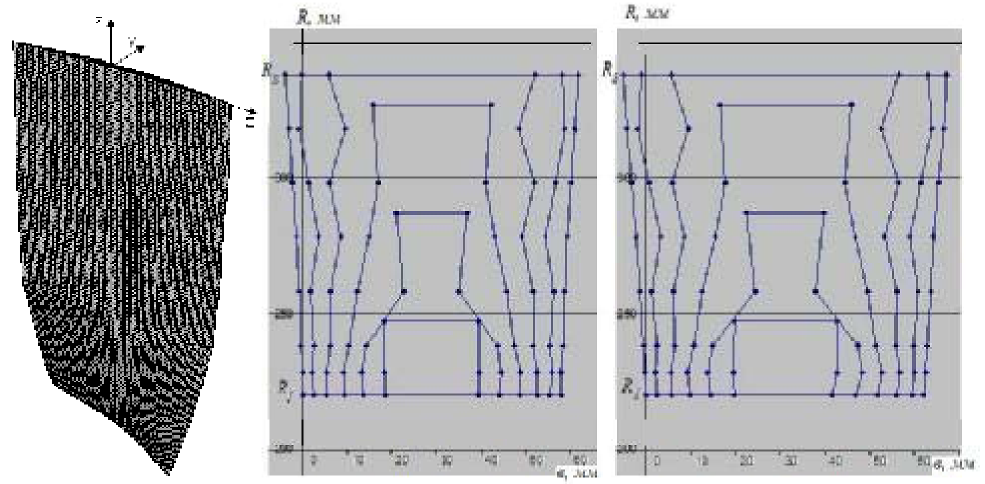
При α <<1 ряд (12) быстро сходятся к пределу. Поэтому принятая форма решения (12) выгодно отличается от решения предложенной в [12] тем, что позволяет непосредственно получить решения в перемещениях.

Однако, все же получение решения в такой схеме затруднено (получение численных результатов потребует большого объема машинного времени и памяти). Поэтому отдельно рассматривается задача о кручении слоистого анизотропного стержня [10, 11] и в рамках определенных кинематических предположении задача о НДС естественно-закрученных слоистых стержней произвольного сечения, находящихся в поле центробежных сил.

В качестве примера для решения задачи чистого кручения была рассчитана НДС компрессорной лопатки из композиционного материала. Лопасть, исследуемая в данной работе, представлена восемью сечениями. Корневое сечение лопатки состоит из 12 слоев одинаковой толщины t_c=0,4 мм, а периферийное сечение из 6 слоев, т.е. толщина лопатки c_{max} к периферийному сечению уменьшается, а хорда *в* увеличивается (рис. 3). Относительный угол закрутки на единицу длины лопатки τ_0 равен 0.006 рад/мм

На рис. 2. приведен раскрой слоев ленты, ткани для этой лопатки в виде лепестков.

Было проведено исследование – для трех различных вариантов сочетаний упругих постоян-



а) в) с)

Рис. 2. Лепестки компрессорной лопатки (а), спинки (в), корытца (с) (R – радиус сечения, $в$ – длина хорды) из 8 сечении

ных в пакете слоев композиционной лопатки. В первом варианте рассматривалась лопатка, состоящая из чередующихся со стороны спинки и корытца слоев бороалюминия (BAL) и чистого алюминия. В этом случае относительное объемное содержание бороалюминия в пакете слоев составляло ν_1=0,55, а алюминия – ν_2=0,45. Во втором варианте рассматривалась лопатка, состоящая из чередующихся со стороны спинки и корытца слоев бороалюминия (BAL, ν_1=0,45), керамики (Sic, ν_2= 0,45) и чистого алюминия (ν_3=0,1). В третьем варианте рассматривалась лопатка, состоящая из чередующихся со стороны спинки и корытца слоев бороалюминия, уложенных под углами ±45°, ±30°, ±15° к оси лопатки. В этом случае относительное объемное содержание слоев бороалюминия, уложенных под углами ±45° к оси лопатки, составляло ν_1=0,4, а при ±30° - ν_2=0,4 и ±15° - ν_3=0,2.

По результатам расчетов на рис. 3 построено семейство кривых, отражающих зависимости жесткости на кручение по Сен-Венану C_0 (линии 1-3), а также распределения касательного напряжения σ_{xz}, σ_{yz} и перемещения W для четвертого сечения (рис. 4). Как показывают численные результаты максимальные значения перемещения W в лопатке достигаются на четвертом сечении.

На рис. 5. приведена поверхности распределения перемещений W в сечении лопатки с чередующими слоями бороалюминия уложенных под углами (+45°,-45°,+30°,-30°, +15°, -15°) и алюминия к оси стержня. В этом случае происходить неравномерное распределение перемещении во внутренних слоях бороалюминия армированных волокнами с различными углами армирования. Здесь наибольшие перемещение достигается в слоях кромки из бороалюминия армированных волокнами под углами +45°, -45°. В этом случае наибольшие касательные напряжения (точки А, В, С, D), по сравнению с значениями распределения касательного напряжения в слоях составленного из чередующих слоев бороалюминия и алюминия (рис. 4), достигает своего значения вдали от входной и выходной кромки. Таким образом, можно избежать от опасных касательных напряжений у входной и выходной кромки лопатки с помощью армирования тонких слоев кромки волокнами под различными углами.

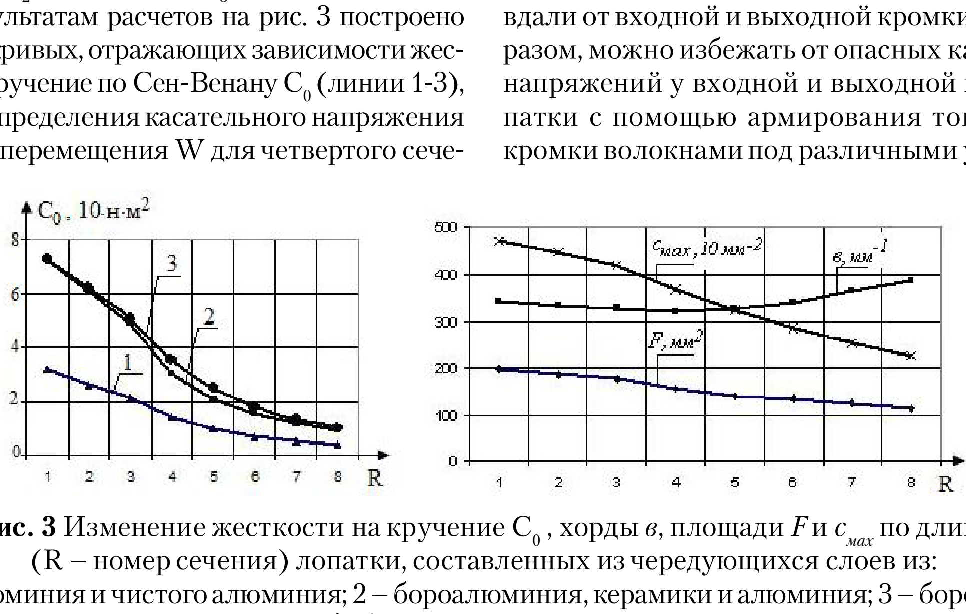


Рис. 3 Изменение жесткости на кручение C_0, хорды $в$, площади F и $c_{мах}$ по длине (R – номер сечения) лопатки, составленных из чередующихся слоев из: 1– бороалюминия и чистого алюминия; 2 – бороалюминия, керамики и алюминия; 3 – бороалюминия и алюминия, уложенных под углами (+45°,-45°,+30°,-30°, +15°,-15°) к оси стержня

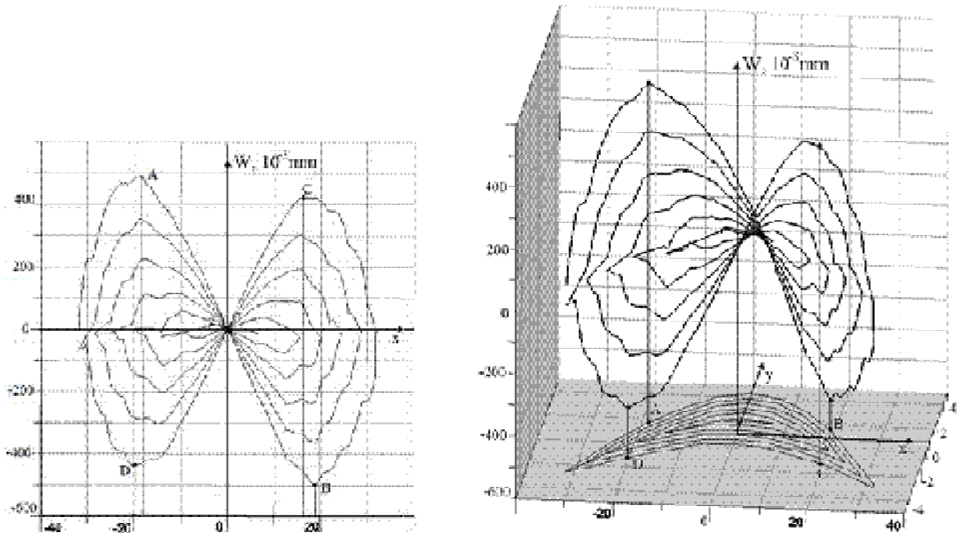


Рис. 4. Распределения перемещения W и напряжения σ_{yz} точек лопатки, составленных из слоев Bal-Al к оси лопатки

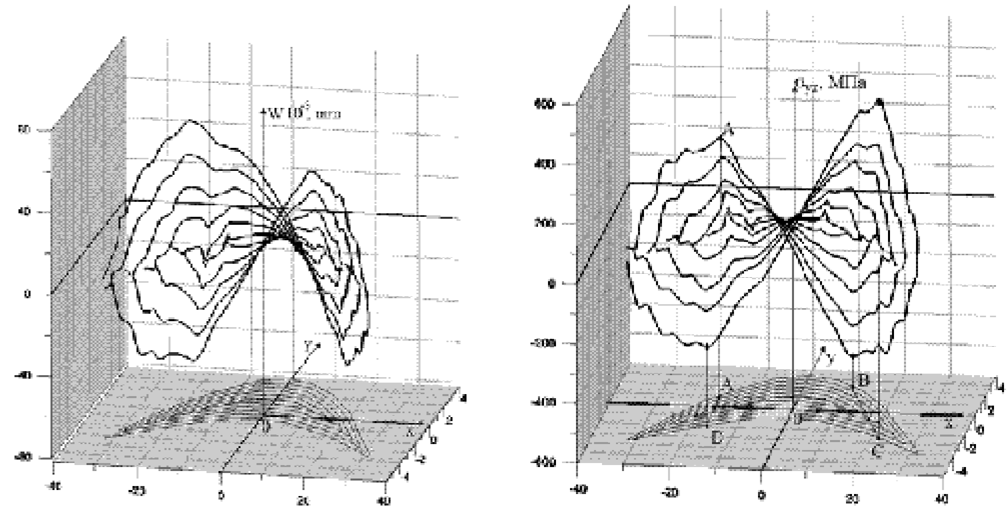


Рис. 5. Распределения перемещения W и напряжения σ_{yz} точек лопатки, составленных из слоев Bal(+45°,-45°,+30°, -30°,+15°,-15°)-Al к оси лопатки

Как видно из рис. 3 жесткость на кручение C_0 лопатки, составленной из чередующихся слоев однонаправлено-армированного бороалюминия и чистого алюминия (кривая 1) в 2.5 раза меньше жесткости C_0 лопатки, состоящей из чередующихся слоев бороалюминия, уложенных под углами ±45°, ±30°, ±15° к оси лопатки (кривая 3). Очевидно, варьируя углами укладки более жестких волокон, можно достичь еще более высоких уровней жесткости на кручение пера лопатки и равномерного распределения касательных напряжений.

Таким образом, в исследованных примерах показано, что путем выбора материала отдельных слоев или способа армирования в них можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций при одних и тех же физических оборотах ротора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев О.Б.* Обобщение теории тонких стержней // Труды ЛПИ им. М.И. Калинина. 1963. №226. С. 83-92.
2. *Магомаев Л.Д.* К теории кручения стержней с криволинейной осью // Прикладная механика. 1984. Т.20. №4. С. 68-74.
3. *Воробьев Ю.С., Шор Б.Ф.* Теория закрученных стержней. Киев: Наукова Думка,1983. 186 с.
4. *Саркисян В.С.* Метод решения задачи обобщенного кручения стержней. //Механика. Вып. 3. 1983. С.27-31.
5. *Биргер И.А.* Пространственное напряжение состояние в лопатках начальной закруткой //Тр. ЦИАМ. 1982. №996. С. 7-23.
6. *Нуримбетов А.У.* Автоматизированное проектирование раскроя деталей произвольного поперечного сечения из слоистых композиционных материалов // Вестник РУДН. Серия “Инженерные исследования”. 2009. №4. С.57-66.
7. *Лехницкий С.Т.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1971. 415 с.

8. *Лехницкий С.Т.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 240 с.
9. *Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
10. *Нуримбетов А.У.* Кручение многослойного призматического анизотропного стержня, составленного из ортотропных материалов //Вестник РУДН. Серия "Математика. Информатика. Физика". 2009. № 4. С. 64-76.
11. *Нуримбетов А.У.* Решение задачи кручения слоистых композиционных стержней произвольного сечения методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. №4. С.24-30.
12. *Саркисян В.С.* Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. Ереван: ЕрГУ, 1970. 443 с.

THE TECHNICAL THEORY OF TORSION OF A COMPOSITE LAYERED CORE OF ANY SECTION

A.U. Nurimbetov

"MATI" – Russian State Technological University, Moscow,

Using geometrical parities Koshi it is received expressions for a component tenzor deformations at "the generalised torsion" for a layer i a multilayered core of any section. The decision of the equations under the set boundary conditions is found for each layer i in the form of a sedate number. It is received the resolving equations of a method of the approached decisions.

Keywords: torsion, a layered core, the composite material, the generalised torsion.

Alibek Nurimbetov, Candidate of Physics and Mathematics, the Scientific Trainee at the Mechanics of Machines and Mechanisms Department . E-mail: alibek_55@mail.ru.