

## БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЗУБА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

© 2010 И.Г. Браилов<sup>1</sup>, С.П. Андросов<sup>2</sup>, С.С. Адмаев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирская автомобильно-дорожная академия, г. Омск

<sup>2</sup>Омский государственный технический университет

Поступила в редакцию 18.03.10

В работе определены зависимости, выраженные векторными функциями, описывающие боковые эвольвентные поверхности прямозубых и косозубых зубьев цилиндрических зубчатых колес.

Ключевые слова: *зубчатое колесо, эвольвента, поверхность зуба, векторная функция*

Геометрию и кинематику прямозубой цилиндрической передачи принято рассматривать в одной торцевой плоскости, перпендикулярной к оси колеса. Такой подход является вполне допустимым, так как во всех плоскостях, перпендикулярных к осям сопряженных колес, имеют место одинаковые геометрические условия зацепления. Реальные зубья имеют и третье измерение, связанное с шириной зубчатого венца, и совершают движение в пространстве. Поэтому с точки зрения пространственного представления о характере взаимодействия сопряженных зубьев колес необходимо учитывать, что эти зубья имеют не точечный контакт, а линию контакта, не линию зацепления, а плоскость зацепления, не делительную окружность, а делительный цилиндр и т.д. [1]. К тому же относительно контакта между зубьями колес можно отметить, что фактически он имеет нелинейчатый характер, а принимает вид непрерывного пятна. Причиной этого явления могут быть погрешности изготовления и сборки, а также деформации зубьев, тел колес, валов и подшипниковых узлов передачи. Для косозубых передач пространственное представление о характере взаимодействия зубчатых колес является еще более предпочтительным. В таких передачах в разных торцевых сечениях колес условия зацепления различные.

Данная работа посвящена описанию боковой поверхности зуба цилиндрических зубчатых колес векторными функциями в параметрах станочных систем, что дает возможность использования аффинных преобразований в вопросах моделирования зубофрезерования [2]. Следует отметить, что в работе описывается не вся боковая поверхность зуба, а только ее эвольвентная поверхность без учета переходной поверхности,

*Браилов Иван Григорьевич, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной механики*

*Андросов Сергей Павлович, кандидат технических наук, доцент кафедры сопротивления материалов. E-mail: asp57@list.ru*

*Адмаев Сергей Сергеевич, аспирант*

соединяющей эвольвентную поверхность с поверхностью впадин.

Боковая поверхность прямого зуба представляет собой цилиндрическую эвольвентную поверхность. Для косого зуба боковая поверхность является винтовой эвольвентной поверхностью. В общем случае эту поверхность можно рассматривать в двух параметрических направлениях. Первое направление представляет собой перемещение по эвольвентному профилю зуба в его торцевом сечении. Второе направление определяется прямолинейным перемещением эвольвенты вдоль оси зубчатого колеса для прямозубых колес и винтовым перемещением – для косозубых колес. В координатной форме векторная функция эвольвенты записывается в следующем виде [3]:

$$\vec{r}_z = \begin{bmatrix} R_b \sin \varphi \\ R_b \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_b \varphi \cos \varphi \\ R_b \varphi \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $R_b$  – радиус основной окружности зубчатого колеса;  $\varphi$  – угол развернутости эвольвенты (рис. 1). Точка  $M_I$  на боковой поверхности прямого зуба описывается вектором

$$\vec{r} = \vec{r}_z + \vec{r}_{см}, \quad (2)$$

где  $\vec{r}_{см}$  – вектор смещения по оси  $OZ$ .

В координатной форме вектор  $\vec{r}$  запишется:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} R_b \sin \varphi \\ R_b \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_b \varphi \cos \varphi \\ R_b \varphi \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -V t \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $V$  – скорость перемещения конца вектора  $\vec{r}$  вдоль оси  $OZ$ ;  $t$  – время перемещения.

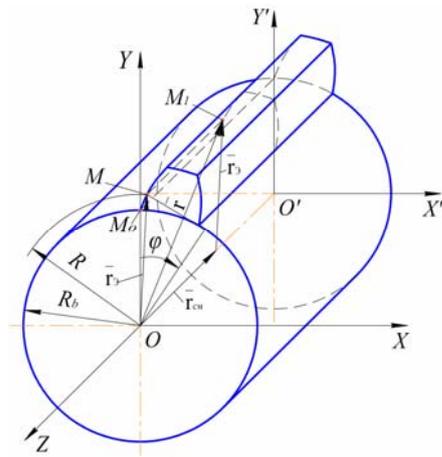


Рис. 1. Боковая поверхность прямого зуба

Зубья косозубого колеса в торцевом сечении имеют эвольвентный профиль. При этом на любом радиусе колеса совокупность точек, принадлежащих боковой поверхности зуба, в направлении его оси, образует винтовую линию. Другими словами, каждая точка эвольвенты при движении вдоль оси косозубого колеса совершает винтовое движение (рис. 2).

Винтовая линия на основном цилиндре зубчатого колеса радиуса  $R_b$  определяется формулой

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} R_b \sin \varphi_1 \\ R_b \cos \varphi_1 \\ -a \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\varphi_1$  – угол поворота проекции вектора  $\vec{r}$  на плоскость  $XOY$ ;  $a$  – параметр, характеризующий движение по винтовой линии вдоль оси колеса  $OZ$ .

Текущий параметрический угол  $\varphi_1$  изменяется от своего нулевого значения, до значения  $\varphi_{1max}$ , которое он принимает на тыльном торцевом сечении (рис. 2). Величина  $\varphi_{1max}$  зависит от значений угла наклона  $\beta_b$  линии зуба к оси колеса и ширины зубчатого венца  $b$ . В выражении (4) максимальное значение координаты вектора  $\vec{r}$  по оси  $OZ$  в принятой системе равняется по модулю ширине зубчатого венца

$$|-a \varphi_{1max}| = b \quad (5)$$

Длина дуги  $M'_0M''_0$  (рис. 2) равняется, с одной стороны  $b \operatorname{tg} \beta_b$ , а с другой –  $R_b \varphi_{1max}$ , то есть можно записать:

$$M'_0M''_0 = b \operatorname{tg} \beta_b = R_b \varphi_{1max} \quad (6)$$

Из формулы (6) находится максимальное значение угла поворота  $\varphi_1$ :

$$\varphi_{1max} = \frac{b}{R_b} \operatorname{tg} \beta_b \quad (7)$$

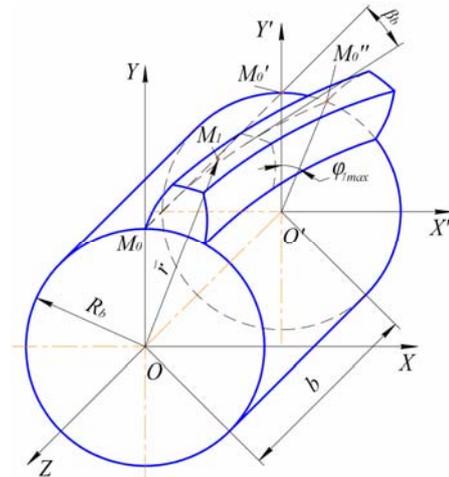


Рис. 2. Боковая поверхность косого зуба

С учетом выражения (7) параметр  $a$  определяется соотношением

$$a = \frac{b}{\varphi_{1max}} = \frac{V}{\omega} = \frac{R_b}{\operatorname{tg} \beta_b}, \quad (8)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения проекции вектора  $\vec{r}$  на плоскость  $XOY$  вокруг оси  $OZ$ .

Положение любой точки на эвольвентном профиле прямого зуба колеса определяется значением угла развернутости эвольвенты  $\varphi$  (рис. 1). Радиус  $R$  изменяется от значения радиуса  $R_b$  основного цилиндра до значения радиуса  $R_a$  цилиндра вершин зубьев колеса. Радиус  $R$  определяется как модуль векторной функции эвольвенты (1) и записывается выражением

$$R = R_b \sqrt{1 + \varphi^2} \quad (9)$$

Соответственно текущее значение угла  $\varphi$  определяется по формуле

$$\varphi = \sqrt{\left(\frac{R}{R_b}\right)^2 - 1} \quad (10)$$

Для косого зуба необходимо дополнительно учитывать, что каждая точка его эвольвентного профиля все время поворачивается в плоскости  $XOY$  относительно оси  $OZ$  на величину текущего угла  $\varphi_1$ . Поэтому после вычисления координат точки эвольвенты в любом ее положении необходимо найденный вектор повернуть на угол  $\varphi_1$  путем умножения его на матрицу поворота  $[M]$ . В результате в общем виде векторная функция винтовой эвольвентной поверхности косого зуба колеса запишется:

$$\vec{r} = [M] (\vec{r}_s + \vec{r}_{cm}) \quad (11)$$

Или в координатной форме

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\cdot \left( \begin{bmatrix} R_b \sin \varphi \\ R_b \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_b \varphi \cos \varphi \\ R_b \varphi \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \varphi_1 \end{bmatrix} \right). \quad (12)$$

С учетом преобразований выражения (12) векторная функция боковой эвольвентной поверхности зуба косозубого колеса окончательно опишется формулой

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} R_b (\sin(\varphi + \varphi_1) - \varphi \cos(\varphi + \varphi_1)) \\ -R_b (\cos(\varphi + \varphi_1) + \varphi \sin(\varphi + \varphi_1)) \\ -a \varphi_1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

В результате вектор  $\vec{r}$ , восстановленный в точку  $M_l$  винтовой эвольвентной поверхности (рис. 2), имеет относительно вектора эвольвенты два аффинных преобразования: поступательное перемещение вдоль оси зубчатого колеса и поворот относительно этой оси.

**Выводы:** запись эвольвентной поверхности зубчатых колес в координатной форме позволяет любые пространственные преобразования. Используя пространственное описание

поверхностей зубчатых колес, можно моделировать сложные многопараметрические и многофункциональные процессы зубообработки, а также различные эксплуатационные и технологические процессы. Например, возможен расчет пятна контакта при взаимодействии сопряженных зубьев колес. Кроме этого, рассмотрение зубьев колес в пространственном отображении дает возможность определить их бочкообразность, а также погрешности, возникающие при зубообработке.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Гавриленко, В.А.* Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. – М.: Машиностроение, 1969. – 432 с.
2. *Браилов, И.Г.* К вопросу моделирования зубофрезерования / *И.Г. Браилов, С.П. Андросов* // Наука и производство-2009: материалы Международ. науч. – практ. конф. в 2 ч. – Брянск: БГТУ, 2009. – Ч. 2. – С. 16-18.
3. *Браилов, И.Г.* Описание эвольвенты векторной функцией, выраженной в параметрах станочных систем / *И.Г. Браилов, С.П. Андросов* // Проблемы механики современных машин: материалы четвертой Международной научно – практической конференции в 3 т. – Улан-Удэ: ВСГТУ, 2009. – Т. 2. – С. 11-14.

## LATERAL AREA OF GEAR TEETH OF CYLINDRICAL GEARWHEELS

© 2010 I.G. Brailov<sup>1</sup>, S.P. Androsov<sup>2</sup>, S.S. Admaev<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Siberian Auto-road Academy, Omsk

<sup>2</sup> Omsk State Technical University

In the work dependences expressed by vector functions, describing the side involute surfaces of spur and helical cylindrical gearwheels are certain.

Key words: *gearwheel, evolute, surface of gear teeth, vector function*

---

*Ivan Brailov, Doctor of Technical Sciences, Professor at the Department of Applied Mechanics  
Sergey Androsov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Materials Resistance. E-mail: asp57@list.ru  
Sergey Admaev, Post-graduate Student*