

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ НА ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЯХ

© 2010 В.Г. Мельников, А.С. Едачев, Г.И. Мельников, С.Н. Шаховал

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий,
механики и оптики

Поступила в редакцию 30.03.2010

Представлен новый метод идентификации осевых и центробежных моментов инерции в точке тела, матрицы тензора инерции тела на устройствах с трением и аэродинамическим сопротивлением. Предложено исполнительное устройство и система реверсивно-симметричных программных движений, обеспечивающая определение инерционных параметров с точностью, не зависящей от трения. Предложено исполнительное устройство, осуществляющее метод.

Ключевые слова: *реверсивно-симметричное движение, собственное вращение, тензор инерции, программное управление, идентификация*

Работа посвящена экспериментальному определению тензора инерции автомобилей, самолетов и других изделий с использованием современных возможностей робототехники. Компоненты тензора инерции являются существенными константами динамических моделей движения тела в пространстве. В этой связи проблема определения инерционных параметров является важной. Тензор инерции, задаваемый центробежными и осевыми моментами инерции, находят экспериментально по 6 осевым моментам инерции относительно пучка из 6 осей [1], методы описаны в работах [1-10]. Проблема отрицательного влияния трения на точность обычно решается посредством усложнения конструкции, использования газовых подшипников, торсионных и мультифлярных подвесов, применения медленных движений.

В статье разрабатывается новый метод идентификации моментов и тензора инерции тела, использующий разгонно-тормозные реверсивно-симметричные вращения вокруг осей, обеспечивающие аналитическое исключение моментов трения из расчетных формул. Предложено исполнительное устройство с двумя электродвигателями.

Мельников Виталий Геннадиевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики. E-mail: melnikov@mail.ifmo.ru

Едачев Антон Сергеевич, магистр. E-mail: a.s.yedachev@mail.ru

Мельников Геннадий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики. E-mail: melnikov.ifmo@ya.ru

Шаховал Сергей Николаевич, аспирант. E-mail: splinterfiddler@gmail.com

Элементы тензора инерции и моменты инерции. Тензор инерции в точке O твердого тела в связанной с телом системе $Oxyz$ задают матрицей осевых и центробежных моментов инерции вида

$$J = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix}, I_x = \int_V (y^2 + z^2) \rho dV, \\ I_{xy} = I_{yx} = - \int_V \rho xy dV \quad (1)$$

Момент инерции тела относительно оси, заданной ортом \bar{e}_i , вектор-строкой $e_i = [e_{ix} \ e_{iy} \ e_{iz}]$, представляется в виде произведения вектор-строки $U = [I_x \ I_y \ I_z \ I_{xy} \ I_{yz} \ I_{xz}]$ и вектор-столбца A_i , составленного из квадратов и двойных произведений направляющих

$$UA_i = I_i, A_i = [e_{ix}^2 \ e_{iy}^2 \ e_{iz}^2 \ 2e_{ix}e_{iy} \ 2e_{iy}e_{iz} \ 2e_{ix}e_{iz}]^T, \\ i = 1, \dots, 6 \quad (2)$$

Рассмотрим виртуальный конус с осью Oz , углом (2α) при вершине O , на конусе равномерно распределим пять осей с ортами $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_5$, орт \bar{e}_6 направим вдоль оси Oz , орт \bar{e}_1 расположим в плоскости Oxz , а последующие орты получаем последовательно поворотами на угол $\beta=72^\circ$ вокруг Oz . Получаем

$$e_i = [\cos(i\beta - \beta), \sin(i\beta - \beta), \operatorname{ctg} \alpha] \sin \alpha, i = 1, \dots, 5,$$

$$e_6 = [0, 0, 1].$$

Посредством горизонтального объединения шести матричных равенств (2) получаем уравнение $UA=I_0$, и формулу для вектор-строки U :

$$U = I_0 B,$$

$$I_0 = [I_1, \dots, I_6],$$

$$A = [A_1, \dots, A_6],$$

$$B = A^{-1}, \det B = 1/\det A$$
(3)

Исполнительное устройство (рис. 1, рис. 2) состоит из сервопривода 1 с робастной системой управления, платформы 2, шагового двигателя 3, подъемника 4, шарнира 5, платформы 6 с закрепленным на ней изделием 7. По условиям эксплуатации желательно, чтобы угол α был небольшим, но с другой стороны при малом α имеем малое значение определителя $D(\alpha)=\det A$, т.е. – плохо обусловленную задачу [11]. На рис. 3 показан график значений определителя, представленного функцией $D(\alpha)=27,95 \sin^8 \alpha \cos^2 \alpha$, максимальное значение $D_{\max} \approx 2,29$ достигается в случае направления ортов по осям икосаэдра, при угле $\alpha_0 \approx 63,43^\circ$. Будем считать систему достаточно хорошо обусловленной при выполнении условия: $|D(\alpha)| \geq 0,5$, т.е. при значении угла из интервала $\alpha \in [40^\circ; 82]$ (рис. 3).

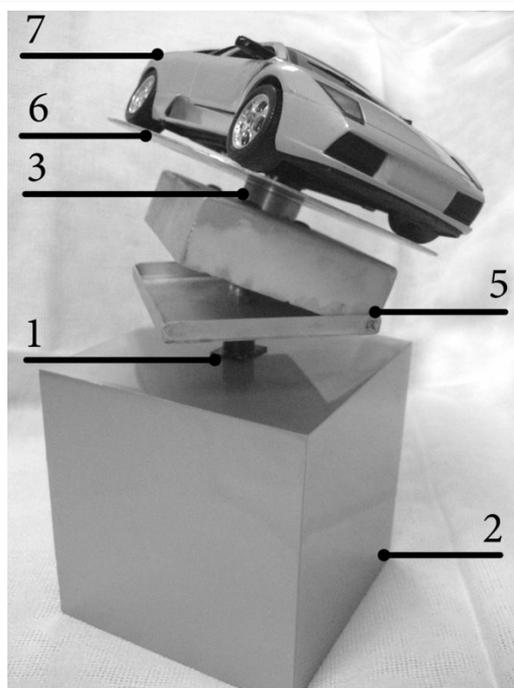


Рис. 2. Макет устройства

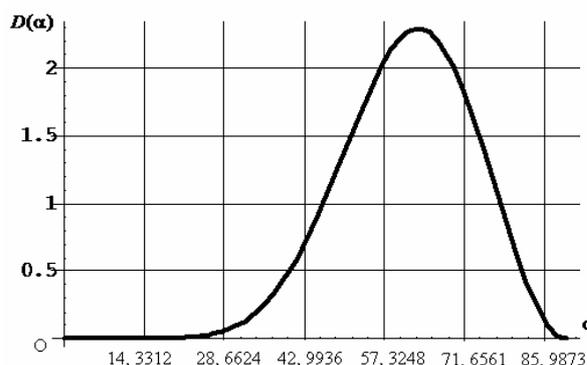


Рис. 3. График значений определителя

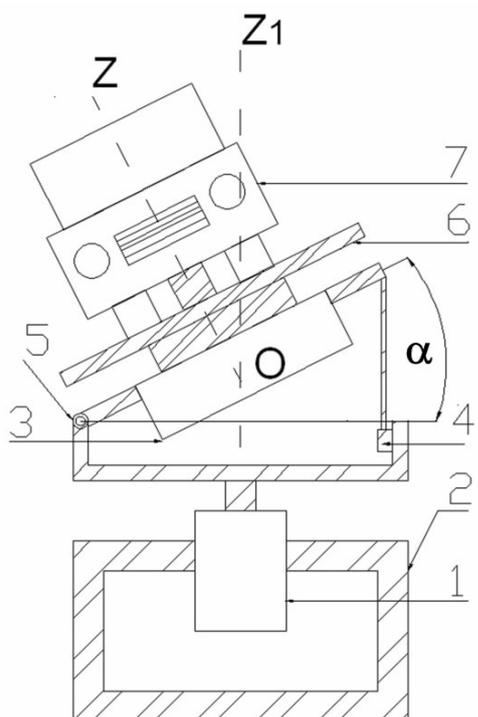


Рис. 1. Схема устройства

Расчетная формула для моментов инерции. Осевой момент инерции твердого тела будем определять на следующих реверсивных тормозных-разгонных вращениях, состоящих из замедленного вращения на угловом интервале $[\psi_0, \psi_1 = \psi_0 + \Delta]$, $\Delta > 0$ с повторением в обратном порядке вращения на интервале $[\psi_1, \psi_0]$. Торможение может быть неуправляемым, но measurable, допускается measurable выбег за пределы интервала до некоторого значения $\psi_r = \psi(t_r)$. Затем осуществляем обратное движение, рассчитанное по замеренному движению. Пусть методом точечной аппроксимации получено уравнение торможения $\psi = f(t)$ при $t \in [t_0, t_r]$, тогда уравнение обратного движения есть $\psi = f(t')$ при $t' = t_0 + t_r - t$. Работа сил тяжести равна нулю ввиду вертикальности оси вращения, поэтому

программные движения можно выполнять в любом ограниченном угловом интервале. По теореме кинетической энергии на тормозном и обратном вращении имеем уравнения

$$\begin{aligned} (I_0 + I)(\omega_1^2 - \omega_0^2) &= 2(A + V), \\ (I_0 + I)(\omega_0^2 - \omega_1^2) &= 2(A' + V') \quad (4) \\ \omega_1 &= \dot{\psi}(t_1), \omega_0 = \dot{\psi}(t_0) \end{aligned}$$

Здесь A, A' – работы крутящего момента на интервале $[\psi_0, \psi_1]$; V, V' – работы диссипативных сил, I – момент инерции изделия, I_0 – приведенный момент инерции исполнительного устройства. Вычитая почленно уравнения (4), получаем расчетную формулу, определяющую осевой момент инерции тела через разность работ крутящего момента

$$I = (A' - A)(\omega_0^2 - \omega_1^2)^{-1} - I_0 \quad (5)$$

Формула (5) не содержит работы диссипативных сил и может быть использована на динамически симметричных устройствах с существенным трением и аэродинамическим сопротивлением, удовлетворяющих условию равенства их работ на тормозном и обратном движении, что можно обеспечить симметричной оболочкой на изделии.

В конце первого эксперимента включается электродвигатель собственного вращения для поворота на угол $\Delta\varphi=72^\circ$ и установки изделия в новом угловом положении по отношению к оси Oz_1 . Выполняется 5 испытаний. Шестое испытание выполняем при установке $\alpha=0$ (рис. 1), где в расчетах следует применить формулу Гюйгенса-Штейнера. Итак, по формуле типа (5) находим 6 осевых моментов инерций изделия I_1, \dots, I_6 , при этом осевые моменты инерции устройства I_{01}, \dots, I_{06} находят заранее на отдельных испытаниях устройства без нагрузки.

Допустим, что замеряется потребление двигателем электроэнергии E и E' на рассматриваемых угловых интервалах. Она расходуется на механические работы $A + V$ и $A' + V'$, а также – на омические потери и на изменение электромагнитного поля

$$\begin{aligned} E &= A + V + \delta, \\ E' &= A' + V' + \delta', \\ A' - A &= E' - E - (\delta' - \delta), \delta' \geq \delta \end{aligned}$$

Подставляя последнее равенство в (5), получим энергетическую формулу

$$I = (E - E' + \delta - \delta')(\omega_0^2 - \omega_1^2)^{-1} - I_0, \quad (6)$$

выражающую момент инерции тела относительно каждой оси через разность потребляемой электроэнергии и разность омических потерь в контурах. Потери δ', δ можно оценить на испытании с эталонным телом.

Пусть угол φ не фиксирован, медленно изменяется, обеспечивая непрерывное изменение положения в теле оси Oz_1 . Тогда имеем угловую скорость сферического движения в виде $\bar{\omega} = \dot{\psi}\bar{k}_1 + \dot{\phi}\bar{k} \approx \dot{\psi}\bar{k}_1$, и с малой погрешностью можно применить формулы типа (5) на интервалах времени $[t_i, t_{i+1}]$, $i=1, \dots, 5$, на которых φ получает изменение 72° .

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 06-08-01338-а и гранта Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга за 2009г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Гернет, М.М. Определение моментов инерции / М.М. Гернет, В.Ф. Ратобильский. - М.: Машиностроение, 1969. – 130 с.
2. Previati, G. Advances on inertia tensor and centre of gravity measurement: The INTENSO+ system / G. Previati, G. Mastinu, M. Gobbi // SAWE paper. – 2009. - № 3465.
3. Беляков, А.О. Определение моментов инерции крупногабаритных тел по колебаниям в упругом подвесе / А.О. Беляков, А.П. Сеиранян // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. - № 2. – С. 49-62.
4. Bogdanov, V.V. A Suite for Measuring Mass, Coordinates of the Center of Mass, and Moments of Inertia of Engineering Components / V.V. Bogdanov, V.S. Volobuev, A.I. Kudryashov, V.V. Travin // Measurement Techniques. – 2002. - V. 45, № 2. – P. 168-172.
5. Hahn, H. Development of a measurement robot for identifying all inertia parameters of a rigid body in a single experiment / H. Hahn, M. Niebergall // IEEE Trans. Control Systems Technol. – 2001. - N9 (2). – P. 416-423.
6. Банит, Ю.Р. Определение тензора инерции Международной космической станции по телеметрической информации / Ю.Р. Банит, М.Ю. Беляев, Т.А. Добринская и др. // Космические исследования. – 2005. – Т. 43, № 2. – С. 135-146.
7. Алексеев, К.Б. Определение динамических параметров космического летательного аппарата по признакам динамической асимметрии / К.Б. Алексеев, А.В. Шалян // Машиностроение и инженерное образование. – 2007. - № 2. – С. 53-58.

8. Мельников, В.Г. Способ определения тензора инерции тела. // Патент РФ на изобр. – 2009, №2262678, Бюлл. №6 от 27.02. 2009 – С.35.
9. Melnikov, V.G. A new method for inertia tensor and center of gravity identification // *Nonlinear Analysis*. – 2005. – V. 63. - № 5-7 – P. 1377-1382.
10. Мельников, В.Г. Энергетический метод параметрической идентификации тензоров инерции тел // *Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики*. – 2010. - № 1. – С. 59-63.
11. Шаховал, С.Н. Исследование матричных алгебраических уравнений, определяющих тензор инерции через осевые моменты инерции // *Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики*. – 2008. - № 47. – С. 196-199.

METHOD OF IDENTIFICATION THE INERTIA TENSOR ON PROGRAM MOVEMENTS

© 2010 V.G. Melnikov, A.S. Edachev, G.I. Melnikov, S.N. Shahoval

St.-Petersburg State University of Information Technologies, Mechanics and Optics

The new method of identification the axial and centrifugal moments of inertia in a point of a body, a tensor matrix is presented to inertia of a body on devices with friction and aerodynamic resistance. The executive device and the system of reversible-symmetric program movements providing definition of inertial parameters with accuracy, not dependent on friction is offered. The executive device which is carrying out a method is offered.

Key words: reversible-symmetric movement, own rotation, inertia tensor, program management, identification

Vitaliy Melnikov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Theoretical and Applied Mechanics Department. E-mail: melnikov@mail.ifmo.ru
Anton Edachev, Master. E-mail: a.s.yedachev@mail.ru
Gennadiy Melnikov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Theoretical and Applied Mechanics Department. E-mail: melnikov.ifmo@ya.ru
Sergey Shahoval, Post-graduate Student. E-mail: splinterfiddler@gmail.com