УДК 631.360

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ДВАЖДЫ КОАКСИАЛЬНЫХ ПРУЖИН СЖАТИЯ

© 2010 С.М. Яхин, А.П. Мартьянов, А.А. Мартьянов

Казанский государственный аграрный университет

Поступила в редакцию 27.03.2010

В статье приводится анализ конструкции состоящей из трех пружин, вставленных друг в друга. Дается методика определения внутренних силовых факторов – крутящих моментов (или внутренних сил), позволяющих рационально спроектировать такую конструкцию и определить несущую способность (или критические силы или крутящие моменты) каждой пружины отдельно.

Ключевые слова: *момент инерции, внутренние силы, коаксиальные пружины, совместность деформаций*

Расчет коаксильных пружин сжатия не приводится в современной литературе, кроме известных классических методов расчёта пружин сжатия, работающих на деформацию кручения. Однопружинные конструкции были рассмотрены в работах авторов [1, 2] и предложены для реализации в работе [3]. Двухпружинные конструкции были рассмотрены в работах [4-6]. В настоящей работе дается теоретический расчёт конструкции, состоящей из трёх пружин сжатия (рис. 1).

Рассматриваемые пружины могут быть односторонней (правой или левой) или разносторонней завивки, что существенно влияет на распределение деформаций в пружинах и определение в них внутренних силовых факторов в зависимости от направления крутящего момента. Углом наклона винтовой линии к горизонтальной плоскости будем пренебрегать. При таком подходе каждые три смежных сечения при рассечении их вертикальной плоскостью будут находиться на одинаковом деформированном положении (рис. 2). В сечениях пружин возникают внутренние крутящие моменты – равнодействующие которых обозначены через $T_н$ – в сечении проволоки наружной пружины, $T_с$ – в сечении проволоки средней пружины и $T_в$ –в сечении проволоки внутренней пружины.

Принятые обозначения: F – приложенная внешняя сила; $F_н$, $F_с$, $F_в$ – составляющие силы F в наружной, средней и внутренней пружинах; $R_{н.}$ – наружный радиус пружинного вала, пружины; $r_н$, $r_с$, $r_в$ – средний радиус наружной, средней и внутренней винтовых линий проволок пружин; ℓ – высота цилиндрической части пружин; $\iota_н$, $\iota_с$, $\iota_в$ – шаг винтовой линии проволок наружной, средней и внутренней пружины; $E_н$, $E_с$, $E_в$ – модули упругости первого рода наружной, средней и внутренней пружины; $T_н$, $T_с$, $T_в$ – равнодействующие внутренних крутящих моментов или сил в наружной , средней и во внутренней пружинах; $A_н=E_нJ_{ни}$, $A_с=E_сJ_{си}$, $A_в=E_вJ_{ви}$ – изгибные жесткости наружной, средней и внутренней площади поперечных сечений проволок пружин; $G_н$, $G_с$, $G_в$ – модули сдвига проволок наружной, средней и внутренней пружины; $J_н$, $J_с$, $J_в$ – полярные моменты инерции при кручении; $r_{нп}$, $r_{сп}$, $r_{вп}$ – радиусы проволоки винтовых линий наружной пружины; $d\lambda_н$, $d\lambda_с$, $d\lambda_в$– элементарные осадки пружин.

Для определения усилий в каждой пружине возьмем сумму проекций всех сил в пружинах на направление центральной оси Z. Из этой суммы следует

$$F = F_н + F_с + F_в. \qquad (1)$$

Задача оказывается дважды статически неопределимой. Для раскрытия статической неопределимости воспользуемся принципом совместности деформаций трех смежных витков [4, 6]. Из рис. 2 видно, что при уменьшении или укорочении на текущей длине λ каждое второе смежное сечение получает приращение $d\lambda$. При совместной работе эти приращения будут одинаковыми, т.е. $d\lambda_н=d\lambda_с=d\lambda_в$ или

$$r_нT_нds_н / G_нJ_н = r_сT_сds_с / G_сJ_с= r_вT_вds_в / G_вJ_в; \qquad (2)$$

После интегрирования этого уравнения получим

$$r_нT_нs_н / G_нJ_н = r_сT_сs_с / G_сJ_с = r_вT_вs_в / G_вJ_в. \qquad (3)$$

Величину крутящего момента в каждой пружине определяем как произведение этой силы в этой пружине на соответствующий радиус винтовой линии. С учетом принятых обозначений из уравнения (3) следует

$$F_н = F_в r^2_в s_в G_нJ_н / r^2_н s_н G_вJ_в,$$

Яхин Сергей Мирбатович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория машин и механизмов»
Мартьянов Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов». E-mail: IMTS 07@ mail.ru
Мартьянов Андрей Анатольевич, заведующий лабораториями кафедры «Сопротивление материалов»

$$F_c = F_в\, r^2_в\, s_в\, G_c J_c / r^2_c\, s_c\, G_в J_в; \qquad (4)$$

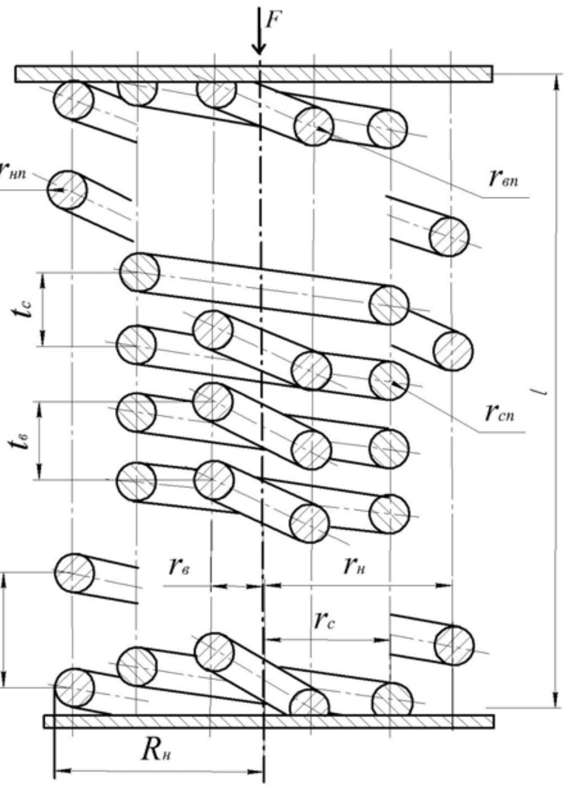

Рис. 1. Расчетная схема вала, состоящего из трёх завитых пружин, совместно работающих на кручение

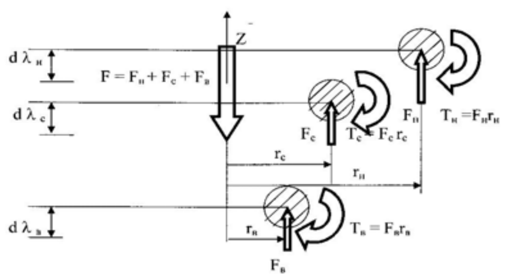

Рис. 2. Отсеченные вертикальной плоскостью три смежных витка пружины с внутренними крутящими моментами

Подставляя это соотношение в уравнение (1), найдем

$$F_в = F/a, \qquad (5)$$

где $a=1+ r^2_в s_в G_н J_н / r^2_н s_н G_в J_в + r^2_в\, s_в\, G_c J_c / r^2_c\, s_c\, G_в J_в$.

Равнодействующие внутренних сил в наружной и средней пружине будут равны:

$$F_н = F(r^2_в s_в G_н J_н / r^2_н s_н G_в J_в) / a,$$
$$F_c = F(r^2_в s_в G_c J_c / r^2_c s_c G_в J_в) / a; \qquad (6)$$

Далее легко находятся внутренние крутящие моменты в проволоках пружин. Расчет на прочность при кручении каждой пружины общеизвестен. В данных же задачах гибкость проволоки пружин будет соответствовать стержням средней и большой длины, что требует расчета на устойчивость при кручении проволок пружин. Основываемся на предположениях, что под действием крутящего момента T происходит искривление проволоки пружины и пружина находится во втором состоянии равновесия. С учетом этого уравнения Кирхгофа-Клебша для одной – любой (индексы пружин опускаем и делаем выводы в общем виде) пружины приведут к виду [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{Ad^2u}{dS^2} = -\dfrac{Tdv}{dS} + \delta F_1 \\ \dfrac{Ad^2v}{dS^2} = \dfrac{Tdu}{dS} + \delta F_2 \end{cases}; \qquad (8)$$

Здесь u и v – перемещения по осям x и y [4], A = EJ – изгибная жесткость проволок пружин. Величинами δF_1 и δF_2 пренебрегаем из-за их малости. Решением будет:

$$\begin{cases} u = C_1 \cos\alpha S + C_2 \sin\alpha S + C_3 \\ v = -C_1 \sin\alpha S + C_2 \cos\alpha S + C_4 \end{cases} \qquad (9)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования.

$$\lambda = T / A, \qquad (10)$$

Принимая условия закрепления концевых сечений для пружин по типу шарнирных опор, граничные условия можно записать в двух вариантах [6]:

$$\begin{cases} 1) u = v = 0 ... при ... S = 0, ... S = 2\pi rn \\ 2) w = \sqrt{v^2 + u^2} = 0 ... при ... S = 0, ... S = 2\pi rn \end{cases}$$
$$(11)$$

где n – количество витков пружины, r – радиус винтовой линии пружины. Оба варианта приведут к равенству

$$\sin\lambda S = 0. \qquad (12)$$

Беря наименьший положительный корень равенства, получим

$$\lambda S = \pi m, \qquad (13)$$

где m – целое положительное число.

При m=1 критические значения крутящего момента с длиной проволоки выразятся одной зависимостью вида:

$$T_{cr} = 2\pi\ A\ / S\ . \qquad (14)$$

Здесь введены два значения критических параметров вместо одного параметра критической длины, что является равносильным. Применительно к наружной и внутренней пружинам будем иметь:

$$T_{HCr} = 2\pi\ E_H J_{HИ} / S_H,$$
$$T_{CCr} = 2\pi\ E_C J_{CИ} / S_C, \qquad (15)$$
$$T_{BCr} = 2\pi\ E_B J_{BИ} / S_B$$

По зависимостям (5) и (6) определим следующие критические значения крутящих моментов в наружной, внутренней и средней пружинах:

$$\mathrm{T_{HCr}} = \mathrm{F_{CrH} r_H},\ \mathrm{T_{BCr}} = \mathrm{F_{CrB} r_B},\ \mathrm{T_{CCr}} = \mathrm{F_{CrC} r_C} \qquad (16)$$

и соответствующие значения критических сил:

$$\begin{cases} F_{crв} = \dfrac{2\pi a E_B J_{BИ}}{r_B S_B}; F_{crн} = \dfrac{2\pi a (r_н^2 s_н G_B J_B) E_н J_{HИ}}{b S_н r_н}; \\ F_{crc} = \dfrac{2\pi a (r_н^2 s_н G_B J_B) E_c J_{CИ}}{b S_c r_c} \end{cases} \qquad (17)$$

где $b = r^2_в s_в G_н J_н$.

По зависимостям (17) можно сделать заключение, какая из трех пружин потеряет несущую способность первой или и с каким запасом работают две другие пружины. После потери устойчивости или несущей способности одной из пружин теряется несущая способность всей конструкции, если полную нагрузку не примут на себя другие пружины.

Выводы:

1. Потеря устойчивости цилиндрических пружин сжатия и кручения происходит по разветвленным формам равновесия, у которых при больших гибкостях критические напряжения значительно меньше допускаемых.
2. Значения критических сил и моментов определяют безотказную область работы пружин, за пределами которой теряется работоспособность за счёт быстрого (почти мгновенного) роста деформаций.
3. Из полученных зависимостей для критических крутящих моментов и сил легко получаются их значения для одной пружины. В частных случаях из них вытекают формулы Греенхилла и Л.Эйлера.
4. Валы сплошного круглого поперечного сечения с успехом можно заменить пружинными валами (Патент РФ № 37002 от 10.10.2004), что приводит к замене деформации кручения на деформацию растяжения или сжатия и к уменьшению энергетических затрат при работе данной конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Мартьянов, А.П.* О потере несущей способности цилиндрических пружин сжатия. / *А.П. Мартьянов, С.А.Мартьянов, С.В.Яковлев, И.В. Максимов* // Техника в сельском хозяйстве. – 2009. - №1. – С. 39-40.
2. *Мартьянов, А.П.* Оценка надежности цилиндрических пружин при сложном нагружении / *А.П. Мартьянов, О.Ю. Маркин, С.М Яхин, С.А.Мартьянов* // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 2010. - № 1. – С. 50-52.
3. *Мартьянов, А.П.* Снижение несущей способности цилиндрических пружин кручения / *А.П. Мартьянов, С.М. Яхин С.А.Мартьянов, С.В.Яковлев* // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – 2008. - №7. – С. 43-44.
4. *Мартьянов, А.П.* Определение силовых параметров в коаксиальных цилиндрических пружинах / *А.П. Мартьянов, С.М. Яхин, С.А. Мартьянов, И.В. Максимов* // Механизация и электрификация сельского хозяйства. – 2009. - № 1. – С. 37-38.
5. *Мартьянов, А.П.* Оценка надежности работы коаксиальных пружин кручения / *А.П. Мартьянов, С.М. Яхин* // Международный научный журнал Минсельхоза РФ. –2008. - №3. – С. 33-36.
6. *Мартьянов, А.П.* О потере несущей способности (устойчивости) составных пружин сжатия / *А.П. Мартьянов, С.А. Мартьянов, И.В. Максимов* // Автомобильная промышленность. – 2008. - № 11. – С. 16-18.

DEFINITION OF CARRYING CAPACITY OF TWICE COAXIAL COMPRESSION SPRINGS

© 2010 S.M. Yahin, A.P. Martyanov, A.A. Martyanov
Kazan State Agrarian University

In article the analysis of construction consisting of three springs inserted in each other is resulted. The method of definition of internal power factors - twisting moments (or internal forces) is given, allowing rationally to design such construction and to define carrying capacity (either critical forces or twisting moments) of each spring separately.

Key words: *moment of inertia, internal forces, coaxial springs, jointness of deformations*

Sergey Yahin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor at the Department "Theory of Machines and Mechanisms"
Anatoliy Martyanov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department "Resistance of Materials". E-mail: IMTS 07@ mail.ru
Andrey Martyanov, Chief of Laboratories at the Department "Resistance of Materials"