

ИССЛЕДОВАНИЕ СЦЕНАРИЯ ПЕРЕХОДА К ХАОСУ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ОСОБОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2010 А.А. Кренц¹, Н.Е. Молевич²

¹Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

²Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 11.01.2010

Лазерные системы в режиме стационарной генерации описываются особой замкнутой кривой на фазовой плоскости. Для таких динамических систем описан новый вид бифуркации особой окружности в двумерный тор. Найдены условия перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения тора. Ключевые слова: лазер, нелинейная динамика, бифуркация, хаос.

Открытие странного аттрактора связывают обычно с работой Лоренца [1], в которой были обнаружены и исследованы хаотические решения нелинейных уравнений, описывающих процесс конвекции. Однако, ещё раньше хаотические решения были численно получены Грасюком и Ораевским при решении трёх точечных уравнений неадиабатической теории лазеров [2 и приведённые в этой работе ссылки]. Как было затем показано Хакеном [3], эта модель лазера математически точно совпадает с более поздней моделью Лоренца. После этой работы было осознано, что лазер принадлежит к числу систем способным демонстрировать сложное хаотическое поведение и является удобным объектом для исследования различных сценариев перехода к хаосу, в частности, сценариев Фейгенбаума (каскад бифуркаций удвоения периода при изменении управляющего параметра) и Рюеля-Тakens (образование и последующее разрушение двумерного эргодического тора, соответствующего квазипериодическим решениям)[4]. Все эти сценарии могут реализоваться уже в динамической системе с 1.5 степенями свободы, то есть могут быть описаны тремя обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями. Системы с размерностью фазового пространства $n \geq 4$ являются гораздо менее изученными, чем системы с меньшей размерностью. В них могут реализовываться более сложные сценарии перехода к хаосу, например путём каскада бифуркаций удвоения тора. В [5] найдены условия бифуркации удвоения тора в модифицированной модели инерционного генератора Анищенко-

Астахова. В [6] впервые предложена автономная точечная модель, описывающая бифуркацию удвоения тора в двухмодовом лазере с насыщающимся фильтром.

В настоящей работе исследованы бифуркации и сценарии перехода к хаосу через удвоение тора в моделирующей генерации лазера с отстройкой частоты динамической системе, имеющей стационарное состояние в виде особой кривой.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла - Блоха с адиабатически исключенной поляризацией и отстройкой частоты:

$$\frac{\partial E}{\partial t} - i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\nu}{2} \left(\frac{N}{1 + \Delta_0^2} - 1 \right) (E - iE\Delta_0),$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = N_{in} - N \left(1 + \frac{J}{1 + \Delta_0^2} \right). \quad (1)$$

Предполагается также, что генерация происходит на одной продольной моде резонатора Фабри-Перо. Здесь E – медленно меняющаяся амплитуда поля в широкоапертурном лазере в одномерном (планарном) приближении, обезразмеренная на величину E_s , E_s – амплитуда поля насыщения в активной среде, $N = g / g_t$; g , g_t – коэффициенты усиления активной среды на центральной частоте лазерного перехода и потери, усредненные по длине резонатора; безразмерное время t и координата x связаны с размерными величинами t_d и x_d , как $t = t_d / T_i$, $x = x_d (2k / T_i c)^{1/2}$, k – волновое число; c – скорость света; T_i – время релаксации населенности уровней активной среды; $\nu = c T_i g_t$ – коэффициент, определяющий отношение времени релаксации населенности активной среды ко времени жизни фотонов в резонаторе; $\Delta_0 = (\omega_0 - \omega) T_p$ – отстройка частоты генерации от центра линии усиления АС, обезразмеренная на полуширину линии усиления; T_p – время

Кренц Антон Анатольевич, инженер, аспирант кафедры физики СГАУ. E-mail: krenz86@mail.ru

Молевич Нонна Евгеньевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, заведующая теоретическим сектором СФ ФИАН.

E-mail: molevich@fian.smr.ru

релаксации поляризации; $J = |E|^2$, $N_{un} = g_{un} / g_l$, g_{un} – ненасыщенный коэффициент усиления на частоте ω_0 .

Запишем исходную систему уравнений в автономной системе координат ($\xi = t - \beta x$, где $w = 1/\beta$ – скорость волны, распространяющейся в поперечном к оси резонатора направлении) и получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{d\xi} &= Y, \\ \frac{dE_2}{d\xi} &= Z, \\ \frac{dN}{d\xi} &= N_{un} - N \left[1 + \frac{E_1^2 + E_2^2}{1 + \Delta_0^2} \right], \\ \frac{dY}{d\xi} &= -\frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{N}{1 + \Delta_0^2} - 1 \right) (E_2 - \Delta_0 E_1) - Z \right], \\ \frac{dZ}{d\xi} &= \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{N}{1 + \Delta_0^2} - 1 \right) (E_1 + \Delta_0 E_2) - Y \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Нетривиальный стационарный режим генерации с интенсивностью J_{st} соответствует особой окружности ($E_{1st}^2 + E_{2st}^2 = J_{st} = N_{un} - 1 - \Delta_0^2$, $N_{st} = 1 + \Delta_0^2$, $Y_{st} = 0$, $Z_{st} = 0$) в фазовом объеме. Отметим, что подобная особая окружность на фазой плоскости всегда возникает при описании стационарной генерации. В [7] показано, что стационарное состояние (J_{st}, N_{st}) становится неустойчивым при

$$\beta > \beta_{bif} = \left[-\frac{(1 + I_{st})\Delta_0}{(1 + I_{st})^2 + \Delta_0^2 \nu I_{st}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$I_{st} = \frac{J_{st}}{1 + \Delta_0^2}, \Delta_0 < 0.$$

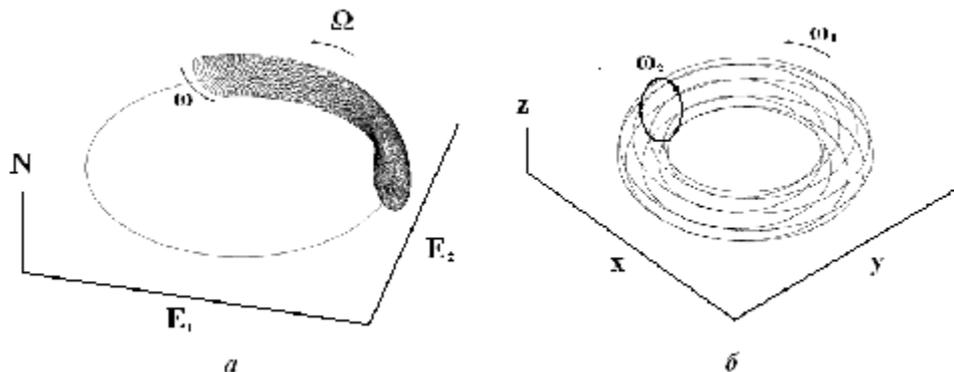


Рис. 1. Бифуркация рождения двумерного тора: а – из особой кривой; б – из предельного цикла.

При $\beta = \beta_{bif}$ на фазовой плоскости (J, N) происходит бифуркация Андронова-Хопфа и рождение предельного цикла бесконечно малой амплитуды. В результате этой бифуркации рождается семейство периодических волн интенсивности малой амплитуды $J(\xi)$, бегущих поперёк апертуры со скоростью w_{cr} . В точке бифуркации значение частоты модуляции интенсивности и коэффициента усиления соответствует

$$\omega_{bif} = \sqrt{\frac{N_{un}^2 + \Delta_0 \nu I_{st}}{|\Delta_0|}}.$$

В пространстве (E_1, E_2, N) точке бифуркации соответствует структурно неустойчивый тор, бесконечно малого сечения. При $\beta > \beta_{bif}$ тор “разбухает”, подобно надуваемой шине. При этом фазовая точка движется с частотой $\omega \sim \omega_{bif}$ вокруг особой кривой и с частотой $\Omega \ll \omega_{bif}$ вдоль особой кривой (рис. 1а). Такой динамический режим соответствует квазипериодическим волнам оптического поля $E_1(\xi), E_2(\xi)$. Ранее была известна и широко описана в литературе бифуркация периодического режима частоты Ω_1 в квазипериодический с несоизмеримыми частотами Ω_1, Ω_2 , причём $\Omega_2 < \Omega_1$. В фазовом пространстве при этом предельный цикл сменяется устойчивым двумерным тором. Фазовые траектории раскручиваются в направлении прежнего предельного цикла и медленно накручиваются на тор (рис. 1б).

Система (2) описывает бифуркацию нового типа: непростое стационарное состояние в виде особой замкнутой кривой “структурно неустойчивый трёхмерный тор – устойчивый двумерный тор”. Как показано на рис. 2а, сигнатура спектра Ляпуновских характеристических показателей λ_i меняется при этой бифуркации (точка А) как

$$0 \text{-----} \Rightarrow 000 \text{---} \Rightarrow 00 \text{----}$$

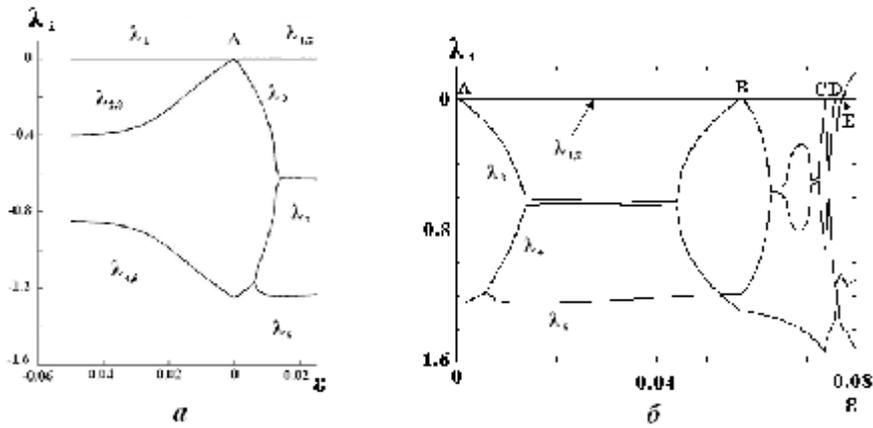


Рис. 2. Спектр Ляпуновских характеристических показателей

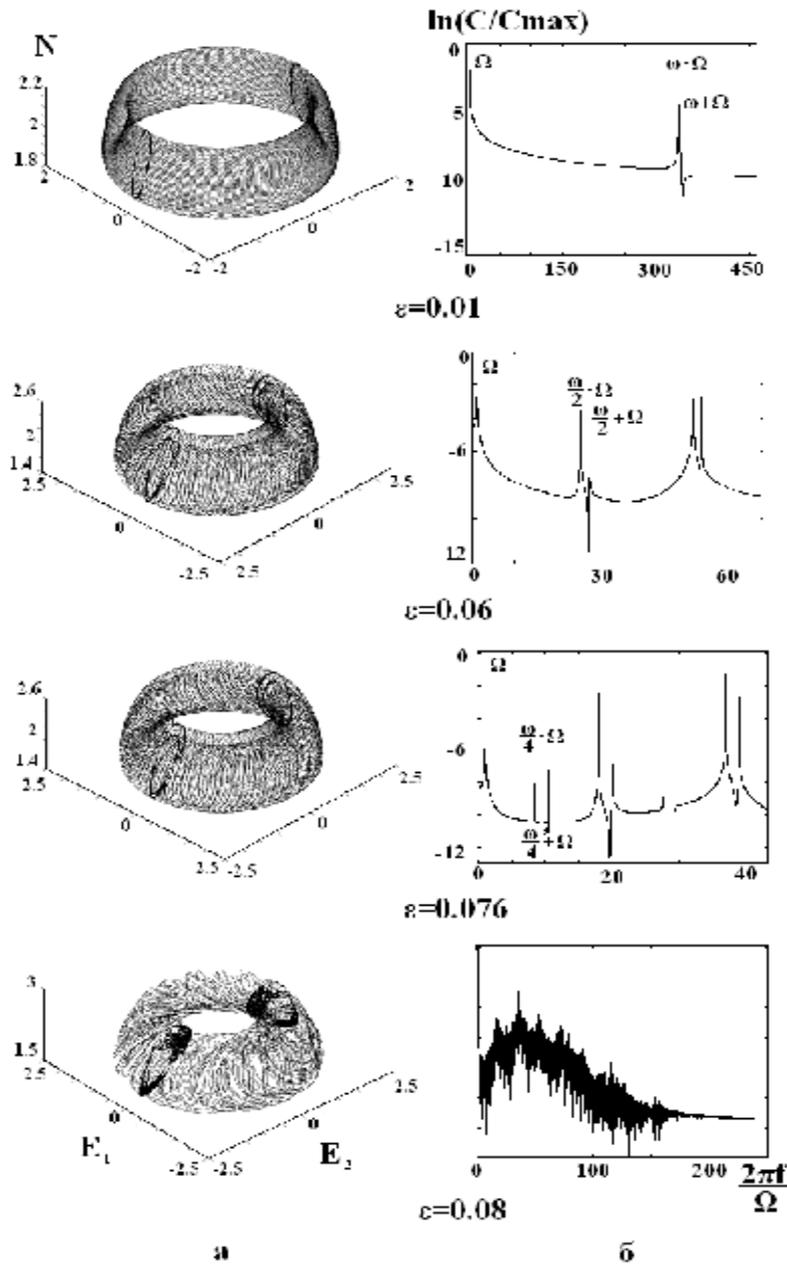


Рис. 3. Последовательность бифуркаций удвоения тора при изменении параметра ε в пространстве (E_1, E_2, N) :
 а – фазовый объем, б – спектр колебаний E_1 ;

C – мощность спектра, C_{\max} – максимальное значение мощности, f – линейная частота

Направление фазовых траекторий на торе тоже другое (рис. 1а.)

На рис. 3, 4 показаны последующие бифуркации тора при изменении управляющего параметра $\varepsilon = (\beta - \beta_{bif}) / \beta_{bif}$.

Для наглядности использовались проекции исходного пятимерного пространства в два разных трёхмерных фазовых подпространства. Анализ полученных фазовых портретов и спектров, а также построенных отображений Пуанкаре, позволяет утверждать, что при увеличении управляющего параметра происходит каскад бифуркаций удвоения периода тора, приводящий к хаотическому режиму. О наступлении хаотического режима свидетельствует сплошной спектр, плотное заполне-

ние “бабочки” в сечении Пуанкаре, а также карта характеристических Ляпуновских показателей (рис.2). Из рис. 2 следует, что в точках бифуркаций А, В, С и D рождается структурно неустойчивый трехмерный тор, который, разрушаясь, порождает устойчивый удвоенный двумерный тор. В точке Е старший показатель Ляпунова становится положительным, а сумма показателей Ляпунова по-прежнему отрицательной. Это как раз свидетельствует о возникновении странного аттрактора и реализации режима динамического хаоса.

Таким образом, показано, что в динамической системе с замкнутой особой кривой возможно образование двумерного тора и переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода тора.

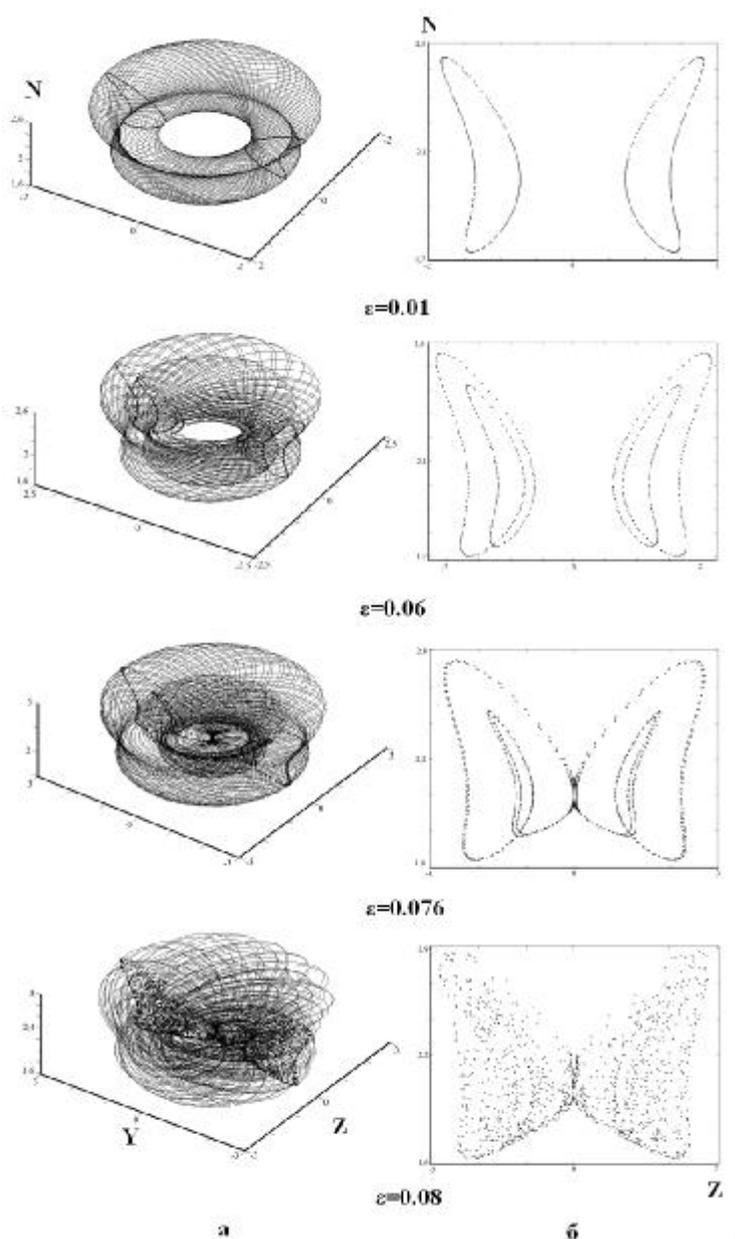


Рис. 4. Последовательность бифуркаций удвоения тора при изменении параметра ε в пространстве (Y, Z, N) : а – фазовый объём, б – сечение Пуанкаре

Работа поддержана Федеральной целевой программой “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009 – 2013 годы, НК-387 (23), аналитической целевой программой “Развитие научного потенциала высшей школы” (2009 – 2010 гг.), проект 2.1.1/309, НОЦ 14.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lorenz E.N.* Deterministic Nonperiodic Flow // *J.Atm.Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130-141.
2. *Грасюк А.З., Оравский А.Н.* Переходные процессы в молекулярном генераторе // *Радиотехника и электроника.* 1964. Т. 9. № 3. С. 524.
3. *Haken H.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers // *Phys. Lett.* 1975. Vol. A-53. P. 77-78.
4. *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров: М.: Наука. Физматлит, 1999. 368 с.
5. *Анищенко В.С., Николаев С.М.* Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора // *Письма ЖТФ.* 2005. Т.31, № 19. С. 88-94.
6. *Letellier C., Bennoud M., Martel G.* Intermittency and period-doubling cascade on tori in a bimode laser model // *Chaos, solitons and fractals.* 2007. Vol. 33. P. 782 – 794.
7. *Заикин, А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е.* Периодические автоволновые структуры в широкоапертурном лазере с отстройкой частоты. 1. Бифуркационный анализ // *Квантовая электроника.* 1999. Т. 27. №3. С. 246 –248.

INVESTIGATION OF THE SCENARIO OF THE PASSAGE TO CHAOS IN THE DYNAMICAL SYSTEM WITH THE CRITICAL CIRCUMFERENCE ON THE PHASE PLANE

© 2010 A.A. Krents¹, N.E. Molevich²

¹Samara Branch of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences

²Samara State Aerospace University

Laser systems in the regime of the stationary generation have the critical circumference on the phase plane. For such dynamical systems, new type of the critical curve bifurcation to the two-dimensional torus is described. The conditions of the passage to chaos via a cascade of torus doubling bifurcations are obtained. Key words: laser, nonlinear dynamics, bifurcation, chaos.

Anton Krents, Engineer Graduate Student, Physics Department, SSAU. E-mail: krenz86@mail.ru
Nonna Molevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Theoretical Sector of Samara Branch LPI RAS, Professor of the Chair of Physics, SSAU. E-mail: molevich@fian.smr.ru