

УДК 535.39

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В ДВУХАТОМНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ДВУХФОТОННОЙ МОДЕЛИ

© 2010 Е.К.Башкиров, Е.Ю. Сочкова

Самарский государственный университет

Поступила в редакцию 11.01.2010

Представлено точное решение модели двух двухуровневых атомов с двухфотонными вырожденными переходами, взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе. В предельном случае сильного начального когерентного поля найдено асимптотическое поведение волнового вектора всей системы. С использованием редуцированной атомной энтропии исследовано атом-полевое перепутывание. Показано возможность распутывание состояний атомов и поля в процессе эволюции. Проведена оценка условий и возможных времен распутывания.

Ключевые слова: атом-полевое перепутывание, двухфотонные вынужденные переходы, линейная атомная энтропия

Квантовые перепутанные состояния играют ключевую роль в квантовой теории информации, физике квантовых вычислений, квантовой связи и квантовой криптографии [1]. В последнее время было опубликовано большое количество работ, в которых исследовались свойства перепутанных состояний, их возможные применения в квантовой информатике, а также различные схемы получения перепутанных состояний [2]. Простейшая система, в которой возможна генерация атом-полевых перепутанных состояний, является модель Джейнса-Каммингса, описывающая взаимодействие двухуровневого атома с модой квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе [3]. Модель Джейнса-Каммингса играет фундаментальную роль в квантовой оптике, поскольку позволяет описать все основные квантовые эффекты взаимодействия излучения с веществом. В последнее время атом-полевые перепутанные состояния были получены в экспериментах с одноатомными лазерами [4,5]. Исследования атом-полевых перепутанных состояний в модели Джейнса-Каммингса (МДК) и ее простейших обобщениях были инициированы Фениксом и Найтом [6], а также Геа-Банаклоче [7]. Исследуя динамику фон-неймановской редуцированной атомной энтропии, Феникс и Найт впервые показали, что двухуровневый атом, взаимодействующий с модой квантового электромагнитного поля и приготовленный в чистом состоянии, вновь оказывается в чистом состоянии на половине периода затухания осцилляций Раби населенностей атомных уровней, причем в этот момент времени состояния атома и поля распутываются.

Аналогичные результаты независимо были получены Геа-Банаклоче при изучении временного поведения атомной линейной энтропии. Результаты Геа-Банаклоче были позднее обобщены на случай одноатомной модели с двухфотонными вырожденными переходами [8] и двухатомной модели с однофотонными [9] и нерожденными двухфотонными переходами [10].

В настоящей работе мы исследуем атом-полевое перепутывание для двухатомной вырожденной двухфотонной модели. Рассматриваемая модель описывает взаимодействие двух идентичных двухуровневых атомов с частотой перехода ω_0 , резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля частоты $\omega = \omega_0/2$ в идеальном резонаторе посредством вырожденных двухфотонных переходов. Гамильтониан взаимодействия такой модели имеет вид

$$H_{int} = \hbar \sum_{i=1}^2 g \left((a^+)^2 R_i^- + a^2 R_i^+ \right), \quad (1)$$

где a^+ (a) – оператор рождения (уничтожения) фотона резонаторной моды, R_i^+ (R_i^-) – повышающий (понижающий) оператор в i -ом двухуровневом атоме ($i = 1, 2$), g – константа атом-полевого взаимодействия.

Предположим, что атомы в начальный момент времени приготовлены в чистой суперпозиции возбужденных и основного состояний, а поле в когерентном состоянии. Тогда волновая функция системы в начальный момент времени есть

$$|\Psi(0)\rangle = (\alpha|+, +\rangle + \beta|+, -\rangle + \gamma|-, +\rangle + \delta|-, -\rangle) |v\rangle, \quad (2)$$

где α, β, γ и δ – произвольные комплексные величины, удовлетворяющие условию

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1,$$

а

$$|x, y\rangle = |x\rangle |y\rangle \quad (x, y = -, +)$$

Башкиров Евгений Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры общей и теоретической физики E-mail: bash@ssu.samara.ru.
Сочкова Елена Юрьевна, магистр физического факультета E-mail: SochkovaElena@mail.ru.

– двухатомные базисные состояния. Здесь $|-\rangle$ – основное, и $|+\rangle$ – возбужденное состояние в одиночном двухуровневом атоме. Начальное состояние поля

$$|\nu\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |n\rangle$$

– одномодовое когерентное состояние с коэффициентами ω_n равными

$$\omega_n = \exp(-\bar{n}/2) \frac{\bar{n}^{-n/2}}{\sqrt{n!}} e^{i\varphi},$$

где $\nu = \bar{n}^{1/2} e^{i\varphi}$, $\bar{n} = |\nu|^2$ – среднее число фотонов и φ – фаза когерентного состояния. Точное решение уравнения Шредингера для временной волновой функции с начальными условиями (2) имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n (A_n(t)|+,+\rangle + B_n(t)|-,-\rangle + C_n(t)|+,-\rangle + D_n(t)|-,+\rangle) |n\rangle. \quad (3)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_n(t) &= (2/\Omega_n^2)(p_n^2 + q_n^2 \cos \Omega_n t) \alpha C_n - (\zeta q_n / \Omega_n^2) (\sin \Omega_n t (\beta + \gamma) C_{n+2} - \\ &\quad - (4p_n q_n / \Omega_n^2) \sin^2(\Omega_n/2) t \delta C_{n+4}), \\ B_n(t) &= -(\zeta q_n / \Omega_n) \sin \Omega_n t \alpha C_n + (\cos^2(\Omega_n/2) t \beta - \sin^2(\Omega_n/2) t \gamma) C_{n+2} - \\ &\quad - (\zeta p_n / \Omega_n) \sin \Omega_n t \delta C_{n+4}, \\ C_n(t) &= -(\zeta q_n / \Omega_n) \sin \Omega_n t \alpha C_n + (\cos^2(\Omega_n/2) t \gamma - \sin^2(\Omega_n/2) t \beta) C_{n+2} - \\ &\quad - (\zeta p_n / \Omega_n) \sin \Omega_n t \delta C_{n+4}, \\ D_n(t) &= -(4p_n q_n / \Omega_n^2) \sin^2(\Omega_n/2) t \alpha C_n - (\zeta / \Omega_n) \sin \Omega_n t (\beta + \gamma) C_{n+2} + \\ &\quad + (2/\Omega_n^2)(q_n^2 + p_n^2 \cos \Omega_n t) \delta C_{n+4}, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_n = \sqrt{p_n^2 + q_n^2}, \quad q_n = \sqrt{(n+1)(n+2)}, \quad p_n = \sqrt{(n+3)(n+4)}.$$

Используя точное решение (3), мы можем вычислить редуцированную атомную матрицу плотности, усредняя $|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ по полевым переменным, и с ее помощью исследовать временное поведение линейной атомной энтропии $S = 1 - \text{Tr}(\rho_{AT}^2)$. Покажем, что для определенных начальных состояний атомной подсистемы в определенные моменты времени полная волновая функция системы распадается на произведение атомной и полевой частей. Для того чтобы получить такой результат предположим, что поле в начальный момент находится в когерентном состоянии с большим средним числом фотонов, и исследуем временное поведение собственных состояний полуклассического гамильтониана взаимодействия. Полуклассический гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_{SC} = \hbar g \left((\nu^*)^2 R_1^- + \nu^2 R_1^+ + (\nu^*)^2 R_2^- + \nu^2 R_2^+ \right). \quad (4)$$

Собственные функции полуклассического гамильтониана есть:

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{2} \left[e^{4i\varphi} |+,+\rangle + |-,+\rangle + e^{2i\varphi} (|+,-\rangle + |-,+\rangle) \right],$$

$$|\Phi_2\rangle = \frac{1}{2} \left[e^{4i\varphi} |+,+\rangle + |-,+\rangle - e^{2i\varphi} (|+,-\rangle + |-,+\rangle) \right],$$

$$|\Phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-e^{4i\varphi} |+,+\rangle + |-,+\rangle \right], \quad |\Phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+,+\rangle - |-,+\rangle \right].$$

Если атомы в начальный момент времени приготовлены в одном из собственных состояний полуклассического гамильтониана, а поле в когерентном состоянии с большой интенсивностью, то волновые функции всей системы имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle |\nu\rangle &\rightarrow \frac{1}{2} \left\{ e^{-8igt} e^{4i\varphi} |+,+\rangle + |-,+\rangle + e^{-4igt} e^{-2i\varphi} (|+,-\rangle + |-,+\rangle) \right\} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle e^{-i\Omega_{n-4}t}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} |\Phi_2\rangle |\nu\rangle &\rightarrow \frac{1}{2} \left\{ e^{8igt} e^{4i\varphi} |+,+\rangle + |-,+\rangle + e^{4igt} e^{-2i\varphi} (|+,-\rangle - |-,+\rangle) \right\} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle e^{i\Omega_{n-4}t}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$|\Phi_3\rangle |\nu\rangle \rightarrow |\Phi_3\rangle |\nu\rangle, \quad |\Phi_4\rangle |\nu\rangle \rightarrow |\Phi_4\rangle |\nu\rangle, \quad (7)$$

Хорошо видно из выражений (5)-(7), что для рассматриваемых начальных состояний атомов и поля волновые векторы системы факторизуются в любой момент времени. Это означает, что в случае, когда атомы приготовлены в одном из собственных состояний полуклассического гамильтониана, состояния атомов и поля не перепутываются с течением времени. При этом для начальных атомных состояний $|\Phi_3\rangle$ и $|\Phi_4\rangle$ волновая функция всей системы вообще не эволюционирует с течением времени, а для начальных состояний $|\Phi_1\rangle$ и $|\Phi_2\rangle$ эволюция системы происходит таким образом, что ни в один из моментов времени атомная подсистема не возвращается в исходное состояние. Однако, как видно из формул (5), (6), для выбранных начальных состояний атомные части полных волновых функций точно совпадают для моментов времени

$$t_1 = (4k+1) \frac{T_R}{8}, \quad t_2 = (4k+3) \frac{T_R}{8}, \quad (8)$$

где k – целое число, а T_R – большой периодов восстановления осцилляций Раби населенностей атомных уровней для двухатомной вырожденной двухфотонной модели. Заметим, что для указанной модели имеются два периода восстановления осцилляций Раби, определяемые условиями:

$$|\Omega_{n+1} - \Omega_n| T_R = 2\pi k, \quad \text{и} \quad |2\Omega_{n+1} - 2\Omega_n| T_R = 2\pi k. \quad (9)$$

Для интенсивного когерентного поля $\bar{n} \gg 1$ из (9) имеем, что $T_R = \pi/g$ и $T'_R = \pi/2g$. Для рассматриваемой модели в результате имеются две серии моментов времени, в которые атомная

подсистема, приготовленная первоначально в состояниях $|\Phi_1\rangle$ или $|\Phi_2\rangle$, оказывается в одном и том же чистом состоянии:

$$\frac{1}{2} \left\{ -e^{4i\varphi} |+, +\rangle + |-, -\rangle - e^{2i\varphi} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) \right\}.$$

Таким образом, полное распутывание атомной и полевой подсистем для рассматриваемой модели имеет место в моменты времени t_1 и t_2 только в том случае, если атомная система первоначально приготовлена в виде линейной суперпозиции состояний $|\Phi_1\rangle$ и $|\Phi_2\rangle$. Обозначим такие атомные состояния как

$$|\Psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) = e^{2i\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_1\rangle - |\Phi_2\rangle) \quad (10)$$

и

$$|\Psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{4i\varphi} |+, +\rangle + |-, -\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle). \quad (11)$$

Кроме того, полевые части волновых функций (5) и (6) точно совпадают в случае

$$e^{i\Omega_{n-4}t} = e^{-i\Omega_{n-4}t}. \quad (12)$$

Для интенсивного резонаторного поля $\bar{n} \gg 1$ соотношение (12) выполняется для времен

$$t_3 = k\pi/g. \quad (13)$$

В результате для начальных атомных состояний системы вида $|\Psi_1\rangle$ или $|\Psi_2\rangle$ имеются три серии времен распутывания состояний атомов и поля. Заметим также, распутывание состояний атомов и поля имеет место для любого начального состояния при выполнении условий:

$$|\Omega_{n-4} - \Omega_{n-2}|t = 2\pi k, \quad (14)$$

$$|\Omega_{n-2} - \Omega_n|t = 2\pi k. \quad (15)$$

Для интенсивного резонаторного поля $\bar{n} \gg 1$ уравнения (14) и (15) удовлетворяются для времен

$$t_4 = (\pi/g)k = T_R k, \quad (16)$$

где k – целое число.

Полученные выше результаты отличаются от тех, что были найдены ранее для времен распутывания двухатомной однофотонной модели [8] и одноатомной вырожденной двухфотонной модели [7]. В первом случае времена распутывания составляют половину периода восстановления осцилляций Раби для состояний типа (10), (11). Для вырожденной двухфотонной одноатомной модели времена распутывания составляют 1/4 и 3/4 от периода восстановления осцилляций Раби атомных населенностей, причем независимо от выбора начального атомного состояния.

Значения времен атом-полевого распутывания, полученные на основе анализа асимптотического поведения вектора состояния, могут быть проверены путем численного моделирования редуцированной атомной энтропии исследуемой системы. В случае двухатомной модели линейная атомная энтропия $S = 0$ для полностью распутанного состояния атомов и поля и $S = 3/4$ для максимально запутанного атом-полевого состояния.

Результаты численного моделирования линейной редуцированной атомной энтропии представлены на рис. 1-2. При этом выбирались различные начальные состояния атомов, а среднее число фотонов для когерентного резонаторного поля равнялось $\bar{n} = 30$. На рис. 1 показано временное поведение линейной атомной энтропии для начального атомного состояния вида (10). Из рисунка хорошо видно, что в рассматриваемом случае имеют место три серии времен распутывания, полностью описываемые формулами (8) и (12), полученными на основе анализа асимптотического поведения волновой функции полной системы. В течение одного периода восстановления осцилляций Раби T_R распутывание наблюдается в моменты времени, составляющие 1/8, 3/8, 1/2, 5/8 и 7/8 от большого периода осцилляций Раби. На рис. 2 показано временное поведение линейной атомной энтропии для на-

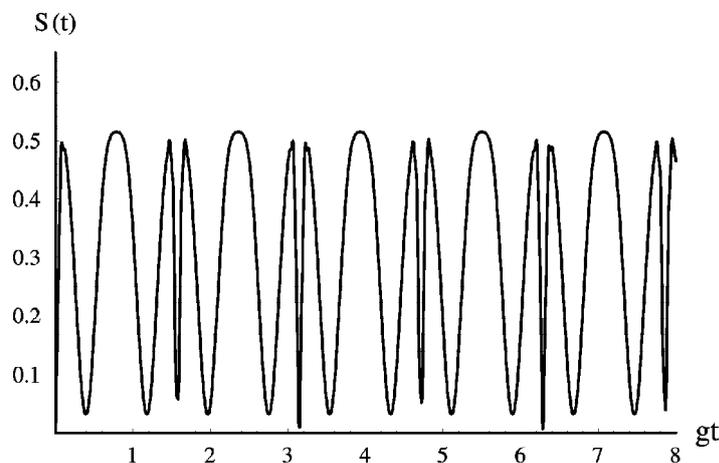


Рис. 1. Временная зависимость линейной атомной энтропии для начального атомного состояния $|\Psi_1\rangle$ и среднего числа фотонов в резонаторной моде $\bar{n} = 30$.

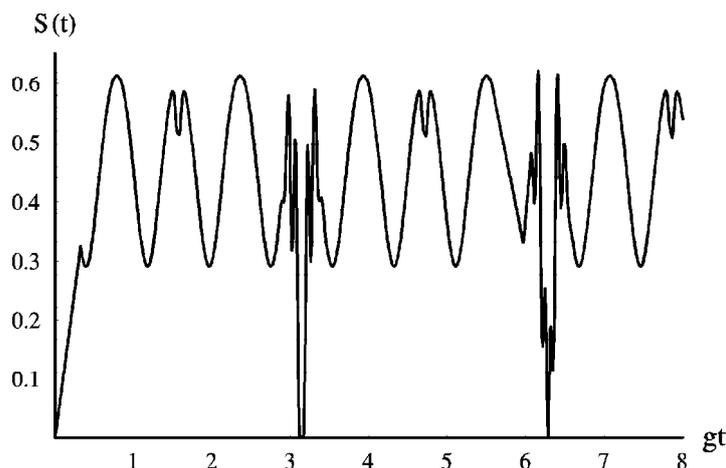


Рис. 2. Временная зависимость линейной атомной энтропии для начального атомного состояния $|+, +\rangle$ и среднего числа фотонов в резонаторной моде $\bar{n} = 30$.

чального атомного состояния вида $|+, +\rangle$. В этом случае, как и предсказывалось формулой (16) имеется всего одна серия времен распутывания.

Таким образом, результаты численного моделирования полностью подтверждают выводы, сделанные выше на основе анализа асимптотического поведения полной временной волновой функции атом-полевой системы. При этом полученные в работе результаты не являются тривиальным обобщением результатов для двухатомной модели с однофотонными переходами и одноатомной двухфотонной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 823 p.
2. Boumeester D., Ekert A., Zeilinger A. (Eds.). The Physics of Quantum Information. Berlin: Springer, 2000. 334 p.
3. Shore B.W., Knight P.L. On the Jaynes-Cummings model // J.Mod.Opt. 1993. V.40. P. 1195-1238.
4. Haroche S., Raimond J.-M. Exploring the Quantum. Atoms, Cavities and Photons. New York: Oxford University Press, 2006. 606 p.
5. Cavity quantum electrodynamics/H. Walther, B.T.H. Varcoe, B. -G. Englert, T. Becker//Rep. Prog. Phys. 2006. V.69. P.1325-1382.
6. Phoenix S.J.D., Knight P.L. Fluctuations and Entropy in models of quantum optical resonance //Ann. Phys. 1988. V.186. P. 381-407.
7. Gea-Banacloche J. Collapse and revival of the state vector in the Jaynes-Cummings model: an example of state preparation by a quantum apparatus // Phys. Rev. Lett. 1990. V.65. P.72-76.
8. Dung H.T., Huyen N.D. State evolution in the two-photon atom-field interaction with large initial fields // Phys. Rev. 1994. V.A49. P. 473-480.
9. Dung H.T., Huyen N.D. Two-atom-single mode radiation field interaction. State evolution, level occupation probabilities and emission spectra //J. Mod. Opt. 1994. V.41. P. 453-469.
10. Bashkirov E.K., Rusakova M.S. Atom-field entanglement in two-atom Jaynes-Cummings model with nondegenerate two-photon transitions //Opt. Comm. 2008. Vol. 281. P. 4380-4386.

ENTANGLEMENT IN TWO-ATOM DEGENERATE TWO-PHOTON MODEL

© 2010 E.K. Bashkirov, E. Yu. Sochkova

Samara State University

An exact solution of the problem of two two-level atoms with degenerate two-photon transitions interacting with one-mode coherent radiation field is presented. Asymptotic solutions for system state vectors are obtained in the approximation of large initial coherent fields. The atom-field entanglement is investigated on the basis of the reduced atomic entropy dynamics. The possibility of the system being initially in a pure disentangled state to revive into this state during the evolution process for model considered is shown. Conditions and times of disentanglement are derived.

Keywords: atom-field entanglement, degenerate two-photon transitions, linear atomic entropy

Eugene Bashkirov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor at General and Theoretical Physics Department.
E-mail: kipdla@ssau.ru.

Elena Sochkova, Master of Physical Department.
E-mail: SochkovaElena@mail.ru