

УДК 629.78

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УПРУГИМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ТРОСОМ

© 2010 В.С. Асланов, Б.В. Иванов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 12.02.2010

Методами хаотической динамики исследовано движение на круговой орбите космического аппарата относительно центра масс с упругой тросовой системой, развернутой по вертикали. На космический аппарат действует гравитационный момент и момент от силы натяжения троса. Построены гетеро- и гомоклинические сепаратрисные орбиты. С помощью метода Мельникова исследовано хаотическое поведение космического аппарата в окрестности сепаратрис. Исследовано изменение толщины хаотического слоя в зависимости от механических характеристик троса и параметров космического аппарата. Результаты работы могут быть полезны при исследовании поведения космического аппарата относительно центра на орбите с развернутым тросом.

Ключевые слова: космический аппарат, тросовая система, метод Мельникова, аналитическое решение, хаос.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возможность применения тросовых систем для операций в космосе широко обсуждается [1,2], в том числе для доставки с орбиты полезных грузов на Землю [3,4] и для мониторинга Земли, с помощью опущенного на вертикальном тросе средства наблюдения. В этих задачах весьма важными являются вопросы, связанные с поведением космического аппарата (КА) относительно собственного центра масс [5]. В статье рассматривается движение вокруг центра масс КА с тросом, развернутым по местной вертикали, под действием гравитационного момента [6] и момента от силы натяжения троса. В зависимости от отношения моментов инерции КА, характеристик троса и массы концевого груза могут наблюдаться неустойчивые положения равновесия, а в силу действия периодических возмущений возникать хаотические явления, приводящие к значительным эволюциям углового положения КА. Целью настоящей работы является изучение влияния механических характеристик троса и параметров КА на угловое поведение аппарата методами хаотической динамики [7].

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ КА С ТРОСОВОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрим механическую систему (рис. 1), состоящую из КА с центром масс в точке O , троса P_1P_2 и привязанной груз P_2 . Будем считать, что

Асланов Владимир Степанович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики. E-mail: aslanov_vs@mail.ru

Иванов Борис Всеволодович, аспирант. E-mail: boris063@mail.ru

сила натяжения троса мала по сравнению с гравитационной силой, поэтому ее влияние будем учитывать только при рассмотрении движение КА вокруг центра масс. Трос будем представлять как невесомый упругий стержень, длина которого изменяется согласно закону Гука. Масса КА существенно превышает массу концевого груза. Центр масс КА движется по круговой орбите. В плоскости орбиты введем систему координат Ox_1y_1 , в которой ось Ox_1 совпадает с местной вертикалью, и связанную со спутником систему координат $Oxyz$, в которой плоскость Oxy совпадает с плоскостью орбиты, ось Ox направлена по продольной оси КА. Запишем уравнения движения КА относительно центра масс в проекции на ось Oz , перпендикулярную плоскости движения Oxy (на рис. 1 орбита показана штриховой линией), в виде [5]:

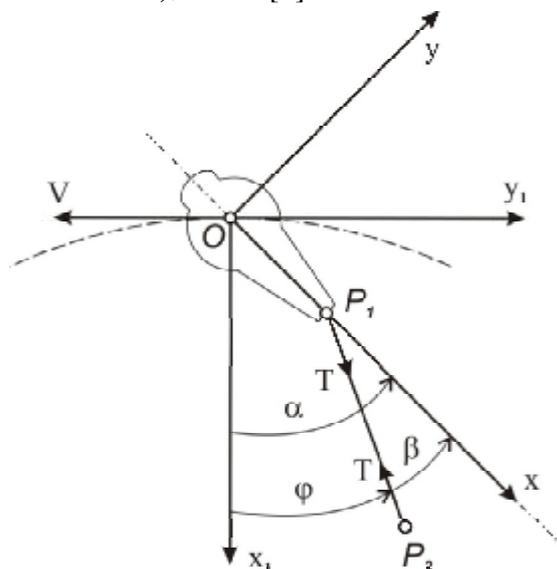


Рис. 1. КА с тросовой системой

$$C\ddot{\alpha} = -3\mu p^{-3}(B - A)\sin\alpha\cos\alpha - T\Delta\sin(\alpha - \varphi), \quad (1)$$

где α – угол между продольной осью тела и местной вертикалью, φ – угол между линией действия силы натяжения троса и местной вертикалью, A, B, C – главные компоненты тензора инерции тела в связанной системе координат $Oxyz$, T – величина силы натяжения троса, $\Delta = OP_1$ (рис. 1), μ – гравитационная постоянная, p – параметр орбиты, $\beta = \alpha - \varphi$.

Движение концевго груза относительно КА описывается следующими уравнениями в полярных координатах [1]:

$$\ddot{\varphi} + \dot{\omega} + 2r^{-1}\dot{r}(\dot{\varphi} + \omega) + 3\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi = 0, \quad (2)$$

$$\ddot{r} - r[(\dot{\varphi} + \omega)^2 + \omega^2(3\cos^2\varphi - 1)] + Tm^{-1} = 0, \quad (3)$$

где $\omega = \dot{\nu} = \mu^{1/2} p^{-3/2}$, m – масса груза. Система уравнений (2-3) имеет две пары стационарных решений [1], одна из них отвечает устойчивому (вертикальному) расположению троса

$$\varphi = 0, \pi; T = 3\omega^2 m r, \quad (4)$$

когда при $\varphi = 0$ груз движется ниже КА, а при $\varphi = \pi$ – выше КА.

Трос будем представлять как невесомый упругий стержень, длина которого изменяется согласно закону Гука:

$$T = E(r l^{-1} - 1), \quad (5)$$

где E – модуль упругости, l – длина ненапряженного троса. Пусть груз движется строго по местной вертикали в окрестности положения равновесия (4). Тогда уравнение (3) с учетом (5) примет вид

$$\ddot{r} + \Omega^2 r = E m^{-1}. \quad (6)$$

где $\Omega^2 = E m^{-1} l^{-1} - 3\omega^2 > 0$ (для материалов, применяемых для космических тросовых систем [1]). Равновесное положение груза определяется формулой

$$r_0 = E(E - 3m\omega^2 l)^{-1} l.$$

При начальных условиях: $t_0 = 0: r = r_0, \dot{r} = V_0$, решение уравнения (6) имеет вид

$$r = r_0 + V_0 \Omega^{-1} \sin \Omega t, \quad (7)$$

Для того чтобы трос находился в растянутом положении, начальная скорость груза при прохождении положения равновесия не должно превышать следующего значения

$$V_0 \leq 3\omega^2 m^{1/2} l^{3/2} (E - 3m\omega^2 l)^{-1/2}.$$

Сила натяжения троса согласно (5) и (7) изменяется по гармоническому закону

$$T = T_0 + T_m \sin \Omega t, \quad (8)$$

где $T_0 = 3m\omega^2 l E (E - 3m\omega^2 l)^{-1}$,
 $T_m = V_0 E m^{1/2} l^{-1/2} (E - 3m\omega^2 l)^{-1/2}$.

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И СЕПАРАТРИСНЫЕ РЕШЕНИЯ

Будем рассматривать движение КА относительно центра масс с развернутым по местной вертикали тросом, тогда уравнение (1) с учетом (8) примет вид

$$\ddot{\alpha} = -a \sin \alpha - c \sin \alpha \cos \alpha - \varepsilon \sin \alpha \sin \Omega t, \quad (9)$$

$$\text{где } a = \frac{\Delta T_0}{C}, c = \frac{B - A}{C} \frac{3\mu}{p^3}, \varepsilon = \frac{\Delta T_m}{C}. \quad (10)$$

При малом положительном параметре ε , уравнение (9) можно к классу квазиконсервативных с малым периодическим внешним возбуждением. Невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$) отвечает условию (4) и описывается уравнением:

$$\ddot{\alpha} = -a \sin \alpha - c \sin \alpha \cos \alpha. \quad (11)$$

В силу (10) коэффициент $a > 0$ всегда больше нуля, а знак коэффициента c зависит от соотношения моментов инерции A и B . Положения равновесия невозмущенной системы (11) определяются как корни уравнения

$$\sin \alpha (1 + \gamma \cos \alpha) = 0, \quad (12)$$

где $\gamma = ca^{-1}$. Из (12) следует, что два положения равновесия отвечают значениям: $\alpha^* = 0, \pi$, а третье положение равновесия: $\alpha^* \in (0, \pi)$ существует, при условии:

$$|\gamma| > 1. \quad (13)$$

Если это условие не выполняется, то наблюдается только два положения равновесия, причем центр всегда находится в точке $\alpha^* = 0$, а седло в точке - $\alpha^* = \pi$.

Очевидно, что для $\gamma < -1$ точки $\alpha^* = 0, \pi$ являются седлами, а промежуточная точка

$$\alpha^* = \pm \arccos(-\gamma^{-1}) -$$

центром (левая ветвь диаграммы на рис.2). Если $\gamma > 1$, то наблюдается обратная картина (правая ветвь диаграммы на рис. 2). Отметим, что бифуркационная диаграмма (рис. 2) для отрицательных углов α получается зеркальным отображением относительно оси абсцисс. Гиперболические точки существуют, когда выполняется условие (13). В этом случае периодическое внешнее возмущение $\varepsilon \sin \alpha \sin \Omega t$ в возмущенной системе (9) может стать причиной хаоса [6].

Для исследования поведения динамической системы (9) в окрестности сепаратрис воспользуемся методом Мельникова [7], который позволяет найти толщину хаотического слоя и пересечение устойчивых и неустойчивых многообразий. Для применения метода Мельникова требуется получить аналитические выражения для сепаратрисных орбит, другими словами, найти решения уравнения невозмущенного движе-

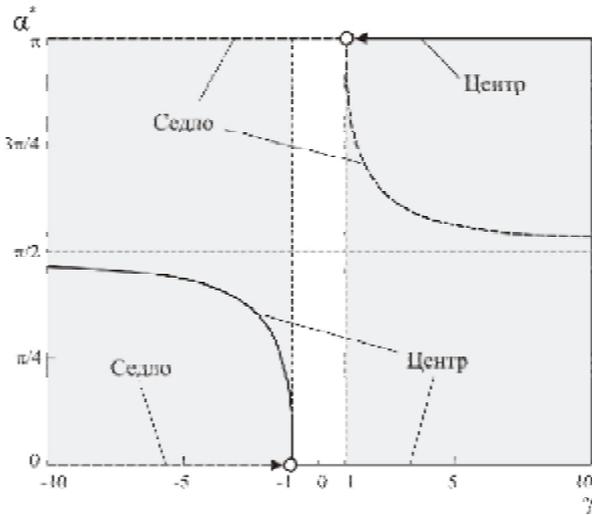


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма невозмущенной системы (11)

ния на сепаратрисах. Вид решений зависит от величины параметра $\gamma = ca^{-1}$ и начальных условий движения. Будем рассматривать два случая, определяющих величину параметра γ .

Случай 1. Пусть параметр

$$\gamma = ca^{-1} > 1, \tag{14}$$

тогда седло

$$\alpha_s = \pm \arccos(-\gamma^{-1}) \tag{15}$$

лежит между значениями $0, \pi$ (рис. 2), а в точках

$$\alpha_c = 0, \pm \pi \tag{16}$$

имеются центры. Отметим, что центр $\alpha_c = -\pi$ совпадает с центром $\alpha_c = \pi$. При $\alpha \rightarrow -\pi$ и при $\alpha \rightarrow \pi$ скорости $\dot{\alpha}$ совпадают, поэтому можно утверждать, что фазовые траектории замкнуты на цилиндрическом фазовом пространстве. Будем рассматривать эволюцию фазовых траекторий на цилиндрическом пространстве для $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Выделим две области A_0 и A_1 , разделенные двумя седлами s_1 и s_{-1} (рис. 3). Необходимо отметить, что область A_1 “разрезана” по вертикали $\alpha = \pi, -\pi$. Из (15) следует, что седло s_1 принадлежит интервалу $\alpha_s \in (\pi/2, \pi)$ и при $\gamma \rightarrow \infty$ $\alpha_s \rightarrow \pi/2$.

Уравнение (11) имеет интеграл энергии

$$\frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 + W(\alpha) = E, \tag{17}$$

где $W(\alpha) = -a \cos \alpha - \frac{c}{2} \cos^2 \alpha$ – потенциальная энергия, E – полная энергия.

Если полная энергия $E > W_s$, где $W_s = W(\alpha_s)$, тогда система совершает вращение в одной из внешних областей. Если $E < W_s$, то в зависимости от начальных условий наблюдаются колебания в одной из внутренних областей. При равенстве $E = W_s$ движение происходит по

гетероклиническим траекториям, которые соединяют гиперболические точки s_1 и s_{-1} .

Сначала рассмотрим область A_0 (рис. 3). Найдем решение уравнения (11) на сепаратрисах (гетероклинические траектории). Разделим переменные в интеграле энергии (17), тогда получим

$$t = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{2[W(\alpha_s) + a \cos \alpha + \frac{c}{2} \cos^2 \alpha]}} \tag{18}$$

где $W(\alpha_s) = -a \cos \alpha_s - \frac{c}{2} \cos^2 \alpha_s = \frac{a^2}{2c}$. Замены переменных:

$$x = \tan \alpha / 2 \tag{19}$$

в интеграле (18) и последующее интегрирование приводит к следующим гетероклиническим траекториям [8]

$$\alpha_{\pm}(t) = \pm 2 \arctan \left(\tan \frac{\alpha_s}{2} \tanh \frac{\lambda t}{2} \right),$$

$$\sigma_{\pm}(t) = (\dot{\alpha})_{\pm} = \pm \frac{\lambda \sin \alpha_s}{\cosh \lambda t + \cos \alpha_s}, \tag{20}$$

где $\lambda = (c^2 - a^2)^{1/2} c^{-1/2}$ – действительное число при выполнении условия (14).

Для области A_1 гетероклинические траектории имеют аналогичный вид [8]

$$\alpha_{\pm}(t) = \pi \pm 2 \arctan \left(\cot \frac{\alpha_s}{2} \tanh \frac{\lambda t}{2} \right),$$

$$\sigma_{\pm}(t) = (\dot{\alpha})_{\pm} = \frac{\lambda \sin \alpha_s}{\cosh \lambda t - \cos \alpha_s}. \tag{21}$$

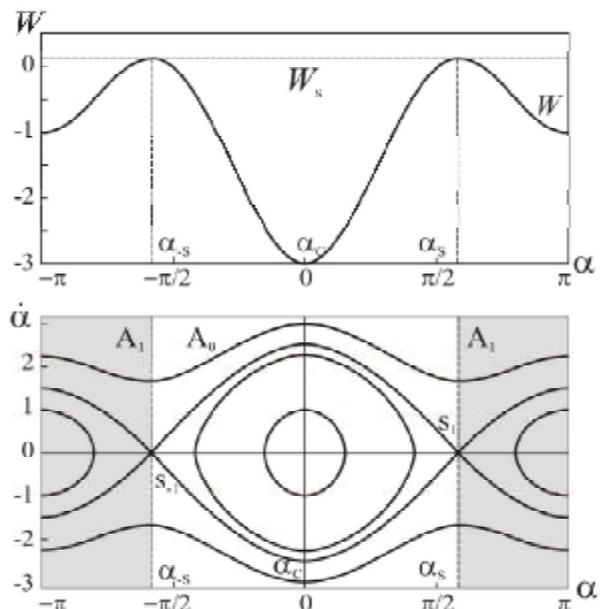


Рис. 3. Потенциальная энергия и фазовый портрет при $a = 1, c = 4$

Случай 2. Пусть параметр

$$\gamma = ca^{-1} < -1, \quad (22)$$

тогда центр

$$\alpha_c = \pm \arccos(-\gamma^{-1}) \quad (23)$$

лежит между значениями $0, \pi$ (рис. 2), а в седло находится в точке

$$\alpha_s = 0.$$

В данной работе гиперболические точки $\alpha_s = \pm \pi$ ($\gamma = ca^{-1} = -1$) не рассматриваются.

В этом случае имеем две гомоклинические траектории, которые расположены справа и слева от гиперболической точки $\alpha_s = 0$ (рис. 4). Ввиду симметрии орбит будем рассматривать только правую гомоклиническую траекторию. Выполняя вычисления, аналогичные (17)-(19), получим следующие сепаратрисные решения

$$\alpha_{\pm}(t) = \pm 2 \arctan \left(\frac{d}{\cosh \lambda t} \right),$$

$$\sigma_{\pm}(t) = (\dot{\alpha})_{\pm} = \mp \frac{2\lambda d \sinh \lambda t}{(\cosh \lambda t)^2 + d^2}, \quad (24)$$

где $\lambda = (-a-c)^{1/2}$, $d = (-a-c)^{1/2} a^{-1/2}$ - действительные числа при выполнении условия (22).

ФУНКЦИЯ МЕЛЬНИКОВА

Толщина хаотического слоя характеризуется функцией Мельникова [7], которая для возмущенной системы (9) имеет вид

$$\begin{aligned} M^{\pm}(t_0) &= -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\pm} [\sin \alpha_{\pm} \sin(\Omega t + \Omega t_0)] dt = \\ &= -\varepsilon \cos \Omega t_0 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\pm} \sin \alpha_{\pm} \sin \Omega t dt, \end{aligned} \quad (25)$$

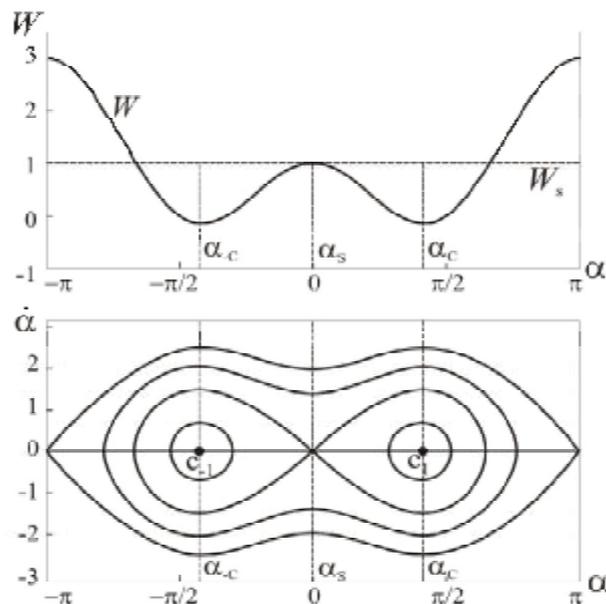


Рис. 4. Потенциальная энергия и фазовый портрет при $a = 1, c = -4$

где $\alpha_{\pm}(t), \sigma_{\pm}(t)$ решения для гомо/гетероклинических орбит (20), (21) или (24). Интеграл из (25)

$$I = - \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\pm} \sin \alpha_{\pm} \sin \Omega t dt. \quad (26)$$

Определяет амплитуду изменения толщины хаотического слоя. Найдем его абсолютную величину для трех орбит:

- двух гетероклинических (20) и (21),
- одной гомоклинической (24).

Подставим решения (20), (21) и (24) в интеграл (26) и приведем полученные выражения к безразмерному времени, соответственно:

$$I_0 = \sin^2 \alpha_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \tau_1}{(\cosh \tau_1 + \cos \alpha_s)^2} \sin \Omega_1 \tau_1 d\tau_1, \quad (27)$$

$$I_1 = \sin^2 \alpha_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh \tau_1}{(\cosh \tau_1 - \cos \alpha_s)^2} \sin \Omega_1 \tau_1 d\tau_1, \quad (28)$$

$$I_2 = 2x_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh 2\tau_2}{(\cosh^2 \tau_2 + x_2^2)^2} \sin \Omega_2 \tau_2 d\tau_2, \quad (29)$$

где $\tau_1 = \lambda_1 t$, $\tau_2 = \lambda_2 t$ - безразмерное время, $\Omega_1 = \Omega \lambda_1^{-1}$, $\Omega_2 = \Omega \lambda_2^{-1}$ - безразмерные частоты упругих колебаний троса.

Отметим, что как следует из (10) частоты

$$\lambda_1 = (c^2 - a^2)^{1/2} c^{-1/2} \text{ and } \lambda_2 = (-a - c)^{1/2}$$

зависят от параметров тросовой системы и величин моментов инерции КА. Зависимости максимальной толщины хаотического слоя (27), (28) и (29) для гомо/гетероклинических орбит (20), (21) и (24) от безразмерных частот возмущающей силы $\Omega_1 = \Omega \lambda_1^{-1}$ и $\Omega_2 = \Omega \lambda_2^{-1}$ показаны на рис. 5.

Численные вычисления интегралов (27)-(29) показывают, что при $\Omega_1, \Omega_2 > 6$ толщина хаотического слоя стремится к нулю (рис.5) и возмущенная система (9) совершает регулярные движения без гомо/гетероклинических пересече-

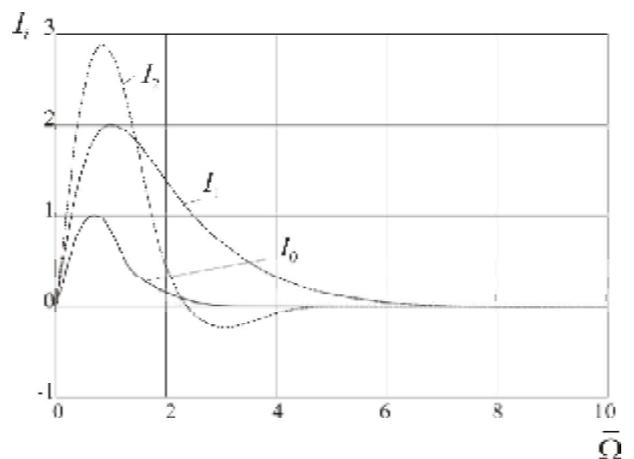


Рис. 5. Зависимости максимальной толщины хаотического слоя (27), (28) и (29) от безразмерных частот возмущающей силы $\Omega_1 = \Omega \lambda_1^{-1}$ и $\Omega_2 = \Omega \lambda_2^{-1}$

ний. Это означает, что при $\Omega_1, \Omega_2 > 6$ возмущающая сила $\varepsilon \sin \alpha \sin \Omega t$, связанная с упругими колебания троса, не оказывает влияние по поведению КА относительно центра масс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сделана попытка описания переходных хаотических процессов в случае движения КА с упругим тросом с помощью метода Мельникова. Установлены границы хаоса, которые позволяют механические характеристики тросовой системы и параметры КА, гарантирующие регулярные движения КА вокруг центра масс.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (09-01-00384).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
2. Сидоров И.М. Об использовании тросовых систем для создания постоянно действующего транспортного канала в космическом пространстве // Полет. 2000. Вып. 8. С. 36-39.
3. Misra A.K. Dynamics and Control of Tethered Satellite Systems // Acta Astronautica. 2008. V.63. P.1169–1177.
4. Williams P., Hyslop A., Stelzer M., Kruijff M. YES2 optimal trajectories in presence of eccentricity and aerodynamic drag // Acta Astronautica. 2009. V. 64. P. 745–769.
5. Асланов В.С. Колебания тела с орбитальной тросовой системой // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, Вып. 6. С.1042-1048.
6. Гукенхеймер Д., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2002. 560 с.
7. Мельников В.К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Московского математического общества. Вып.12. 1963. С.1–56.
8. Aslanov V.S. Chaotic behavior of the biharmonic dynamics system // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (IJMMS). ID 319179. 2009. P. 1-18.

THE CHAOTIC OSCILLATIONS OF THE SPACECRAFT WITH A VERTICAL ELASTIC TETHER

© 2010 V.S. Aslanov, B.V. Ivanov

Samara State Aerospace University

The motion about a centre of mass of a spacecraft with a vertical elastic tethered system under the action of the gravitational moment and small periodic tethered force at a circular orbit is studied. The mathematical model is derived using Lagrange's equations including tether vibrations and oscillations of the spacecraft relatively of the proper mass center. The paper contains bifurcation analysis, phase space study, and analytic solutions for separatrixes. The considered mechanical system performs chaotic motion near separatrixes under the influence of small disturbances. The Melnikov method gives a criterion for homo/heteroclinic chaos in terms of system parameters. Results of the study can be useful for the analysis of gravitational stabilization systems with space tethers and for studying the behavior of a spacecraft with a deployed tether. Key words: spacecraft, tethered system, Melnikov method, the analytical solution, chaos.

Vladimir Aslanov, Doctor of Technics, Professor, Head at the Theoretical Mechanics Department.

E-mail: aslanov_vs@mail.ru

Boris Ivanov, Graduate Student. E-mail: boris063@mail.ru