

УДК 535.42

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОКУСИРОВКИ СВЕТА ГРАДИЕНТНЫМИ МИКРОЛИНЗАМИ

© 2010 А.Г. Налимов, В.В. Котляр

Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

Поступила в редакцию 15.10.2009

В статье проведены результаты моделирования двух вариантов градиентных линз для отображения объектов, размеры которых намного меньше длины волны – линза “рыбий глаз Максвелла” и линза Микаэляна. С помощью моделирование определено минимальное расстояние между двумя объектами для каждой из линз по критерию полуспада интенсивности в плоскости изображения. Для линзы Микаэляна это расстояние равно $0,36 \lambda$, для линзы Максвелла $0,49 \lambda$.

Ключевые слова: сверхразрешение, линза Микаэляна, рыбий глаз Максвелла.

ВВЕДЕНИЕ

До того, как появилась концепция совершенных линз [1] в 2000 году, дифракционные пределы разрешения оптической системы считались непоколебимым законом природы [2] в течение длительного времени. Одно из популярных направлений в сверхразрешении – многослойные линзы, состоящие из слоев проводящего материала и диэлектрика [3-9]. Многие из этих работ посвящены различным геометрическим формам супер линз для работы с затухающими волнами. Например, линзы, состоящие из набора диэлектриков с подобранной [10] или не подобранной [11] диэлектрической проницаемостью обладают субволновым разрешением, используя затухающие волны. Известны так же способы восстановления изображения по фазовым сингулярностям [12]. Альтернативными способами, позволяющими превозмочь как разрешение оптики, так и узлов получения обработки изображения, являются способы расширенного декодирования изображения по оттенкам серого цвета [13].

Описанные выше методы используют или трудно изготавливаемые суперлинзы с отрицательной диэлектрической проницаемостью, или же методы обработки изображений, рассчитанные на конкретные размеры субволновых изображений. В данной работе изучается возможность применения градиентных линз для получения изображения точечных источников, размерами на порядок менее длины волны, и отстоящих друг от друга на расстояние менее длины волны.

Налимов Антон Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник. Email: anton@smr.ru. Котляр Виктор Викторович, доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений. E-mail: kotlyar@smr.ru

ЛИНЗА “РЫБИЙ ГЛАЗ” МАКСВЕЛЛА

В [14] приведен пример оптической среды, называемой “рыбий глаз Максвелла”, которая собирает все лучи из точки, лежащей внутри нее на оси X, так же в некоторую точку на оси X. На рис. 1 показан пример “рыбьего глаза” Максвелла, лучи в котором исходят из точки a в точку b , распространяясь в градиентной среде с показателем преломления $n = n(r)$.

Получим интегральное уравнение Абеля для такой среды и найдем его решение с помощью формулы обращения. Общее уравнение для участка луча в сферически-симметричной среде известно [14]:

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{h} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r \sqrt{n^2(r)r^2 - h^2}}, \quad (1)$$

где $h = n(r^*)r^*$ – постоянная луча, r^* – радиус, при котором траектория имеет касательную, перпендикулярную этому радиусу, $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ – начальные и конечные радиусы и углы, которые образуют радиусы с осью x , для участка траектории луча.

Для линзы “рыбий глаз” из геометрических соображений уравнение (1) будет иметь вид:

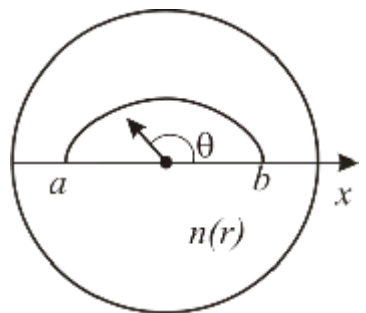


Рис. 1. Ход лучей в “рыбьем глазе” Максвелла.

$$\int_{r^*}^a \frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} + \int_{r^*}^b \frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = \frac{\pi}{h}. \quad (2)$$

Уравнение (2) получено при условии что все лучи начинаются на оси x в точке a и все они сходятся так же на оси x в точке b , поэтому угол $\theta_1 - \theta_2 = \pi$.

Решим уравнение (2) с помощью пары преобразований Абеля, которые запишем в виде [15]:

$$F(r) = 2 \int_{r_0}^r \frac{f(x)xdx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \left[\int_x^{r_0} \frac{dF(r)dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{F(r_0)}{\sqrt{r_0^2 - x^2}} \right]. \quad (4)$$

Разобьем уравнение (2) на два уравнения с помощью неизвестной функции $f(h)$:

$$\int_{r^*}^a \frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = f(h), \quad (5)$$

$$\int_{r^*}^b \frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - h^2}} = \frac{\pi}{h} - f(h). \quad (6)$$

С помощью замены переменных $n(r)r = \rho$, $r = m(\rho)$, $F(\rho) = \ln r = \ln m(\rho)$, $n(a)a = h_a$, $n(b)b = h_b$ преобразуем уравнение (5) к уравнению (4):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \left[\int_h^{h_a} \frac{dF(\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}} - \frac{F(h_0)}{\sqrt{h_a^2 - h^2}} \right] = \\ & = -\frac{1}{\pi} \left[f(h) - \frac{F(h_a)}{\sqrt{h_a^2 - h^2}} \right] = \tilde{f}(h). \quad (7) \end{aligned}$$

Левая часть уравнения (7) по виду совпадает с правой частью уравнения (4), поэтому для нахождения функции $F(\rho)$ можно воспользоваться уравнением обращения (3). Получим:

$$\begin{aligned} F(r) &= 2 \int_{\rho}^{h_a} \frac{\tilde{f}(h)hdh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} = -\frac{2}{\pi} \int_{\rho}^{h_a} \frac{f(h)hdh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} + \\ &+ \frac{2F(h_a)}{\pi} \int_{\rho}^{h_a} \frac{hdh}{\sqrt{(h_a^2 - h^2)(h^2 - \rho^2)}} = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{\rho}^{h_a} \frac{f(h)hdh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} + F(h_a). \quad (8) \end{aligned}$$

Последнее равенство в уравнении (8) получено с помощью табличного интеграла [16]:

$$\int_x^y \frac{dt}{\sqrt{(t-x)(y-t)}} = \pi. \quad (9)$$

Далее подставим в интеграл уравнения (8) функцию $f(h)$ из уравнения (6), получим ($b \geq a$):

$$\begin{aligned} F(\rho) - F(h_a) &= -\frac{2}{\pi} \int_{\rho}^{h_a} \frac{hdh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} \times \\ &\times \left[\frac{\pi}{h} - \int_h^{h_b} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - h^2}} \right] = -2 \int_{\rho}^{h_a} \frac{dh}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^{h_b} \frac{dF(\rho')d\rho'}{d\rho} \int_{\rho}^{\rho'} \frac{dh^2}{\sqrt{(h^2 - \rho^2)(\rho'^2 - h^2)}} = \\ &= -2 \ln \left(\frac{h_a + \sqrt{h_a^2 - \rho^2}}{\rho} \right) + F(h_b) - F(\rho). \quad (10) \end{aligned}$$

В уравнении (10) последнее равенство получено с помощью интеграла (9) и другого табличного интеграла [16]:

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right|. \quad (11)$$

Из уравнения (10) в исходных обозначениях получим:

$$2 \ln r - \ln a - \ln b = -2 \ln \left(\frac{h_a + \sqrt{h_a^2 - \rho^2}}{\rho} \right), \quad (12)$$

или

$$\frac{r}{\sqrt{ab}} = \frac{n(r)r}{n(a)a + \sqrt{n^2(a)a^2 - n^2(r)r^2}}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) нетрудно получить явный вид зависимости показателя преломления линзы “рыбий глаз”:

$$n(r) = \frac{2\sqrt{\frac{a}{b}}n(a)}{1 + \left(\frac{r}{\sqrt{ab}} \right)^2},$$

или:

$$n(r) = \frac{n(0)}{1 + \left(\frac{r}{S}\right)^2}, \quad (14)$$

где $n(0) = 2\sqrt{a/b} \cdot n(a)$ – показатель преломления в центре симметрии среды при $r = 0$, $S = \sqrt{ab}$ – радиус, на котором показатель преломления уменьшается в два раза по сравнению со значением в центре $n(0)$.

ЛИНЗА МИКАЭЛЯНА

В [17] Микаэляном получено и решено интегральное уравнение для бесконечного 2D градиентного оптического элемента, собирающего все лучи, исходящие из точечного источника на оптической оси, в точки на оптической оси, расположенные периодически.

Для моделирование линзы Микаэляна необходимо найти зависимость $n=n(r)$, где r – радиальная координата в цилиндрической системе координат, который фокусирует параллельный поток лучей, падающих перпендикулярно на поверхность цилиндрической линзы, в точку на оси на противоположной стороне линзы (рис. 2).

Для среды с показателем преломления $n=n(r)$, зависящим только от радиальной координаты r в цилиндрической системе координат, имеет место лучевой инвариант, который имеет вид закона преломления Снелиуса [18]:

$$n(r) \cos \theta = n(h) = const, \quad (15)$$

где h – расстояние от оси рассматриваемого луча при $z=0$.

В уравнении (15), которое выполняется вдоль луча, учтено, что при $z=0$ угол θ для всех лучей равен нулю. Из рис. 2 видно, что имеет место связь между приращениями:

$$\frac{dr}{dz} = \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \sqrt{\frac{n^2(r)}{n^2(h)} - 1}. \quad (16)$$

Из уравнения (16) следует интегральное уравнение относительно $n(r)$ для линзы Микаэляна:

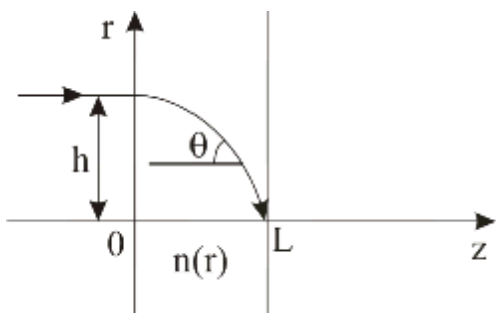


Рис. 2. Ход лучей в линзе Микаэляна

$$\int_h^0 \frac{dr}{\sqrt{\frac{n^2(r)}{n^2(h)} - 1}} = -\int_0^L dz = -L \quad (17)$$

В [17] Микаэлян подбором нашел решение уравнения (17):

$$n(r) = \frac{n(0)}{ch\left(\frac{\pi r}{2L}\right)}. \quad (18)$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ

На рис.3 изображена схема рассматриваемой задачи.

Два источника света помещены перед линзой, за которой расположена плоскость наблюдения. Параметры линзы подбирались с учетом того, чтоб разрешить изображения двух источников света в плоскости наблюдения. Критерием разрешения источников света принималось условие полуспада интенсивности света между пиками изображений источников. В качестве линз для фокусировки излучения рассматривались “рыбий глаз” Максвелла и линза Микаэляна.

На рис. 3 изображена схема рассматриваемой задачи при использовании в качестве фокусатора “рыбьего глаза” Максвелла. Показатель преломления внутри линзы описывается (14), где $n(0)=2$; диаметр линзы принимался различным: $2r_{\max} = 5\lambda, 8\lambda, 10\lambda$; $S = r_{\max}$. Источники света излучали плоскую волну, усеченную по апертуре до 0.05λ .

Моделирование распространения света проводилось методом FDTD при помощи программного пакета FullWave. При данных параметрах фокуси-

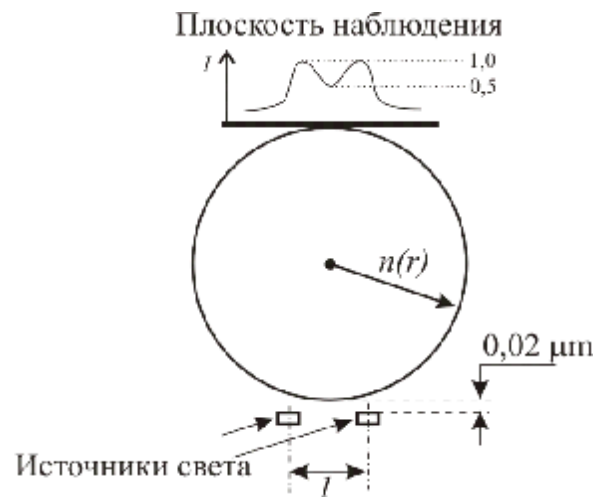


Рис. 3. Схема рассматриваемой задачи с линзой “рыбий глаз” Максвелла

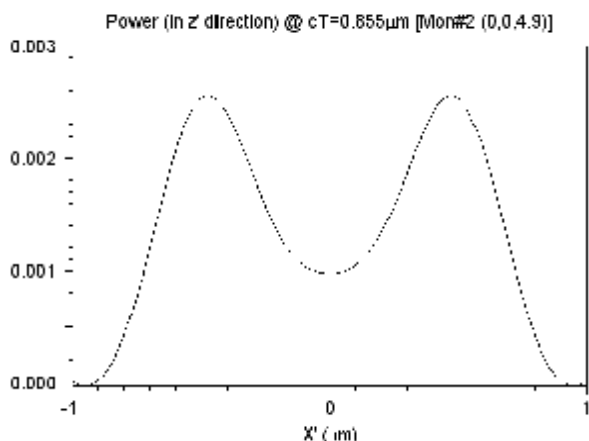


Рис. 4. Распределение интенсивности в выходной плоскости при параметрах на рис. 3

ровка излучения происходит на краю цилиндра. На рис. 4 представлено распределение интенсивности света в плоскости наблюдения в случае 2D моделирования распространения ТЕ-поляризованного света. Плоскость наблюдения расположена в 10 нм за противоположным от источников краем цилиндра. Расстояние между источниками света было принято $0,8 \lambda$. Здесь и везде далее длина волны света в вакууме принята $\lambda = 1 \mu\text{m}$.

Как видно из рис. 4, источники разрешены по критерию полуспада интенсивности. Если уменьшать расстояния между источниками, то даже с небольшим уменьшением (30-50 нм) изображения источников сольются в один пик интенсивности. На рис. 5 представлена диаграмма распределения напряженности поля в момент времени $cT=18 \mu\text{m}$ в плоскости распространения света, проходящей через центры двух источников света.

Как видно из рис. 5, показатель преломления $n=1$ на краях линзы мешает получить более высокое разрешение. На рис. 6 представлено распределение интенсивности сфокусированного изображения одного источника при тех же параметрах.

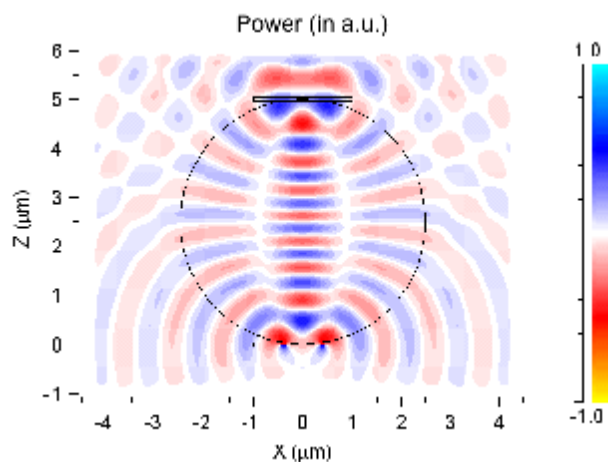


Рис. 5. Распределение напряженности E_x в момент времени $cT=18 \mu\text{m}$ при параметрах на рис. 3

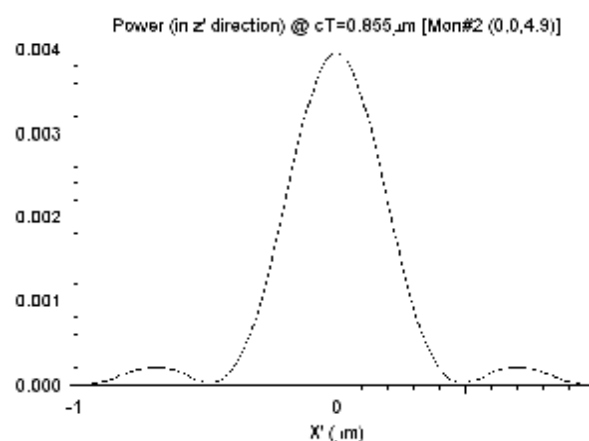


Рис. 6. Распределение интенсивности в плоскости изображения от одного источника

Из рис. 6 видно, что ширина пика интенсивности по полуспаду составляет $0,45 \lambda$. На рис. 7 представлены графики распределения интенсивности в случае увеличения показателя преломления в (14) до $n(0)=3,47$.

Как видно из рис. 7, наилучшее разрешение такой линзы получается $0,49 \lambda$, что несколько превосходит результаты, полученные в [19]. Ширина же одного пика в случае таких параметров линзы получается меньше, чем в случае $n(0)=2$ (рис. 8).

Как видно из рис. 8, ширина пика изображения источника света составляет $0,3 \lambda$ по полуспаду интенсивности.

Расстояние между плоскостью наблюдения и срезом линзы было принято 10 нм. Если увеличивать расстояние между срезом линзы и плоскостью наблюдения, источники достаточно быстро перестают разрешаться. Если взять два источника света шириной $0,05 \mu\text{m}$ с расстоянием между ними $l=0,9 \mu\text{m}$ и поместить за ними плоскость наблюдения без линзы, то максимальное

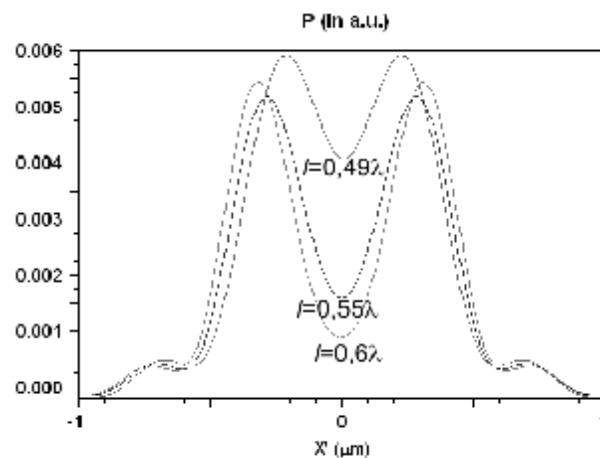


Рис. 7. Распределение интенсивности излучения в плоскости изображения от двух источников света в случае $n(0)=3,47$

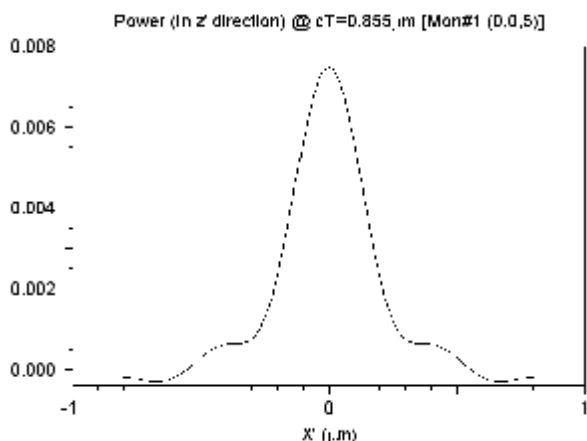


Рис. 8. Распределение интенсивности излучения в плоскости изображения от одного источника света в случае $n(0)=3,47$

расстояние h , на котором источники разрешаются по полуспаду интенсивности, составляет $0,2 \lambda$. На рис. 9 показано распределение интенсивности в плоскости наблюдения в этом случае.

Как видно из рис. 9, $0,2 \lambda$ – предельное расстояние, чтобы разрешить два точечных источника света. При большем расстоянии центральный пик интенсивности растет, два пика интенсивности за источниками света падают и сливаются с ним. В случае же применения линзы “рыбий глаз” Максвелла изображения источников можно отдалить от них на существенно большее расстояние, равное нескольким длинам волн.

Лучшими возможностями разрешения обладает линза Микаэляна (рис. 10).

Моделирование прохождения света от точечных источников через нее проводилось при следующих параметрах (рис. 10): ширина линзы $4,1 \mu\text{m}$, длина $0,6 \mu\text{m}$, показатель преломления линзы описывался законом (18), $n(0)=3,47$. Источники разрешились по условию полуспада интенсивности при расстоянии между их цент-

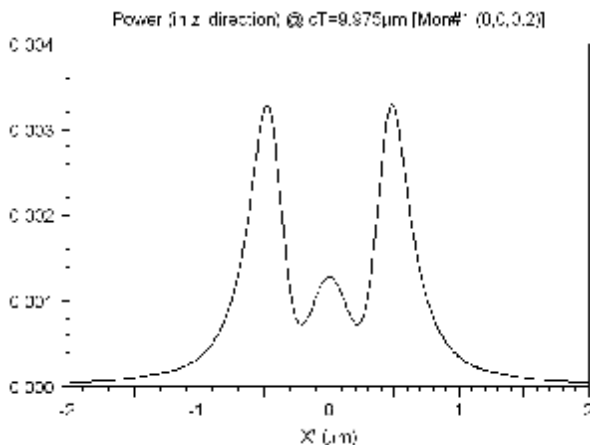


Рис. 9. Распределение интенсивности на расстоянии $0,2 \lambda$ за источниками света без фокусирующей линзы

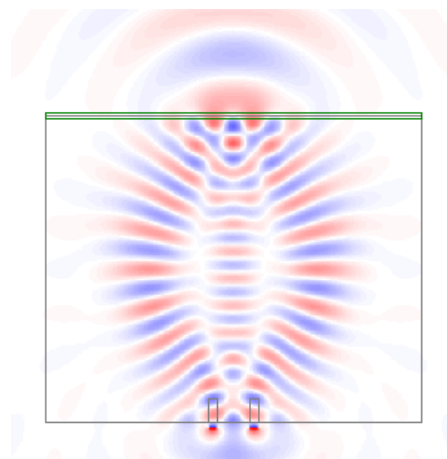


Рис. 10. Распределение напряженности E_x в случае линзы Микаэляна

рами $0,36 \lambda$. Как видно из рис. 10, фокусировка излучения происходит на границе линзы, дальше после выхода света из нее изображения двух источников быстро сливаются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены два варианта градиентных оптических элементов для получения изображения источников, отстоящих друг от друга на расстоянии менее длины волны. Показано, что наилучшим разрешением обладает линза Микаэляна. В этом случае минимальное расстояние между источниками по критерию полуспада интенсивности, которые можно отобразить в плоскости изображения отдельно, равно $0,36 \lambda$. Худшими возможностями разрешения двух источников обладает линза “рыбий глаз” Максвелла. В этом случае минимальное разрешимое расстояние между источниками равно $0,49 \lambda$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pendry J.B. Negative Refraction Makes a Perfect Lens // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 3966-3969.
2. Born M., Wolf E. Principles of Optics. Seventh expanded edition. Cambridge, England, 1999.
3. Ramakrishna S.A. Physics of negative refractive index materials // Rep. Prog. Phys. 2005. Vol. 68. P. 449-521.
4. Melville D., Blaikie R.J. Super-resolution imaging through a planar silver layer // Opt. Express. 2005. Vol. 13. P. 2127-2134.
5. Melville D., Blaikie R.J. Experimental comparison of resolution and pattern fidelity in single and double-layer planar lens lithography // J. Opt. Soc. Am. B. 2006. Vol. 23. P. 461-467.
6. Optical Hyperlens: Far-field imaging beyond the diffraction limit / Jacob Z., Alekseyev L.V., Narimanov E. // Opt. Express. 2006. Vol. 14. P. 8247-8256.
7. Salandrino, Engheta A.N. Far-field subdiffraction optical microscopy using metamaterial crystals: Theory and simulations // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 74. P. 75103.

8. Experimental studies of far-field superlens for sub-diffractive optical imaging / *Liu Z., Durant S., Lee H., Pikus Y. [and oth.]* // Opt. Express. 2007. Vol. 15. P. 6947-6954.
9. Sub-Diffraction-Limited Optical Imaging with a Silver Superlens / *Fang N., Lee H., Sun C., Zhang X.* // Science. 2005. Vol. 308. P. 534-537.
10. Subwavelength focusing with a multilayered Fabry-Perot structure at optical frequencies / *Li X., He S., Jin Y.* // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 75. P. 045103.
11. Directed subwavelength imaging using a layered metal-dielectric system / *Wood B., Pendry J.B., Tsai D.P.* // Phys. Rev. B., 2006. Vol. 74. P. 115116.
12. *Тычинский В.П.* Сверхразрешение и сингулярности в фазовых изображениях // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. №11. С. 1205-1214.
13. *Zalovsky Z.* Superresolution using gray level coding // Opt. Express. 2006. Vol. 14. N. 12. PP. 5178-5182.
14. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems / *Greishuk G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A.* // SPIE Press, Bellingham, 1997.
15. *Котляр В.В., Мелёхин А.С.* Преобразование Абеля в задачах синтеза градиентных оптических элементов // Компьютерная оптика. 2001. Т. 22. С. 29-36.
16. Интегралы и ряды / *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Марьчев О.И.* М.: Наука, 1981.
17. *Микаэлян А.Л.* Применение слоистой среды для фокусирования волн // Доклады академии наук СССР, 1951. Т. LXXXI. С. 569–571.
18. Optics of diffractive and gradient-index elements and systems / *Greishuk G.I., Bobrov S.T., Stepanov S.A.* // SPIE Press, Bellingham, 1997.
19. Unrestricted superlensing in a triangular two-dimensional photonic crystal / *Wang X., Ren Z.F., Kempa K.* // Opt. Express. 2004. Vol. 12. N. 13. Pp. 2919-2923.

MODELING OF LIGHT FOCUSING BY A GRADIENT MICROLENSES

© 2010 V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov

Image Processing Systems Institute of Russian Academy of Sciences, Samara

Two types of gradient lenses for object imaging, which are less, then wavelength, are considered – lens “fisheye of Maxwell” and lens of Mikaelan. Minimal distance between small objects by recognition criteria FWHM was found. This distance is equal to $0,36 \lambda$ for the lens of Mikaelan, and $0,49 \lambda$ for “fisheye of Maxwell”.
Key words: superresolution, lens of Mikaelan, lens “fisheye of Maxwell”.