УДК 624.07:534.1

О ДИНАМИКЕ ПРЕЦЕССИОННОГО ДВИЖЕНИЯ СТОЯЧИХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НА ОПОРАХ ОБОЛОЧКЕ С РАСТЯЖИМОЙ СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2010 А.И. Полунин

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова

Поступила в редакцию 26.10.2010

В статье на основе анализа математической модели динамики вращающейся на опорах оболочки типа Кирхгофа-Лява с растяжимой срединной поверхностью приведено доказательство свойств прецессионного движения возбужденных стоячих волн. Показано, что скорость прецессии может быть равна скорости вращения оболочки на опорах, что необходимо учитывать при математическом моделировании ее поведения.

Ключевые слова: *динамика вращающейся оболочки с опорами, стоячая волна, прецессионное движение волны*

В машиностроении одним из современных способов обработки с целью исправления формы крупногабаритных (диаметром до нескольких метров) оболочек, колец является использование безрамной технологии. При ее использовании тело ставят на два опорных ролика в вертикальной плоскости, приводят их во вращение и обрабатывают приставным станочным модулем. Вследствие конечных характеристик жесткости обрабатываемого тела при действии сил резания, возмущающих факторов возникают его колебания, влияющие на точность формообразования, что необходимо учитывать при выборе режимов обработки. Осуществить это можно с помощью математического моделирования данного процесса. При математическом моделировании поведения вращающихся на опорах кольце, оболочке необходимо учитывать прецессию возбужденной действием внешних сил стоячей волны. В работе [1] приведено доказательство, что во вращающемся на опорах кольце, уравнения для которого получены на основе гипотезы растяжимости средней линии, стоячие волны могут прецессировать с угловой скоростью вращения кольца. В данной статье приведено доказательство, что в оболочке, уравнения для которой получены на основе гипотез Кирхгофа-Лява с учетом растяжимости срединной поверхности прецессия стоячей волны также может происходить с угловой скоростью вращения оболочки.

Полунин Александр Иванович, кандидат технических наук, профессор кафедры программного обеспечения ЭВМ. E-mail: polynin@intbel.ru

Получим уравнения, описывающие поведение оболочки. Для этого зададим декартову систему координат $X_1, У_1, Z_1$. Ось $O_1У_1$ является осью вращающейся оболочки. Для задания положения точек отсчетной поверхности оболочки, в качестве которой используем срединную поверхность, зададим цилиндрическую систему координат θ, r, $У$, где θ – угол, задающий положение точки на отсчётной поверхности относительно вертикали в начальный момент времени, r – радиус оболочки, $У$ – линейная координата вдоль оси оболочки, совпадающая с осью $У_1$. Начало системы координат находится в центре оболочки. Длина ее a, толщина h. Перемещения точек отсчетной поверхности оболочки в процессе деформации в направлении радиуса r, координаты $У$ и касательной к поверхности оболочки обозначим соответственно $U_0(\theta)$, $W(\theta)$, $V(\theta)$. Кроме линейных перемещений U_0, W, V точек отсчётной поверхности деформированной оболочки зададим угловой поворот $\gamma(\theta)$ образующей оболочки в плоскости, проходящей через радиус r и ось $У$. Такое задание деформации позволяет учесть различные перемещения точек оболочки при изменении координаты $У$, а так же наличие опор. В этом случае радиальное перемещение U точки отсчётной поверхности, заданной координатами θ и $У$, имеет вид

$$U\left(\theta, У\right) = U_0\left(\theta\right) + \gamma(\theta)У . \qquad (1)$$

Величины линейных перемещений точек отсчетной поверхности оболочки и угловой поворот образующей зададим в виде рядов Фурье

$$U_0 = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_{ui} \cos(i(\theta + \varphi_{ui})) + \sum_{i=1}^{N} b_{ui} \sin(i(\theta + \varphi_{ui})), \quad (2)$$

$$V = \sum_{i=1}^{N} a_{vi} \cos(i(\theta + \varphi_{vi})) + \sum_{i=1}^{N} b_{vi} \sin(i(\theta + \varphi_{vi})) \quad (3)$$

$$W = \sum_{i=1}^{N} a_{wi} \cos(i(\theta + \varphi_{wi})) + \sum_{i=1}^{N} b_{wi} \sin(i(\theta + \varphi_{wi})), \quad (4)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N} a_{\gamma i} \cos(i(\theta + \varphi_{\gamma i})) + \sum_{i=1}^{N} b_{\gamma i} \sin(i(\theta + \varphi_{\gamma i})). \quad (5)$$

Здесь: a_0, a_{ui}, b_{ui}, a_{vi}, b_{vi} a_{wi}, b_{wi}, $a_{\gamma i}$, $b_{\gamma i}$ – обобщенные координаты – неизвестные функции времени *t*, которые надо определить, задают амплитуду колебаний; φ_{ui}, φ_{wi}, $\varphi_{\gamma i}$ - неизвестные функции времени, задающие прецессию стоячих волн, подлежащие определению; *N* – число учитываемых слагаемых ряда Фурье.

Примем, что оболочка касается опорных роликов по всей длине своих образующих, т.е. опорные ролики выставлены без ошибок. Тогда условиями, накладываемыми на обобщенные координаты оболочки, является равенство нулю радиальных перемещений *U* в точках опор, равенство нулю перемещений *V* в точках опор, а также равенство нулю перемещений оболочки *W* в направлении оси *У* в точках опор. Так как оболочка вращается, то координаты θ точек оболочки, в связанной с ней системе координат, находящихся на опорах, определяем зависимостями $\pi - \alpha - \Omega t$ для одной опоры и $\pi + \alpha - \Omega t$ для второй. Здесь Ω - угловая скорость вращения оболочки; 2α – угол между опорами. Таким образом, в точках опор имеем условия связи

$$U(\pi - \alpha - \Omega t, У) = 0, \quad U(\pi + \alpha - \Omega t, У) = 0, \quad V(\pi - \alpha - \Omega t) = 0, \quad (6)$$

$$V(\pi + \alpha - \Omega t) = 0, \; W(\pi - \alpha - \Omega t) = 0, \quad W(\pi + \alpha - \Omega t) = 0. \quad (7)$$

Выполнение этих условий для любого значения времени *t*, для любого значения координаты *У* для перемещения *U,* а также для перемещений *V, W* дает восемь условий связи на обобщенные координаты, описывающие динамику оболочки, и, соответственно, восемь неопределенных множителей Лагранжа, используемых для учета условий связи при получении дифференциальных уравнений с помощью формализма Лагранжа. Для этого кинетическую энергию оболочки определяем по формуле [2]:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mu_0 [(\dot{V} + \Omega r_0 + \Omega U)^2 + (\dot{U} - \Omega V)^2 + \dot{W}^2] d\theta dУ, \quad (8)$$

где $\mu_0 = r\rho_0 h$; ρ_0 – удельная плотность материала оболочки, а потенциальную в соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява [3]:

$$\Pi = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_у \varepsilon_у + \sigma_{\theta у} \varepsilon_{\theta у}) dZ d\theta dУ, \quad (9)$$

где σ_θ, $\sigma_у$ – напряжения по координатам θ, *У* соответственно; $\sigma_{\theta у}$ – напряжение в плоскости $\theta У$; ε_θ, $\varepsilon_у$ – деформации по осям θ, *У* соответственно; $\varepsilon_{\theta у}$ – сдвиг в плоскости $\theta У$.

В полученных зависимостях фигурируют неизвестные функции $\varphi_{ui}(t)$, $\varphi_{vi}(t)$, $\varphi_{\gamma i}(t)$, $\varphi_{wi}(t)$, задающие прецессионное движения стоячих волн в оболочке. От вида этих функций зависит решение дифференциальных уравнений, описывающих поведение вращающейся оболочки на опорах. Для выяснения характера прецессионного движения стоячих волн докажем следующее утверждение: при возникновении периодических колебаний во вращающейся с постоянной угловой скоростью на двух параллельных опорах оболочке с растяжимой срединной поверхностью прецессия волн $\varphi_{uj}(t)$, $\varphi_{vi}(t)$, $\varphi_{\gamma j}(t)$, $\varphi_{wj}(t)$ (*j*=1,2,…,*N*) может происходить с угловой скоростью вращения оболочки.

Доказательство. Для получения зависимостей, описывающих изменение этих функций в соответствии с законами механики, будем рассматривать их как ещё одни координаты, меняющиеся во времени, задающие поведение системы. Тогда в соответствии с вариационными принципами механики в реальном движении будут реализовываться такие функции $\varphi_{uj}(t)$, $\varphi_{vi}(t)$, $\varphi_{\gamma j}(t)$, $\varphi_{wj}(t)$ (*j*=1,2,…,*N*), что действие по Гамильтону будет иметь экстремум. Поведение их описывается дифференциальными уравнениями. Для получения их можно воспользоваться вариационным принципом

Гамильтона, но с точки зрения объема требуемых выкладок более рациональным является использование уравнения Лагранжа второго рода. Таким образом, нахождение закона прецессии стоячих волн в оболочке сводиться к нахождению дифференциальных уравнений для функций, задающих эту прецессию. Обобщенными переменными, описывающими поведение оболочки, будут

$$a_0,$$
$$a_{ui}, b_{ui}, a_{vi}, b_{vi}, a_{\gamma i}, b_{\gamma i}, a_{wi}, b_{wi}, \varphi_{ui}, \varphi_{vi}, \varphi_{\gamma i}, \varphi_{wi} (i = 1, 2, ..., N).$$

Дифференциальные уравнения для $a_0, a_{uj}, b_{uj}, \varphi_{uj}$ (j=1,2,…,N) в соответствии с уравнением Лагранжа второго рода и условиями связей имеют вид:

$$2\nu_0\pi\ddot{a}_0 + \left(4\pi S_2 - 2\nu_0\pi\Omega^2\right)a_0 - 2\nu_0\pi r_0\Omega^2 = \lambda_1^H + \lambda_2^H$$

$$\begin{gathered}\pi\nu_0 \,[\ddot{a}_{uj} + j\ddot{\varphi}_{uj}b_{uj} + 2j\dot{\varphi}_{uj}\dot{b}_{uj} - 2\Omega\dot{a}_{vj}C_j^{uv} - \\ -2\Omega b_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu} - (\Omega^2 + j^2\dot{\varphi}_{uj}^2)a_{uj}] + \\ +\nu_0\Omega\left[-2a_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}K_j^{uv} - 2\dot{b}_{vj}K_j^{vu}\right] + \pi[2(S_2 + \\ +S_6 j^4 - S_{10}j^2)a_{uj} + (S_4 j - S_8 j^3)b_{vj}C_j^{uv}] + \\ +(S_4 j - S_8 j^3)K_j^{uv}a_{vj} = \lambda_1^H \cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + \\ +\lambda_2^H \cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})),\end{gathered} \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}\pi\nu_0[\ddot{b}_{uj} - j\ddot{\varphi}_{uj}a_{uj} - 2j\dot{\varphi}_{uj}\dot{a}_{uj} - 2\Omega\dot{b}_{vj}C_j^{uv} + \\ +2\Omega a_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}C_j^{uv} - (\Omega^2 + j^2\dot{\varphi}_{uj}^2)b_{uj}] + \\ +\nu_0\Omega\left[-2b_{vj}j\dot{\varphi}_{vj}K_j^{uv} - 2\dot{a}_{vj}K_j^{uv}\right] + \pi[2(S_2 + \\ +S_6 j^4 - S_{10}j^2)b_{uj} + (S_8 j^3 - S_4 j)a_{vj}C_j^{uv}] + \\ +(S_4 j - S_8 j^3)K_j^{uv}b_{vj} = \lambda_1^H \sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + \\ +\lambda_2^H \sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})),\end{gathered} \qquad (11)$$

$$\begin{gathered}\pi\nu_0\left[j^2\ddot{\varphi}_{uj}a_{uj}^2 + 2j^2\dot{\varphi}_{uj}a_{uj}\dot{a}_{uj} + j^2\ddot{\varphi}_{uj}b_{uj}^2 + \right. \\ +2j^2\dot{\varphi}_{uj}b_{uj}\dot{b}_{uj} + 2\Omega jC_j^{uv}a_{uj}\dot{b}_{vj} - 2\Omega jC_j^{uv}\dot{a}_{vj}b_{uj} + \\ +j\ddot{a}_{uj}b_{uj} - j\ddot{b}_{uj}a_{uj} - 2\Omega j^2\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu}b_{uj}b_{vj} - \\ \left. -2\Omega j^2\dot{\varphi}_{vj}C_j^{vu}a_{uj}a_{vj}\right] + \nu_0\Omega\left[2j^2\dot{\varphi}_{vj}a_{uj}b_{vj}K_j^{uv} - \right. \\ \left. -2j^2\dot{\varphi}_{vj}a_{vj}b_{uj}K_j^{uv} - 2jK_j^{vu}b_{uj}\dot{b}_{vj} - 2jK_j^{vu}a_{uj}\dot{a}_{vj}\right] + \\ +\pi\left[(S_4 j - S_8 j^3)jC_j^{uv}a_{vj}a_{uj} + \right. \\ \left. +(S_4 j - S_8 j^3)jC_j^{uv}b_{vj}b_{uj}\right] - (S_4 j - S_8 j^3)ja_{uj}b_{vj}K_j^{uv} - \\ -(S_8 j^3 - S_4 j)jK_j^{uv}b_{uj}a_{vj} = \\ = \lambda_1^H[-a_{uj}j\sin(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + \\ +b_{uj}j\cos(j(\pi - \alpha - \Omega t + \varphi_{uj}))] + \\ +\lambda_2^H[-a_{uj}j\sin(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj})) + \\ +b_{uj}j\cos(j(\pi + \alpha - \Omega t + \varphi_{uj}))].\end{gathered} \qquad (12)$$

Здесь $\lambda_i^H (i = 1, 2, ..., 8)$ - неопределённые множители Лагранжа. Система является матричной системой линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой зависят от параметров оболочки и номера обобщенной координаты *j,* по которой осуществляется дифференцирование для получения уравнений. Анализ уравнений (10) - (12) показывает, что уравнение (12) для φ_{uj} может быть получено путём умножения уравнения (10) для a_{uj} на переменную b_{uj}, вычитания из этого произведения уравнения (11) для b_{uj}, умноженного на a_{uj}, и умножения этой разности на *j.* Отсюда следует, что дифференциальное уравнение для φ_{uj} является комбинацией дифференциальных уравнений для a_{uj} и b_{uj}. Значит, решение дифференциального уравнения для φ_{uj} является комбинацией решений дифференциальных уравнений для a_{uj}, b_{uj}. В уравнения для a_{uj}, b_{uj} входят функции φ_{uj}, отсюда следует, что они могут быть произвольными. Будем рассматривать установившиеся периодические колебания оболочки, которые могут возникнуть вследствие действия возмущений. В этом случае дифференциальные уравнения (10), (11) для a_{uj}, b_{uj} должны быть линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Из этого условия найдём зависимости для φ_{uj}. Для того, чтобы коэффициенты в дифференциальных уравнениях были константами необходимо, чтобы $\dot{\varphi}_{uj}$ были константами. Другим условием для определения φ_{uj} является условие, что прецессионное движение волн φ_{uj} осуществляется только внутри диапазона углов, ограниченного опорами. В случае, если $\dot{\varphi}_{uj}$ константы, это может быть только при $\dot{\varphi}_{uj} = \Omega,$ (j=1,2,...,N). Тогда в условиях связи (6), (7) а также у множителей перед неопределенными множителями Лагранжа в уравнениях (10), (11) аргументы под знаком синуса и косинуса являются постоянными коэффициентами, т.е.

$$\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{uj}=\pi-\alpha, \pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{uj}=\pi+\alpha,$$
$$\pi-\alpha-\Omega t+\varphi_{vj}=\pi-\alpha,$$
$$\pi+\alpha-\Omega t+\varphi_{vj}=\pi+\alpha.$$

Поэтому система уравнений (10), (11) вместе с условиями связи является системой уравнений с постоянными коэффициентами, имеющей периодические решения. Осуществляя аналогичный анализ для уравнений, описывающих поведение переменных a_{vj}, b_{vj}, $a_{\gamma j}$, $b_{\gamma j}$, a_{wj}, b_{wj}, получим так же, что $\dot{\varphi}_{vj}=\dot{\varphi}_{\gamma j}=\dot{\varphi}_{wj}=\Omega$, *(j* = 1,2,...,*N).*

Выводы: доказано, что в случае возникновения во вращающейся оболочке стоячих волн их прецессионное движение может происходить с угловой скоростью вращения оболочки. Полученный результат может использоваться для получения дифференциальных уравнений, описывающих поведение вращающихся на опорах оболочек, колец при внешних сил, применяемых при математическом моделировании динамики таких объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Полунин, А.И.* О характере прецессионного движения стоячих волн во вращающемся кольце с опорами / *А.И. Полунин* // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2008. №10. С. 27-33.
2. *Журавлёв, В.Ф.* Волновой твердотельный гироскоп / *В.Ф. Журавлёв, Д.М. Климов.* – М.: Наука, 1985. 126 с.
3. *Аксельрад, Э.Л.* Гибкие оболочки / *Э.Л. Аксельрад*. – М.: Наука, 1976. 376 с.

ABOUT DYNAMICS OF PRECESSIONAL MOVEMENT OF STANDING WAVES IN THE SHELL ROTATING ON SUPPORTS WITH EXTENSIBLE MEDIAN SURFACE

A.I. Polunin

Belgorod State Technological University named after V.G. Shuhov

In paper on the basis of analysis of mathematical model of dynamics of Kirhgoff-Lyave type shell rotating on support with an extensible median surface the demonstration of precessional movement properties of energized standing waves is resulted. It is shown, that speed of precession can be equal to speed of shell rotating on support that it is necessary to consider at mathematical modeling of its behaviour.

Key words: *dynamics of rotating shell with support, standing wave, precessional movement of a wave*

Alexander Polunin, Candidate of Technical Sciences, Professor at the Computer Software Department. E-mail: polynin@intbel.ru