УДК 533.15; 536.25

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ СМЕШИВАЮЩИХСЯ КОМПОНЕНТОВ В ПЛОСКОМ ДИФФУЗИОННОМ КАНАЛЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ПЕРЕПАДЕ ДАВЛЕНИЯ НА ЕГО КОНЦАХ

© 2010 В.Д.Селезнев[1], И.В.Поярков[2]

[1]Уральский государственный технический университет, г. Екатеринбург
[2]Научно-исследовательский институт экспериментальной и теоретической физики при КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

Поступила в редакцию 11.01.2010

В данной статье рассматривается нелинейное распределение концентрации смешивающихся компонентов по длине диффузионного канала. Получена система одномерных уравнений локальной неравновесной термодинамики, позволяющей описать неизобарное смешение тройных газовых смесей в вертикальном канале.

Ключевые слова: диффузионный мост, вынужденная конвекция, концентрация компонентов.

Исследования процесса смешения в трехкомпонентных газовых смесях показали, что при определенных термодинамических параметрах системы (давление, температура, концентрация компонентов) и геометрических характеристиках диффузионного канала (характерный размер, число и форма канала) процесс смешения может быть диффузионным или конвективный. Исследования в основном проводились в замкнутой системе, например двухколбовом аппарате, в котором конвективный массоперенос происходит при изобарических условиях [1-3]. В открытых системах, например диффузионном мосте, схема которого приведена на рисунке 1, опыты носили эпизодический характер, так как были связаны со значительными трудностями в возможности варьирования термодинамическими параметрами системы и их реализации в экспериментальном стенде. Но все же, несмотря на эти трудности метод диффузионного моста, остается привлекательным, так как есть возможность в управлении процесса смешения через создаваемый перепад давления, на концах диффузионного канала – $\Delta p$ [4].

В настоящее время достаточно хорошо разработана теоретическая модель, описывающая смену диффузионного процесса на конвективный, реализуемый при равенстве давлений на концах диффузионного канала. Согласно этой модели распределение концентрации компонентов по длине диффузионного канала нелинейное. В настоящее время нет теории, позволяющей описать переход “диффузия-конвекция” при произвольном перепаде давления на концах диффузионного пути. В представленной статье рассматривается распределение концентрации смешивающихся компонентов по длине диффузионного канала.

Как и для бинарных смесей, процесс смешения в трехкомпонентной смеси сопровождается диффузионным бароэффектом [5]. Для вязкого режима величена отношение перепада давления меджу концами диффузионного канала и давления в системе – $\Delta p / p$ имеет порядок $Kn^2$ и является пренебрежимо малой, поэтому бароэффект обуславливает выполнение условия:

$$\vec{\omega} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_2\vec{u}_3 = 0\,, \qquad (1)$$

где $c_i$ - концентрация $i$-го компонента.

Диффузионные скорости компонентов $\vec{u}_i$ определяются из уравнений Стефана-Максвелла [6]:

$$\frac{c_1c_3}{D_{13}}\left(\vec{u}_1 - \vec{u}_3\right) + \frac{c_1c_2}{D_{12}}\left(\vec{u}_1 - \vec{u}_2\right) = -\nabla c_1\,,$$

$$\frac{c_1c_2}{D_{12}}\left(\vec{u}_2 - \vec{u}_1\right) + \frac{c_2c_3}{D_{23}}\left(\vec{u}_2 - \vec{u}_3\right) = -\nabla c_2\,. \qquad (2)$$

Используя уравнения (2), определение для среднечисловой – $\vec{\omega} = \dfrac{n_1\vec{u}_1 + n_2\vec{u}_2 + n_3\vec{u}_3}{n}$ и среднемассовой – $\vec{\upsilon}_0 = \dfrac{\rho_1\vec{u}_1 + \rho_2\vec{u}_2 + \rho_3\vec{u}_3}{\rho}$ ско-

Селезнев Владимир Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры молекулярной физики. E-mail: selvd@yandex.ru.
Поярков Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории тепломассопереноса.
E-mail: p-igor@inbox.ru.

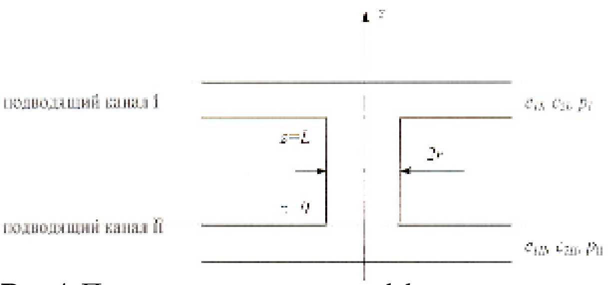


**Рис. 1.** Принципиальная схема диффузионного моста

ростей, плотность компонента – $\rho_i = c_i m_i$ ( $m_i$ – масса $i$-го компонента), получим систему уравнений, описывающей макроскопическое движение трехкомпонентной газовой смеси:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{\upsilon}_0}{\partial t} + (\vec{\upsilon}_0 \nabla)\vec{\upsilon}_0\right] =$$

$$= -\nabla p + \eta \Delta \vec{\upsilon}_0 + \left(\frac{\eta}{3} + \xi\right)\nabla div \vec{\upsilon}_0 + \rho \vec{g},$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \vec{\omega}\nabla c_1 = div\left(D_{11}^* \nabla c_1 + D_{12}^* \nabla c_2\right), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} + \vec{\omega}\nabla c_2 = div\left(D_{21}^* \nabla c_1 + D_{22}^* \nabla c_2\right),$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -n \quad div \vec{\omega},$$

где $\vec{g}$ – ускорение силы тяжести, $\eta$ и $\xi$ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, $D_{ij}^*$ – матричные коэффициенты многокомпонентной диффузии, определяемые через коэффициенты взаимной диффузии $D_{ij}$ следующими соотношениями [6]:

$$D_{11}^* = \frac{D_{13}\left[c_1 D_{23} + (c_2 + c_3) D_{12}\right]}{c_1 D_{23} + c_2 D_{13} + c_3 D_{12}},$$

$$D_{12}^* = -\frac{c_1 D_{23}(D_{12} - D_{13})}{c_1 D_{23} + c_2 D_{13} + c_3 D_{12}},$$

$$D_{22}^* = \frac{D_{23}\left[c_2 D_{13} + (c_1 + c_3) D_{12}\right]}{c_1 D_{23} + c_2 D_{13} + c_3 D_{12}},$$

$$D_{21}^* = -\frac{c_2 D_{13}(D_{12} - D_{23})}{c_1 D_{23} + c_2 D_{13} + c_3 D_{12}}.$$

Рассмотрим движение тройной смеси в вертикальном плоском канале с длиной $L$ и полушириной $r$, ось $z$ направлена вдоль оси канала вверх, рис. 1. Будем считать, что $r/L \ll 1$, разность давлений на концах канала $\Delta p$ ограничена настолько, что время поперечного выравнивания концентрации $\tau_r = r^2 / D_i$ мало по сравнению со временем движения смеси вдоль канала

$$\tau_L = \frac{L}{\upsilon_{0z}} = \frac{L^2}{\frac{r^2}{8\eta}\left(\Delta p - \rho g_z L\right)},$$

где $\eta = \frac{1}{2}\rho\lambda\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ , $D_i$ – истинный коэффициент диффузии. Из условия $\tau_r \ll \tau_L$ легко получить следующие ограничения на $\Delta p$:

$$\frac{\Delta p - \rho g_z L}{p} \ll \frac{\lambda^2}{r^2}\frac{L^2}{r^2} \approx \frac{\Delta p_{\text{бар}}}{p}\frac{L^2}{r^2}$$

или

$$\frac{\Delta p - \rho g_z L}{p}\frac{r^2}{\lambda^2}\frac{r^2}{L^2} \ll 1,$$ где $\lambda$ – длина свободного пробега молекул, $\Delta p_{\text{бар}}$ – величина диффузионного бароэффекта. Если наложенные ограничения выполняются, то в поперечном сечении успевает сформироваться определенный, почти однородный состав. В соответствии с условиями поставленной задачи силы $\nabla p$ и $\rho\vec{g}$ действуют только в направлении оси $z$, поэтому будем принимать во внимание только проекцию уравнения Навье-Стокса на ось $z$, которая может быть записана так:

$$\rho\frac{\partial \upsilon_{0z}}{\partial t} + \rho\left(\upsilon_{0x}\frac{\partial \upsilon_{0z}}{\partial x} + \upsilon_{0z}\frac{\partial \upsilon_{0z}}{\partial y} + \upsilon_{0z}\frac{\partial \upsilon_{0z}}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 \upsilon_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_{0z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_{0z}}{\partial z^2}\right) + \qquad (4)$$

$$+ \frac{\eta}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \upsilon_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_{0z}}{\partial z}\right) + \rho g_z.$$

Отношение инерциального члена к вязкому члену можно оценить так:

$$\frac{\rho\upsilon_{0z}\frac{\partial \upsilon_{0z}}{\partial z}}{\eta\frac{\partial^2 \upsilon_{0z}}{\partial x^2}} = \frac{r^2}{\lambda^2}\frac{r^2}{L^2}\frac{\Delta p - \rho g_z L}{p},$$

но в соответствии с наложенными ограничениями на $\Delta p$ это отношение много меньше единицы, поэтому инерционными членами можно пренебречь. В вязком члене, очевидно, можно пренебречь продольной производной, так как

$\left.\dfrac{\partial^2 \upsilon_{0z}}{\partial z^2}\right/\dfrac{\partial^2 \upsilon_{0z}}{\partial x^2} \approx \dfrac{r^2}{L^2}$. Член с $div\vec{\upsilon}_0$ дает такое же отношение.

Опуская малые члены, вместо (4) имеем:

$$\rho\frac{\partial \upsilon_{0z}}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial z}=\eta\left(\frac{\partial^2 \upsilon_{0z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon_{0z}}{\partial y^2}\right)+\rho g_z. \quad (5)$$

Перейдем к анализу уравнений непрерывности и конвективной диффузии системы (3). В процессе конвективного течения в вертикальном длинном канале вдали от торцов можно принять, что $\omega_x=\omega_y=0$. Запишем более подробно правую часть уравнений диффузии:

$$\begin{aligned} &div\left(D_{11}^*\nabla c_1+D_{12}^*\nabla c_2\right)=\\ &=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{11}^*\frac{\partial c_1}{\partial x}+D_{12}^*\frac{\partial c_2}{\partial x}\right)+\\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{11}^*\frac{\partial c_1}{\partial y}+D_{12}^*\frac{\partial c_2}{\partial y}\right)+\\ &+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{11}^*\frac{\partial c_1}{\partial z}+D_{12}^*\frac{\partial c_2}{\partial z}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

так как $c_1$ и $c_2$ слабо зависят от поперечных координат, то (6) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &div\left(D_{11}^*\nabla c_1+D_{12}^*\nabla c_2\right)=\\ &=D_{11}^*\Delta_\perp c_1+D_{12}^*\Delta_\perp c_2+\\ &+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{11}^*\frac{\partial c_1}{\partial z}+D_{12}^*\frac{\partial c_2}{\partial z}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Delta_\perp c_1=\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 c_1}{\partial y^2}$.

Учитывая условие $\omega_x=\omega_y=0$ и (7), перепишем уравнения диффузии для условий нашей задачи с учетом пренебрежения малыми величинами:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial t}+\omega_z\frac{\partial c_1}{\partial z}=D_{11}^*\Delta_\perp c_1+D_{12}^*\Delta_\perp c_2+\\ &+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{11}^*\frac{\partial c_1}{\partial z}+D_{12}^*\frac{\partial c_2}{\partial z}\right),\\ &\frac{\partial c_2}{\partial t}+\omega_z\frac{\partial c_2}{\partial z}=D_{21}^*\Delta_\perp c_1+D_{22}^*\Delta_\perp c_2+\\ &+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{21}^*\frac{\partial c_1}{\partial z}+D_{22}^*\frac{\partial c_2}{\partial z}\right),\\ &\frac{\partial n}{\partial t}=n\frac{\partial \omega_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим теперь стационарное смешение при отсутствии свободной конвекции, но учтем, что при этом возможно наличие вынужденной конвекции, реализующейся под действием разности давлений на торцах вертикального канала. Это соответствует условиям наблюдения смешения в установках диффузионного моста, в которых вертикальный канал омывается на его концах смесями газов с поддержанием фиксированных значений как разности концентраций, так и разности давлений. Учитывая стационарность процесса, вместо (5) имеем:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g_z\right)=\eta\Delta_\perp\upsilon_{0z}. \quad (9)$$

Решение уравнения (9), соответствующее независимости $\partial p/\partial z$ и $\rho g_z$ от поперечной координаты, имеет следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} \upsilon_{0z}=&\frac{\left(x^2-R^2\right)}{4\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g_z\right)-\\ &-\sigma_{13}^{(\upsilon)}D_{13}\frac{\partial c_1}{\partial z}-\sigma_{23}^{(\upsilon)}D_{23}\frac{\partial c_2}{\partial z}, \end{aligned}$$

где $\sigma_{13}^{(\upsilon)}$, $\sigma_{23}^{(\upsilon)}$ – константы диффузионного скольжения для среднемассовой скорости, которые отражают тот факт, что скорость $\upsilon_{0z}$ на боковой границе канала равна скорости диффузионного скольжения.

Интегрируя этого выражения по площади сечения канала, получим:

$$\begin{aligned} \overline{\upsilon_{0z}}=&-\frac{r^2}{8\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g_z\right)-\\ &-\sigma_{13}^{(\upsilon)}D_{13}\frac{\partial c_1}{\partial z}-\sigma_{23}^{(\upsilon)}D_{23}\frac{\partial c_2}{\partial z}. \end{aligned}$$

С учетом соотношения между $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{\omega}$ в виде $\vec{\upsilon}_0-\vec{\omega}=D_1\nabla c_1+D_2\nabla c_2$, для среднечисловой скорости можно записать:

$$\begin{aligned} \overline{\omega_z}=&-\frac{r^2}{8\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g_z\right)-\\ &-\sigma_{13}D_{13}\frac{\partial c_1}{\partial z}-\sigma_{23}D_{23}\frac{\partial c_2}{\partial z}, \end{aligned}$$

где $\sigma_{13}$, $\sigma_{23}$ – константы диффузионного скольжения для среднечисловой скорости.

Вместо (8), усредняя по сечению канала и учитывая стационарность процесса, имеем:

$$\begin{aligned} &\overline{\omega_z}\frac{\partial c_1}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{11}^*\frac{\partial c_1}{\partial z}+D_{12}^*\frac{\partial c_2}{\partial z}\right),\\ &\overline{\omega_z}\frac{\partial c_2}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{21}^*\frac{\partial c_1}{\partial z}+D_{22}^*\frac{\partial c_2}{\partial z}\right),\\ &\frac{\partial\overline{\omega_z}}{\partial z}=0. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как в соответствии с уравнением непрерывности в (10) $\overline{\omega}_z$ не зависит от $z$, то прямое однократное интегрирование уравнения диффузии по $z$ дает:

$$\overline{\omega}_z c_1 - D_{11}^* \frac{\partial c_1}{\partial z} - D_{12}^* \frac{\partial c_2}{\partial z} = Q_1,$$

$$\overline{\omega}_z c_2 - D_{21}^* \frac{\partial c_1}{\partial z} - D_{22}^* \frac{\partial c_2}{\partial z} = Q_2, \qquad (11)$$

где $Q_1$ и $Q_2$ - некоторые константы, независящие от $z$ и имеющее физический смысл парциальных плотностей объемного потока первого и второго компонентов.

Рассмотрим систему уравнений (11) для случая малых концентраций самого тяжелого компонента. В этом случае выражения для матричных коэффициентов диффузии упрощаются, и мы получаем следующую систему уравнений для парциальных плотностей объемного потока компонентов:

$$Q_1 = Qc_1 - D_{13} \frac{\partial c_1}{\partial z};$$

$$Q_2 = Qc_2 + c_2 \frac{D_{13}(D_{12} - D_{23})}{c_1 D_{23} + c_3 D_{12}} \frac{\partial c_1}{\partial z} - \frac{D_{23} D_{12}}{c_1 D_{23} + c_3 D_{12}} \frac{\partial c_2}{\partial z}. \qquad (12)$$

Решение дифференциальных уравнения (12) с граничными условиями, поставленными в соответствии с устройством диффузионного моста, $c_1(0) = c_{1II}$, $c_2(0) = c_{2II}$, $c_1(L) = c_{1I}$, $c_2(L) = c_{2I}$; $p(L) = p_{II}$; $p(0) = p_I$, рисунок 1, имеют вид:

$$c_1(z) = c_{1II} \exp\left(\frac{Q}{D_{13}} z\right) + \left( c_{1I} - c_{1II} \exp\left(\frac{Q}{D_{13}} z\right) \frac{1 - \exp\left(\frac{Q}{D_{13}} z\right)}{1 - \exp\left(\frac{Q}{D_{13}} L\right)} \right)$$

$$c_2(z) = \frac{\left[c_{2I} - c_{2II} \exp\left(\frac{Q\varphi}{D_{23} D_{13}} L\right)\right] \left[ 1 - \exp\left(\frac{Q\varphi}{D_{23} D_{13}} z\right) + \frac{\xi D_{13}}{D_{23} D_{12} - \varphi D_{13}} x \; x\left( \exp\left(\frac{Q\varphi}{D_{23} D_{13}} z\right) - \exp\left(\frac{Q}{D_{13}} z\right)\right) \right]}{1 - \exp\left(\frac{Q\varphi}{D_{23} D_{13}} z\right) + \frac{\xi D_{13}}{D_{23} D_{12} - \varphi D_{13}} \left[ \exp\left(\frac{Q\varphi}{D_{23} D_{13}} L\right) - \exp\left(\frac{Q}{D_{13}} L\right)\right]} + c_{2II} \exp\left(\frac{Q\varphi}{D_{23} D_{13}} z\right),$$

где $\varphi = D_{12} - (D_{12} - D_{23}) \dfrac{c_{1I} - c_{1II} \exp\left(\frac{Q}{D_{13}} L\right)}{1 - \exp\left(\frac{Q}{D_{13}} L\right)}$

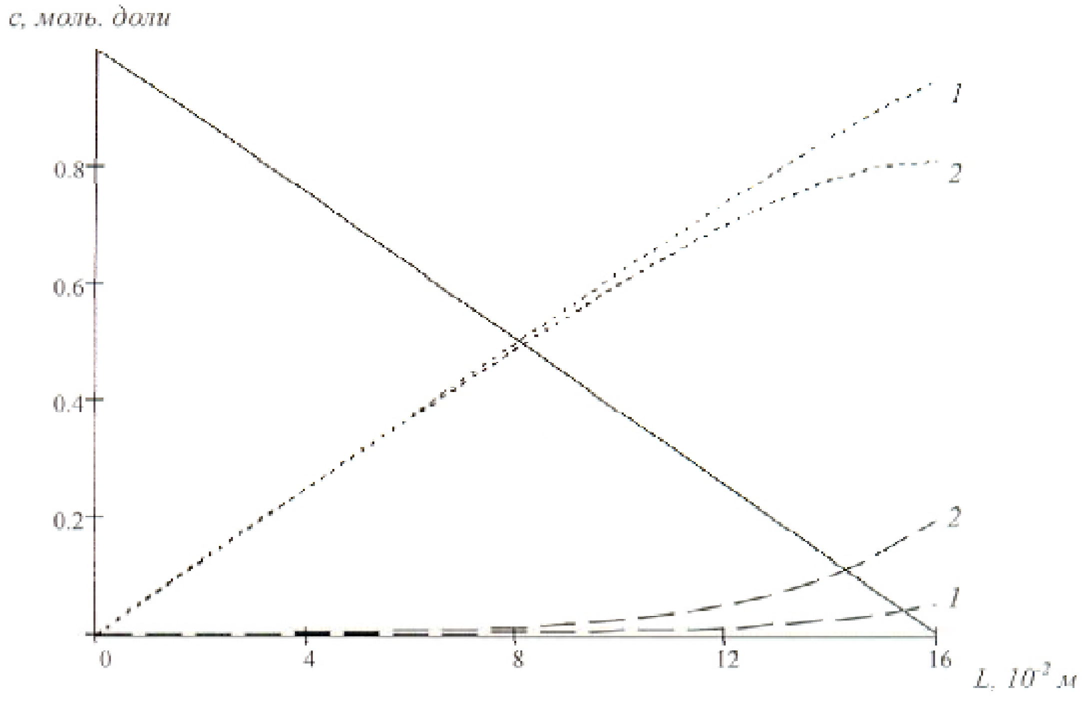


**Рис. 2.** Распределение концентрации о длине диффузионного канала: сплошная линия – аргон; пунктирная линия – фреон-12; линия из точек – гелий.
*1* – система *0,046* $Fr_{12}$ *+ 0,954 He – Ar*; *2* – система *0,194* $Fr_{12}$ *+ 0,806 He – Ar*

и $\xi = \left(D_{23} - D_{12}\right)\dfrac{c_{1II} - c_{1I}}{1 - \exp\left(\dfrac{Q}{D_{13}}L\right)}$.

В случае малости потока $Q \approx 0$, для газовой системы $Ar - He + Fr_{12}$ на рис. 2 представлено распределение концентрации гелия и фреона-12 по длине диффузионного канала $L=0{,}16$ *м*.

Нетрудно заметить, что для системы гелий+фреон-12 – аргон, в которой выполняется условие $D_{12}, D_{13} > D_{23}$, имеет место нелинейное распределение концентраций по длине диффузионного канала. С уменьшением начальной концентрации тяжелого компонента (фреона-12) в бинарной смеси распределение концентрации становится линейным. Мы считаем, что нелинейное распределение концентрации способствует образованию конвективного массопереноса недиффузионной природы.

В заключение сформулируем некоторые выводы. Получена система одномерных (усредненных по сечению диффузионного канала) уравнений локальной неравновесной термодинамики для описания неизобарного смешения тройных газовых смесей в вертикальном канале. В приближении малых концентраций самого тяжелого компонента смеси получено решение для распределения концентрации по длине диффузионного канала, которое нелинейно, по мере уменьшения содержания тяжелого компонента приближается к линейной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Косов В.Н., Селезнев В.Д., Жаврин Ю.И.* О диффузионной неустойчивости в изотермических трехкомпонентных газовых смесях // Теплофизика и аэромеханика. 2000. Т. 7. № 21. С.127-135.
2. *Zhavrin Yu.I., Kosov V.N., Kul'zhanov D.U, Poyarkov I.V., Ankusheva N.B.* Effect of the cell rotation speed upon mutual diffusion in a three-component gas mixture // Technical Physics Letters. 2003. V. 29. N 2. P. 108-110.
3. *Жаврин Ю.И., Косов В.Н., Кульжанов Д.У., Поярков И.В., Асембаева М.К.* Исследование влияния природы и концентрации газа-разбавителя на диффузию двух основных компонентов // Известия НАН РК. серия физико-математическая. 2006. №6(250). С. 25-30.
4. Косов Н.Д., Корзун И.Н., Поярков И.В. Устройство для измерения коэффициентов диффузии. АС СССР №1681203.1991. Бюл. №36.
5. *Волобуев В.П., Суетин П.Е.* Кинетическое рассмотрение бароэффекта // ЖТФ. 1966. Т.36. №7. С.1292-1296.
6. *Косов В.Н., Селезнев В.Д.* Аномальное возникновение свободной гравитационной конвекеции в изотермическох тройных газовых смесях. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. 151 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.


# DISTRIBUTION OF CONCENTRATION OF MIXING COMPONENTS IN A PLANE DIFFUSION CHANNEL AT FREE PRESSURE GRADIENT ON THE ENDS


© 2009 V.D. Seleznev[1], I.V. Poyarkov[2]

[1]Ural State Technical University, Yekaterinburg
[2]Research Institute of Experimental and Theoretical Physics at al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan



Non-linear distribution of concentration of components along the length of diffusion channel is considered in a present article. System of one-dimensional equations of local non equilibrium thermodynamics describing non isobaric mixing of three component gaseous mixtures in the vertical channel is obtained.



Key words: diffused bridge, forced convection, concentration of components



*Vladimir Seleznev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor at the Molecular Physics Department.*
*E-mail: selvd@yandex.ru*
*Igor Poyarkov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Fellow of the Laboratory of Heat-and-Mass Transfer. E-mail: p-igor@inbox.ru*