

ОПТИМИЗАЦИЯ СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ МЕТОДОМ СОПРЯЖЕННОГО ГРАДИЕНТА

© 2011 Е.В. Печеник

Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступила в редакцию 19.03.2011

Разработан численный алгоритм оптимизации формы профиля на основе метода сопряженного градиента. Особенностью метода является возможность использовать большое число проектных переменных (величин, определяющих форму профиля), так как машинное время решения задачи оптимизации практически не зависит от их количества. Прямая задача, описываемая уравнениями Навье-Стокса для двумерного стационарного течения жидкости, решается методом контрольного объема при помощи алгоритма SIMPLE. Для получения градиента функции цели необходимо решить сопряженные уравнения, которые определяются из уравнений Навье-Стокса. Сопряженные уравнения решаются при помощи адаптированного алгоритма SIMPLE. Таким образом, на каждой итерации оптимизации машинное время приблизительно равно машинному времени решения двух прямых задач. Данный метод был использован для решения задачи минимизации лобового сопротивления симметричного профиля при заданной хорде и площади.

Ключевые слова: *оптимизация, функция цели, функции ограничений, проектные переменные, сопряженные уравнения, профиль, метод контрольного объема*

В настоящее время проектирование формы аэродинамического профиля опирается на экспериментальное и математическое моделирование. Методы вычислительной гидроаэродинамики (ВГАД) позволяют относительно дешево и быстро проанализировать различные формы профиля. Эксперимент, в свою очередь, дает возможность верифицировать результаты, полученные при помощи ВГАД, однако перебор альтернативных вариантов не гарантирует получение оптимальной формы профиля. Эту задачу можно решить посредством комбинирования методов ВГАД и численной оптимизации. Одним из наиболее продуктивных методов оптимизации является метод сопряженного градиента. Он обладает рядом преимуществ, которые позволяют применять его к широкому классу задач:

1. Возможность использовать большое количество проектных переменных.
2. Разнообразие в выборе функции цели.
3. Сравнительно невысокие вычислительные затраты. Согласно методу сопряженного градиента на каждой итерации оптимизации машинное время практически не зависит от числа проектных переменных.
4. Возможность использования стороннего решателя для решения прямой задачи.

Метод сопряженного градиента может иметь непрерывную или дискретную формулировку. Непрерывная формулировка представлена в работах [1, 2], она обладает более строгим обоснованием граничных условий и не зависит от решателя уравнений движения. Дискретная формулировка представлена в [3, 4], сравнение непрерывного и дискретного подходов дано в [5]. В данной работе используется непрерывная формулировка. В статьях [1, 2] прямая задача и сопряженные уравнения решались при помощи различных разновидностей метода искусственной вязкости (диссипации) [6]. В представленной работе для этой цели используется метод поправок давления алгоритм SIMPLE [7]. Этот алгоритм хорошо себя зарекомендовал и широко используется в коммерческих CFD пакетах.

Формулировка метода. Необходимо минимизировать функцию цели $I(w,s)$ в соответствии с заданными функциями ограничений $R(w,s)=0$, где $w(s)$ – переменные поля течения, s – проектные переменные, описывающие форму тела. Функцией цели, например, может быть лобовое сопротивление тела, подъемная сила или заданное распределение давления. Функциями ограничений являются уравнениями движения. Двумерное стационарное течение вязкого несжимаемого газа описывает система уравнений Навье-Стокса. Для удобства обозначим декартовы координаты x_1, x_2 , а компоненты вектора скорости u_1, u_2 , также будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам i ($i=1,2$). Тогда уравнения Навье-Стокса могут быть записаны как:

Печеник Евгений Валерьевич, аспирант. E-mail: pechenik@list.ru

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i^v}{\partial x_i} = 0 \quad \text{в области } D, \quad (1)$$

где $f_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ \rho u_1 u_i + p \delta_{i1} \\ \rho u_2 u_i + p \delta_{i2} \end{Bmatrix}; f_i^v = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \delta_{j1} \\ \sigma_{ij} \delta_{j2} \end{Bmatrix};$

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j \\ 1, \text{ если } i = j \end{cases};$$

p – давление; ρ – плотность; μ – вязкость.

За переменные поля течения $w(s)$ принимается вектор $w = (p, u_1, u_2)^T$. Для вывода сопряженных уравнений векторное уравнение (1) необходимо представить в вычислительном пространстве с системой координат ξ_1, ξ_2 такой, что контур исследуемого тела лежит на оси ξ_1 :

$$\frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} - \frac{\partial F_i^v}{\partial \xi_i} = 0, \quad (2)$$

где $F_i = S_{ij} f_j; F_i^v = S_{ij} f_j^v, S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}.$

Получим вариацию функций ограничений $\delta R(w, s)$. Так как в вычислительном пространстве форма тела и соответственно область D_ξ остаются неизменными при вариациях формы в физическом пространстве, то для любой точки вычислительной области D_ξ можно записать:

$$\delta R = \frac{\partial(\delta F_i)}{\partial \xi_i} - \frac{\partial(\delta F_i^v)}{\partial \xi_i} = 0 \quad (3)$$

Запишем вариации для потоков в следующем виде:

$$\delta F_i = \delta F_{Ii} + \delta F_{IIi}, \quad \delta F_i^v = \delta F_{Ii}^v + \delta F_{IIi}^v, \quad (4)$$

где вариации с индексом I являются вкладами, связанными с изменением переменных поля течения δw , а с индексом II – вклады, связанные с изменением формы тела δs .

Рассмотрим функцию цели I , которую можно представить как интеграл по границе $B_{\xi w}$:

$$I = \int_{B_{\xi w}} M(w, s) dB_\xi$$

где $B_{\xi w}$ – контур тела в вычислительном пространстве.

Выражение для вариации функции цели имеет вид:

$$\delta I = \int_{B_{\xi w}} \delta M(w, s) dB_\xi \quad (5)$$

Уравнение (3) умножим на вектор множителей Лагранжа, $\psi^T = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ в каждой точке рассматриваемой области D_ξ , проинтегрируем по ней и вычтем из выражения (5), в результате получим:

$$\delta I = \int_{B_{\xi w}} \delta M(w, s) dB_\xi - \int_{B_\xi} n_i^\xi \psi^T (\delta F_i - \delta F_i^v) dB_\xi + \int_{D_\xi} \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_i} (\delta F_i - \delta F_i^v) dD_\xi,$$

где n_i^ξ – компоненты вектора внешней нормали к границе области B_ξ в вычислительном пространстве. Исходя из предположения, что на внешней границе рассматриваемой области вариации потоков вследствие изменения формы тела равны нулю, можно записать:

$$\delta I = \int_{B_{\xi w}} [\delta M - n_i^\xi \psi^T (\delta F_i - \delta F_i^v)] dB_\xi + \int_{D_\xi} \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_i} (\delta F_{Ii} - \delta F_{Ii}^v) dD_\xi + \int_{D_\xi} \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_i} (\delta F_{IIi} - \delta F_{IIi}^v) dD_\xi. \quad (6)$$

Необходимо найти такие ψ , чтобы первые два интеграла выражения (6) обратились в нуль. Таким образом, сопряженные уравнения и соответствующие граничные условия можно записать в форме:

$$\begin{cases} \int_{D_\xi} \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_i} (\delta F_{Ii} - \delta F_{Ii}^v) dD_\xi = 0 \\ \int_{B_{\xi w}} [\delta M - n_i^\xi \psi^T (\delta F_i - \delta F_i^v)] dB_\xi = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Определив вектор множителей Лагранжа из уравнений (7), можно найти вариацию функции цели по формуле:

$$\delta I = \int_{D_\xi} \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_i} (\delta F_{IIi} - \delta F_{IIi}^v) dD_\xi \quad (8)$$

Вариации потоков представим как:

$$\delta F_{IIi} = \frac{\partial F_i}{\partial s} \delta s, \quad \delta F_{IIi}^v = \frac{\partial F_i^v}{\partial s} \delta s,$$

где $\frac{\partial F_i}{\partial s}$ и $\frac{\partial F_i^v}{\partial s}$ определяются численно, варьируя соответствующую компоненту вектора проектных переменных s при неизменном поле течения. Тогда градиент функции цели есть:

$$G = \int_{D_\xi} \frac{\partial \psi^T}{\partial \xi_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_i^v}{\partial s} \right) dD_\xi \quad (9)$$

Пользуясь методом наискорейшего спуска, получим: $\delta s = -\alpha G$, где α – положительное малое число, которое определяется в ходе численных экспериментов.

Как правило, градиент G не обладает той же гладкостью, что и исходный контур, поэтому алгоритм оптимизации может оказаться неустойчивым. Во избежание этой проблемы в работе [2] предлагается заменить градиент G сглаженным градиентом \bar{G} , который получается в результате решения неявного сглаживающего уравнения:

$$\bar{G} - \frac{\partial}{\partial \xi_1} e \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_1} = G,$$

где e – параметр, влияющий на степень сглаживания градиента. Таким образом, для вариации вектора проектных переменных можно записать:

$$\delta s = -\alpha \bar{G} \quad (10)$$

Прямая задача решается для вязкой несжимаемой жидкости методом контрольного объема при помощи алгоритма SIMPLE [7], сопряженные уравнения решаются при помощи адаптированного алгоритма SIMPLE. На рис. 1 представлена блок-схема работы алгоритма оптимизации.

Результаты и обсуждение. Постановка задачи: минимизация лобового сопротивления симметричного профиля при заданной площади и хорде. В качестве исходного профиля был взят симметричный профиль. На рис. 2 изображены геометрические характеристики этого профиля.

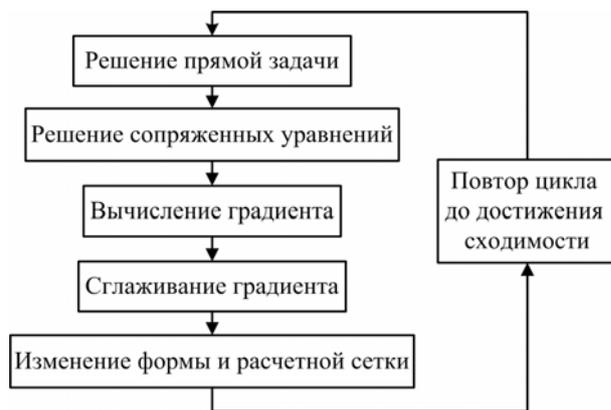


Рис. 1. Блок-схема работы алгоритма оптимизации

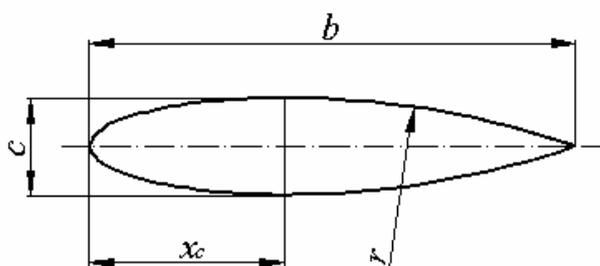


Рис. 2. Исходный профиль E-004020

Носовая часть – это половина эллипса с полуосями $x_c = 0,4b$ и $c = 0,2b$, хвостовая – дуги окружностей, это есть профиль серии E-004020. Число Рейнольдса составляет $Re = 66575$, то есть обтекание можно считать ламинарным. Проектными переменными являются координаты узлов расчетной сетки, лежащие на контуре профиля. Согласно формулировке задачи функцию цели можно записать:

$$I = - \int_{B_{5v}} S_{2j} (\delta_{j1} p - \sigma_{j1}) d\xi_1 + \frac{c_V}{2} \left(\frac{V - V_0}{V_0} \right)^2,$$

где V – площадь текущего профиля; V_0 – площадь исходного профиля E-004020; C_V – весовой коэффициент, который вводится для обеспечения устойчивости алгоритма оптимизации.

На рис. 3 представлен исходный профиль E-004020 и оптимизированный на расчетной сетке 200×30 , число итераций $N = 200$. На том же рисунке приведены значения относительного изменения лобового сопротивления ΔX и относительного изменения площади профиля ΔS .

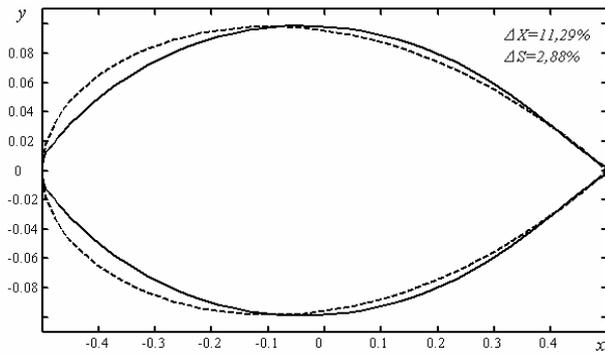


Рис. 3. Профиль, полученный в результате оптимизации (сплошная линия) и исходный профиль E – 004020 (пунктирная линия)

В результате оптимизации был получен локальный минимум и сопротивление профиля снизилось на 11,29% при заданной площади. Эта задача хорошо демонстрирует эффективность метода сопряженного градиента. Полученные результаты можно использовать для выбора формы симметричного профиля для несжимаемого ламинарного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Jameson, A.* Optimum aerodynamic design using control theory. Computational Fluid Dynamics Review. 1995. P. 495-528.
2. *Jameson, A.* Aerodynamic shape optimization using the adjoint method. 2002-2003 Lecture Series at the Von Karman Institute, Von Karman Institute For Fluid Dynamics, Brussels, Belgium, February 6, 2003. 30 p.
3. *Elliott, J.* Aerodynamic optimization on unstructured meshes with viscous effects / *J. Elliott, J. Peraire* // AIAA Paper. 1997. № 97-1849. 18 p.
4. *Giles, Michael B.* Adjoint code developments using the exact discrete approach / *Michael B. Giles, Mihai C. Duta, Jens-Dominik Muller* // AIAA Paper. 2001. № 2001-2596. 12 p.
5. *Giles, Michael B.* An introduction to the adjoint approach to design / *Michael B. Giles, Niles A. Pierce* // Flow, Turbulence and Combustion. 2000. Vol. 65. P. 393-415.
6. *Blazek, J.* Computational fluid dynamics: Principles and applications. ELSEVIER, 2001. 440 p.
7. *Edward, S.A.* Parallel Navier-Stokes solver for natural convection and free surface flow. University of Sydney, 2006. 218 p.

OPTIMIZATION OF THE SYMMETRIC PROFILE BY CONJUGATED GRADIENT METHOD

© 2011 E.V. Pechenik

Samara State Aerospace University

The numerical optimization algorithm of the profile form on the basis of conjugated gradient method is developed. Feature of the method is possibility to use a great number design variable (the sizes defining the form of a profile) as machine time of the problem decision of optimization practically doesn't depend on their quantity. The direct problem described by the equations of Navier-Stokes for two-dimensional stationary current of a liquid, dares a method of control volume by means of algorithm SIMPLE. For reception of purpose function gradient it is necessary to solve conjugated equations which are defined from the equations of Navier-Stokes. The conjugated equations dare by means of adapted algorithm SIMPLE. Thus, on each optimization iteration machine time is approximately equal to machine time of the decision of two direct problems. The given method has been used for the decision of a problem of front resistance minimization of symmetric profile at set chord and the area.

Key words: *optimization, purpose function, restrictions function, design variables, conjugated equations, profile, method of control volume*